UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Departamento de Didáctica de la Matemática
y Didáctica de las Ciencias Experimentales

TESIS DOCTORAL

MODELOS INTUITIVOS Y ESQUEMA CONCEPTUAL DEL INFINITO

EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA, SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO Y UNIVERSIDAD

José Luis Belmonte Martínez

Salamanca, 2009

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Departamento de Didáctica de la Matemática
y Didáctica de las Ciencias Experimentales

TESIS DOCTORAL

MODELOS INTUITIVOS Y ESQUEMA CONCEPTUAL DEL INFINITO

EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA, SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO Y UNIVERSIDAD

José Luis Belmonte Martínez

Director: Dr. Modesto Sierra Vázquez

Salamanca, 2009

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Dr. Modesto Sierra Vázquez, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca

HACE CONSTAR:

Que la presente Memoria titulada **“Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad”** ha sido realizada bajo mi dirección por José Luis Belmonte Martínez y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos ante el Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, firmo el presente documento.

Salamanca, a de de 2009

Fdo.: Dr. Modesto Sierra Vázquez

Sospecho que la palabra *infinito* fue alguna vez una insípida equivalencia de *inacabado*; ahora es una de las perfecciones de Dios en la teología y un discutidero en la metafísica y un énfasis popularizado en las letras y una finísima concepción en las matemáticas –Russel explica la adición y multiplicación y potenciación de números cardinales infinitos y el porqué de sus dinastías casi terribles- y una verdadera intuición al mirar al cielo.

J.L. Borges

A Toñi, compañera paciente e incondicional de este viaje siempre indefinido, que aún no ha recibido todas las muestras de gratitud que se merece

A Sofía, infinita, que nació a la vez que este trabajo, ha crecido con él, ha comenzado a entender que *los números no acaban nunca y existen todos* y ha sufrido ausencias que confío sean perdonables

A Antonio que comparte y comprende a la perfección la ilusión de enseñar y el valor de las ilusiones

A Mª Carmen que en no pocas ocasiones encontró un consejo oportuno y unas palabras de aliento

A mi madre, que ya no está, y tantas veces me preguntó, mirando al cielo nocturno, *cuántas estrellas habría*; y a mi padre que se resiste a no estar sin conocer el final de esta tardía aventura

AGRADECIMIENTOS

Al director de esta Memoria, Dr. Modesto Sierra, que desde el primer momento mostró su interés y confianza por este proyecto y sin cuyo apoyo, consejo y sugerencias este trabajo no habría visto la luz.

A los doctores y doctoras A. Sierpinska, D. Tirosh, R. Falk, B. D'Amore, J. Monhagan, R. Núñez, C. Penalva, por las informaciones y trabajos de investigación facilitados y, en todos los casos, por sus palabras de ánimo.

A la Dra. Sabrina Garbín por la lectura del cuestionario, aún incipiente, y sus acertados comentarios para la optimización del mismo.

A los maestros de los diez colegios públicos, de Leganés y Alcorcón, a los profesores de matemáticas de los doce institutos y centros de enseñanza concertados, de Alcorcón, Fuenlabrada, Leganés, Móstoles y Molina de Segura y a los profesores de Análisis Matemático y Cálculo de las cinco universidades, Pontificia de Salamanca, Complutense de Madrid, Carlos III de Madrid, Rey Juan Carlos de Madrid y Universidad de Murcia, que en todo momento se interesaron por esta experiencia y facilitaron el acceso a los grupos de alumnos solicitados.

A los más de dos mil estudiantes encuestados, y una treintena de ellos entrevistados, actores anónimos necesarios que, en realidad, constituyen la esencia de este trabajo sobre Educación Matemática.

Índice

INTRODUCCIÓN ……………………………..…………………….......... vii

CAPÍTULO 1: UNA HISTORIA AD HOC DE INFINITO …………….......... 1

1.1. Preludio clásico. La omnipresencia de Aristóteles ……………….......... 2
1.2. Las paradojas de Zenón. Divisibilidad y pluralidad ……………………….. 10
1.3. Interludio medieval-renacentista ………………………………….......... 15
1.4. Acto final: actualización del infinito ………………………………………. 20

CAPÍTULO 2: PERSPECTIVAS TEÓRICAS ………………………….......... 39

2.1. Pensamiento matemático elemental vs avanzado ……………………….. 39
2.2. Objetos, procesos y conceptos. Esquema conceptual …………….......... 44
2.3. Sobre la abstracción …………………………………………………….. 54
2.4. Intuición y modelos tácitos ………………………………………......... 57
2.4.1. Sobre la idea de intuición …………………………………………… 57
2.4.2. Características de las intuiciones ……………………………………. 65
2.4.3. Clasificación de las intuiciones ……………………………........... 67
2.4.4. Modelos mentales. Modelos tácitos ………………………………… 69
2.4.5. Analogías, paradigmas y diagramas ………………………………… 70
2.4.6. Estabilidad y resistencia de las intuiciones ………………............ 72
2.5. Corporeización y pensamiento metafórico ……………………….…….......... 73
2.5.1. El significado de corporeización …………………………................ 74
2.5.2. Pensamiento metafórico …………………………………………….. 79
2.5.3. Metáforas conceptuales …………………………………….……….. 82
2.5.4. Metáfora Básica del Infinito …………………………..………….. 86
2.6. Crecimiento matemático ………………………………………………... 95
2.6.1. Los tres mundos de las matemáticas ……………………..………… 95
2.6.2. El lenguaje y los tres mundos de las matemáticas …….…………… 102
2.7. Obstáculos …………………………………………..……………... 105

CAPÍTULO 3: INVESTIGACIONES SOBRE EL CONCEPTO DE INFINITO …. 113

3.1. Líneas de investigación abiertas………………………………………………… 115
3.2. Intuición e infinito………………………………………….………….......... 116
3.2.1. Preámbulo piagetiano: divisibilidad indefinida……..………………... 116
3.2.2. Carácter contradictorio del infinito. Finistas vs infinitistas ………….. 118
3.2.3. Modelos intuitivos en el dominio del infinito actual………….............. 126
3.2.4. Intuición y números de medida infinita…………………….............. 131
3.3. Contextos e incoherencias en el esquema conceptual……………………….. 133
3.4. Cardinalidad y equivalencia de conjuntos. Infinito actual………................. 139
3.4.1. Significado e interpretaciones ....……………………………….. 139
3.4.2. Incosistencias y conflicto cognitivo………………………………….. 146
3.4.3. Perspectiva semiótica y epistemológica…………………................... 152
3.5. Lenguaje e infinito……………………………………………….................. 156
3.5.1. Valor lingüístico de las definiciones……………………….............. 156
3.5.2. El infinito corporeizado……………………………………….............. 163
3.6. Teoría APOE e infinito……………………………………………………..... 165

CAPÍTULO 4: INSTRUMENTOS METODOLÓGICOS …………………………. 171

4.1. Diseño de los cuestionarios. Características de su aplicación ………………. 173
4.1.1. Cuestionario para un estudio previo …………………….………… 175
4.1.1. Cuestionario para el estudio definitivo ……………………………….. 176
4.2. La entrevista ………………………………………………………………… 178
4.3. Cuestionario para el profesorado …………………………………………… 180
4.4. Elección y distribución de muestras ………………………………………… 180
4.5. Análisis de datos …………………………………………………………….. 181
ANEXO: Facsímil de los cuestionarios propuestos a los estudiantes …………..... 183

CAPÍTULO 5: ANÁLISIS CUANTITATIVO DE RESULTADOS: EVOLUCIÓN NIVELAR Y MODELOS INTUITIVOS ………… 207

5.1. Conceptos y definiciones ……………………………….………….... 207
5.2. Cardinalidad y equipotencia. Infinito actual ………………………………... 209
5.2.1. Contexto numérico. Aspectos comunes ……………………………… 209
5.2.2. Contexto numérico. Cuestiones específicas ……………….................. 219
5.2.3. Contexto geométrico. Aspectos comunes …………………………… 229
5.2.4. Contexto geométrico. Cuestiones específicas ………………………... 234
5.2.5. Contexto algebraico ……………………………………………….... 244
5.2.6. “Tamaños” de infinito ……………………………………………... 246

5.3. Divisibilidad infinita y continuidad. Infinito potencial ……………………... 248
5.3.1. Contexto geométrico. Aspectos comunes …………………………… 248
5.3.2. Contexto geométrico. Cuestiones específicas ………………………... 252
5.3.3. Contexto numérico ………………………………………………… 254
5.4. Sumas infinitas ……………………………………………………………… 268
5.4.1. Contexto geométrico. Aspectos comunes …………….……………… 269
5.4.2. Contexto geométrico. Cuestiones específicas …………….................. 272
5.4.3. Contexto numérico. Cuestiones específicas ………………………….. 276
5.5. Operatividad e infinito ..…………………………………………………….. 282
5.6. Lenguaje e infinito …………………………………………………………... 292
5.7. Inducción e infinito ……………………………………………………..... 302
5.8. Referencias didácticas ……………………………………………………...... 305
5.9. Resumen ……………………………….………………………………..... 306

CAPÍTULO 6: ELEMENTOS PARA UN ESQUEMA CONCEPTUAL DEL INFINITO ……………………………………………………… 309

6.1. Componentes del esquema conceptual nivelar ……………………………….. 310
6.1.1. Elementos metafóricos ………………………………………………… 311
6.1.2. Elementos simbólicos ………………………………………………….. 312
6.1.3. Elementos formales ……………………………………………………. 313
6.1.4. Elementos finitistas e infinitistas ……………………………………… 314
6.1.5. Elementos obstáculo ……………………………………….................. 315
6.2. Construcción de los elementos del Esquema conceptual nivelar …………….. 316
6.2.1. Sexto curso de Educación Primaria: 11-12 años ……………………… 317
6.2.1.1. Elementos propios …………………………………………….. 317
6.2.1.2. Elementos metafóricos ………………………………………... 320
6.2.1.3. Elementos simbólicos …………………………………………. 325
6.2.1.4. Elementos finitistas e infinitistas ………………….................. 326
6.2.1.5. Elementos obstáculo y modelos tácitos ………………….……. 328
6.2.2. Primer ciclo de Educación Secundaria: 12-14 años …..………………... 330
6.2.2.1. Elementos propios …………………………………………….. 330
6.2.2.2. Elementos metafóricos ………………………………………... 333
6.2.2.3. Elementos simbólicos …………………………………………. 336
6.2.2.4. Elementos finitistas e infinitistas ……………………………… 337
6.2.2.5. Elementos obstáculo y modelos tácitos ……………….……… 340
6.2.2.6. Entrevistas ……………………………………………….…..... 341

6.2.3. Segundo ciclo de Educación Secundaria: 14-16 años ………………… 344
6.2.3.1. Elementos propios …………………………………………… 344
6.2.3.2. Elementos metafóricos ……………………………………….. 348
6.2.3.3. Elementos simbólicos ………………………………………… 352
6.2.3.4. Elementos finitistas e infinitistas …………………………... 354
6.2.3.5. Elementos obstáculo y modelos tácitos ………………..…... 356
6.2.3.6. Entrevistas …………………………………………………… 359
6.2.4. Bachillerato: 16-18 años ………………………………………………. 362
6.2.4.1. Elementos propios …………………………………………… 362
6.2.4.2. Elementos metafóricos ……………………………………….. 366
6.2.4.3. Elementos simbólicos ………………………………………… 370
6.2.4.4. Elementos pre-formales ……………………………………… 372
6.2.4.5. Elementos finitistas e infinitistas …………………………... 373
6.2.4.6. Elementos obstáculo y modelos tácitos ………………..…… 376
6.2.3.7. Entrevistas …………………………………………………… 380
6.2.5. Primer curso universitario: 18-19 años ……………………………….. 383
6.2.5.1. Elementos propios …………………………………………… 383
6.2.5.2. Elementos metafóricos ……………………………………….. 388
6.2.5.3. Elementos simbólicos ………………………………………… 392
6.2.5.4. Elementos pre-formales ……………………………………… 395
6.2.5.5. Elementos finitistas e infinitistas …………………………... 396
6.2.5.6. Elementos obstáculo y modelos tácitos ………………..…... 399
6.3. Resumen …………………………………………………………………... 404

CONCLUSIONES ……………………………………………………….......... 407

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS …………………………………………… 423

ÍNDICE ANALÍTICO …………………………………………………………... 435

APÉNDICES (CD-ROM) ……………………………………………………….. 439

Apéndice I: Cronograma de publicaciones ……………………………………... 441
Apéndice II: Cuestionarios de otras investigaciones……………………............... 445
Apéndice III: Referencias de los ítems planteados en los cuestionarios ……………. 463
Apéndice IV: Cuestionario para el profesorado …………………………………….. 469
Apéndice V: Tablas de resultados porcentuales ....…. 473
Apéndice VI: Guiones y transcripción de las entrevistas…………………………… 491
Apéndice VII: Tabulación de las respuestas a los cuestionarios de los estudiantes 557

Siglas y abreviaturas

APOE: Acción-Proceso-Objeto-Esquema (Teoría)

BTO: Bachillerato

ECN: Esquema Conceptual Nivelar

ESO: Ecuación Secundaria Obligatoria

MBI: Metáfora Básica del Infinito

MIT: Modelos Intuitivos Tácitos

PEN: Patrón de Evolución Nivelar

PMA: Pensamiento Matemático Avanzado

PME: Pensamiento Matemático Elemental

PRI: Educación Primaria

UNI: Nivel Universitario

Introducción

"¿Puedes sumar?" preguntó la Reina Blanca. "¿Cuánto es uno y uno y uno y uno y uno y uno y uno y uno y uno y uno?

"No lo se" dijo Alicia "he perdido la cuenta"

"No sabe sumar" interrumpió la Reina Roja

L. Carrol

La noción de infinito tiene unos orígenes eminentemente filosóficos, en absoluto matemáticos; el término en sí, lejos de pretender cuantificar, aspiraba a calificar cualquier ente inaccesible o proceso indefinido. Aún ocurre así en determinados contextos. Pero las diversas épocas racionalistas de la historia del pensamiento han intentado definir de manera estricta el alcance de dicho concepto, al menos en el ámbito científico; las postrimerías del siglo XIX asistieron a tal evento.

La incorporación de este concepto al currículo y textos escolares, tema aún por desarrollar en la literatura científica sobre la historia de la Educación Matemática, presenta una singularidad frente a cualquier otro: sencillamente no se define ni se acompaña de manual de uso alguno. A pesar de su ubicuidad desde edades tempranas, para representar la *numerosidad* de un conjunto, hasta la finalización del bachillerato, que contempla más o menos formalmente la *idea de límite*, no es fácil hallar referencias explícitas sobre su significado en un contexto educativo; es decir, durante más de diez años del aprendizaje en matemáticas de un individuo, infinito desempeña un papel exclusivamente simbólico o bien sólo sinonímico de muy grande o muy pequeño. Sin embargo, este concepto va ligado a innumerables tópicos habituales en la enseñanza obligatoria y postobligatoria tales como decimal periódico, número irracional, número real, sucesión, serie, asíntota, límite, derivada y tangente a una curva, integral, resolución numérica de ecuaciones y bucles en programación, sistemas de ecuaciones y su significado geométrico, fractal, geometría proyectiva, cardinal de un conjunto, inducción, número transfinito, etc.

Este carácter singular de infinito, y el inevitable interés que despierta entre los estudiantes su mención y cualquiera de sus paradojas, ha constituido la razón primordial para pensar en llevar a cabo un estudio sobre el *esquema conceptual nivelar* que genera esta noción; no en vano, Bruno

D'Amore considera en uno de sus artículos que el infinito es, además de una fuente de conflictos, sorpresas y dudas, *un campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática*. Los investigadores y grupos de investigación más importantes en la actualidad se han interesado en algún momento de su trabajo por el concepto de infinito, su formación y sus consecuencias en el aprendizaje; así ha ocurrido con Tall, Dubinsky, Núñez, Duval, Sfard, Sierpinska, Tirosh, etc. Preguntas tales como ¿cuáles son las intuiciones primarias y secundarias y los modelos tácitos, relacionados con el infinito, que se implantan en los estudiantes?, ¿cuál es la incidencia de la instrucción, a través de las creencias del profesorado, en dichos modelos?, ¿cuáles son las metáforas implicadas en la adquisición de la idea de infinito?, ¿qué aspectos de su comprensión quedan afectados en función de las representaciones utilizadas?, ¿cuáles son los criterios que tienden a utilizar los estudiantes para comparar conjuntos?, ¿cuál es la necesidad real de construir un concepto como el infinito?, ¿cómo es que somos capaces de pensar en el infinito?, ¿cuáles son las condiciones que necesitamos para ser capaces de concebir el infinito?, ¿qué tipo de actividad cognitiva funciona cuando estamos pensando en el infinito?, ¿qué significa que alguien haya comprendido o que posea el concepto de infinito?, ¿cómo evoluciona el conjunto de imágenes asociado a esta noción a lo largo de los diferentes niveles educativos?, sugeridas por Fischbein, Núñez, Monaghan, Garbín, etc. en algunos de sus trabajos más representativos, han contribuido a motivar aún más el presente estudio y constituirán el verdadero telón de fondo del mismo. Indudablemente, el conocimiento de los contextos en los que ocurren los hechos educativos suele ser una importante fuente de problemas; así, casi dos décadas de labor docente han contribuido, por otra parte, a fomentar aquel interés compartido con el alumnado; junto a ello, un periodo de varios años desempeñando la asesoría de matemáticas en un centro de formación de profesores de la Comunidad de Madrid ha permitido una relación con los colegas de profesión y un grado de accesibilidad a los centros escolares sin los cuales hubiera sido impensable abordar una muestra de alumnos y alumnas semejante a la de este trabajo.

El estudio de la bibliografía correspondiente a este tema y a otros afines permitió situar esta investigación en el marco teórico del pensamiento matemático avanzado así como establecer los puntos de referencia particulares para su desarrollo; corporeización y metáforas, intuición y esquema conceptual se convirtieron en dichos pilares. Nuestros cuerpos constituyen verdaderos interfaces entre el cerebro y el mundo externo de manera que *nuestra corporeidad es fundamental con respecto a quiénes somos, a qué supone el significado y a nuestra capacidad de hacer deducciones racionales y ser creativos* (Johnson, 1991). Y es precisamente la metáfora el vínculo que actúa como elemento de comprensión a través del cual proyectamos las experiencias de nuestro entorno sobre otros dominios, más o menos abstractos, que pueden constituirse en estructuras imaginativas corporeizadas con sus propios patrones de deducción y reflexión. Esto supone, sin duda, un revés al objetivismo cognitivo pero Putnan (1981) demuestra que cualquier intento de dar significado a los símbolos abstractos a través de su correspondencia directa y no mediada con el mundo, o a cualquier modelo de éste, viola inevitablemente nuestra comprensión más elemental del significado. Normalmente, cuando el estudiante accede a un nuevo concepto matemático ya posee, al menos, el significado coloquial de los términos utilizados. Por otra parte, la cognición intuitiva es un mecanismo de conocimiento básico, sólidamente anclado en nuestra estructura mental, que se caracteriza por su inmediatez y robustez. La introducción de nuevos conceptos implica necesariamente el uso de modelos intuitivos que son el resultado de la corporeización de experiencias anteriores. Y, por último, la tercera referencia sobre la que se apoyará nuestro trabajo es la de esquema conceptual que proponen Tall y Vinner. Cualquiera de los mecanismos cognitivos que dispone nuestro cerebro, incluido el intuitivo, genera y enriquece paulatinamente dicho esquema conceptual incorporando todo tipo de elementos, desde los metafóricos más básicos hasta los estrictamente formales. Desgraciadamente durante este proceso se desarrolla una compartimentación de elementos que dificulta el establecimiento de vínculos entre ellos y, en consecuencia, la posibilidad de aplicar inferencias equivalentes en representaciones o contextos diferentes pero isomorfos.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

Toda investigación comienza con la percepción de una dificultad, obstáculo o problema para el que no se dispone de conocimientos suficientes que permitan su resolución. Sin duda, el infinito es uno de los conceptos más sofisticados que aparecen en el aprendizaje de las matemáticas; veamos por qué, y con ello acotaremos en cierta medida el problema que se pretende abordar en el presente trabajo. En primer lugar, no hay referentes inmediatos en nuestro entorno que permitan establecer una primera aproximación a esta idea; sencillamente vivimos y exploramos un mundo finito; la intuición tiene en este caso un claro papel protagonista. Será necesario, por lo tanto, desvelar los *modelos tácitos* (Fischbein, 1998) que subyacen a su conocimiento con el fin de poder diseñar estrategias correctoras que permitan la implementación adecuada del concepto mediante la instrucción correspondiente. Por otra parte, la creación de un *esquema conceptual*, en torno a la idea de infinito, lo suficientemente rico, supone un grado de abstracción inusual en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas[1]. En cuanto a los registros semióticos que se utilicen para presentar y representar los diferentes aspectos del concepto tendrán, en este caso, una repercusión crucial en la actitud de los estudiantes (Duval, 1995 y Garbin, 2000). En general, establecer la *definición conceptual* no es tarea trivial en matemáticas y hacerlo con el infinito, en particular, presenta problemas adicionales que no es posible obviar (Tall y Vinner, 1981). De hecho, la idea de *infinito actual* es metafórica y el mecanismo de metáforas nos permite conceptualizar el "resultado" de un proceso infinito pero sin olvidar que las ideas abstractas heredan la estructura inferencial de la experiencia física, corporal y perceptiva (Lakoff y Núñez, 2000; Sfard, 1994). La doble vertiente histórica infinito *potencial vs* infinito *actual* implica una colección de representaciones asociadas a ambas nociones, dinámico *vs* estático, indefinido *vs* definido, inabarcable *vs* abarcable, etc. que a la vez que lo enriquecen suponen importantes obstáculos didácticos y epistemológicos (Cornu, 1991) en el camino de su comprensión. El paralelismo entre el desarrollo histórico de la noción de infinito y el de su incorporación al bagaje matemático de los estudiantes nos obliga a repasar las líneas principales de aquél, ya que nos dotarán de instrumentos para efectuar una primera aproximación a los problemas de su aprendizaje (Cornu, 1983). En fin, como ya se ha indicado anteriormente, su presencia prácticamente testimonial en el currículo, y por ende en los textos de matemáticas, a lo largo de toda la enseñanza secundaria y primeros cursos universitarios conlleva una manipulación insegura y una encapsulación incompleta por parte del estudiante. En consecuencia, si el *proceso* no se convierte adecuadamente en *objeto*, el concepto en cuestión será

1. El esquema conceptual de Tall y Viner quedó definido como una especie de "caja negra" donde se incluían todo tipo de imágenes y representaciones; es preciso, por lo tanto, definir algunos de los compartimentos de dicha estructura.

una fuente clara de importantes errores en la interpretación de resultados, en especial en el campo del análisis matemático (Tall, 1991 y Dubinsky, 1991).

A partir de todo lo anterior parece adecuado e interesante intentar profundizar en los mecanismos de adquisición del conocimiento matemático utilizando este tópico como vehículo de inspección y diagnosis con el fin de conjeturar nuevos aspectos de aquél e incorporar nuevos resultados en el marco teórico existente al respecto ya que, como indica Núñez (1990), *el estudio de la concepción del infinito permite investigar dominios de la actividad mental no basados en experiencias directas -debido a nuestra realidad finita-, permitiéndonos acceder a terrenos muy poco explorados de la actividad puramente mental*.

El objetivo general de la presente investigación es el de observar y analizar detalladamente el proceso de transición que tiene lugar en la reestructuración cognitiva del esquema conceptual de infinito a nivel colectivo bajo una perspectiva transversal[2]. Esto supone básicamente un cambio cognitivo del infinito considerado como un proceso al concepto encapsulado como un simple objeto al que se le da un nombre, infinito actual, lo que se produce a través de la abstracción de propiedades de dicho concepto en términos de una definición, de la construcción de nuevas propiedades del objeto mediante deducción lógica y del establecimiento de relaciones entre las diferentes representaciones del concepto (Robert, A. y Schwarzenberger, R., 1991). En cuanto a los **objetivos** específicos, todos ellos originales dentro de la literatura correspondiente, que se pretenden alcanzar son los siguientes:

1. Realizar un *estudio transversal del concepto* que incluye muestras representativas de niveles de los tres ámbitos escolares del sistema educativo español: educación primaria, secundaria y universitaria.
2. Hallar *patrones de evolución* en el comportamiento de los estudiantes hacia determinados tópicos relacionados con el infinito, así como analizar la *estabilidad* de dichos patrones.
3. Llevar a cabo una detección exhaustiva de *modelos intuitivos* relacionados con el concepto y determinar la influencia de diferentes contextos y representaciones sobre los mismos.
4. Efectuar un análisis pormenorizado del lenguaje utilizado para referirse al infinito: metáforas alusivas, función gramatical que desempeña el término “infinito” en cada contexto, acción perfectiva o imperfectiva del verbo, etc.
5. Elaborar, por niveles, un *esquema conceptual colectivo* asociado a la noción de infinito a través de los diferentes *elementos* definidos en cada uno de los niveles considerados.

Estos objetivos irán necesariamente ligados a un estudio de la influencia que ejercen los diferentes *contextos* o *representaciones* sobre las actitudes finitistas e infinitistas de los sujetos, al análisis del lenguaje metafórico y formal utilizado así como a la incidencia de la instrucción recibida.

2. Dentro de los tres grandes tipos de investigaciones que se pueden distinguir dentro de la Educación Matemática como son aquellas que se centran en la adquisición por parte del alumno de conceptos específicos, la que se centran en la organización de los contenidos matemáticos y aquellas otras que lo hacen sobre las condiciones externas bajo las que tienen lugar la enseñanza y el aprendizaje, este trabajo se ubica en el primero de estos tipos que pretende esencialmente diagnosticar aquellas dificultades de los estudiantes relacionadas específicamente con la estructura matemática del concepto en cuestión.

El procedimiento inductivo, que utilizaremos en este trabajo, supone una fuente particularmente útil de hipótesis pues implica la observación del comportamiento, tendencias o relaciones probables que permitan el planteamiento de aquellas con el fin de explicar dicha conducta. Los objetivos anteriores constituyen una oportunidad para contrastar las siguientes **hipótesis**:

1. El nivel educativo, es decir la edad, incide en los patrones de evolución de las categorías establecidas a diferencia de las tesis mantenidas por Fischbein et al. (1979) sobre la imperceptible influencia de dicho nivel en las actitudes de los estudiantes frente a la noción de infinito.
2. Por el contrario, los tipos de modelos intuitivos del infinito, así como los elementos contradictorios, no quedan afectados prácticamente por la edad; se mantienen invariantes. Además, existen modelos intuitivos no detectados por las investigaciones anteriores.
3. El pensamiento metafórico se refleja en el lenguaje asociado al concepto de infinito en todos los niveles educativos abordados por este estudio, poniendo de manifiesto aspectos perceptivos que convierten en discutible la neutralidad del aquél como simple figura literaria.
4. El contexto influye de manera determinante en el modelo intuitivo aplicado; en particular, el contexto geométrico favorecerá las respuestas *finitistas* de los estudiantes, mientras que el numérico lo hará con las *infinitistas* en su vertiente potencial.

El prisma bajo el que se analizan las respuestas de los estudiantes a lo largo de este trabajo no se reduce a valorar la corrección o incorrección de las mismas sino que se establecerá su categorización y se considerará su coherencia y consistencia dentro del esquema conceptual colectivo y en relación con la instrucción recibida en cada nivel.

En síntesis, podemos enunciar nuestro problema de investigación como un estudio descriptivo de la evolución colectiva de las diferentes actitudes que manifiestan los estudiantes ante supuestos que involucran diferentes elementos infinitistas, acompañado por la propuesta de factores de causalidad que expliquen los patrones de comportamiento hallados, así como el diseño de un modelo para el esquema conceptual asociado a infinito, en cada uno de los niveles educativos considerados, que contemple dichos patrones y la compartimentación de las imágenes a ellos vinculadas.

RESUMEN

El desarrollo de los diferentes aspectos mencionados anterioremente se efectúa a través de la siguiente distribución:

El capítulo 1 recorre brevemente la trayectoria histórica de este concepto sometido a las perspectivas más dispares y divergentes, a las teorías más enfrentadas, a los significados más esotéricos e incluso a las posturas más viscerales de los propios matemáticos. Pero a pesar de todo ello, el infinito adquiere su carta de naturaleza en las matemáticas dos milenios y medio después de sus primeras menciones griegas; se trata de la noción matemática que más credenciales ha necesitado para ello.

En el capítulo 2 se establecen las bases teóricas sobre las que se ubican las investigaciones desarrolladas hasta el momento, en torno a la noción de infinito, y recogidas en su mayor parte en el capítulo 3; antes de ello se abordan los puntos de vista más significativos respecto a la idea de Pensamiento Matemático Avanzado, ya que el concepto de infinito cruza su frontera desde sus orígenes en el seno de las matemáticas elementales. A lo largo del segundo capítulo se recorre el ámbito de nociones tales como intuición, esquema conceptual, corporeización, pensamiento metafórico y obstáculos didácticos y epistemológicos que, como ya se ha indicado anteriormente, constituyen el subsuelo de la presente investigación.

El capítulo 3 pretende representar de la manera más exhaustiva posible los trabajos realizados sobre la adquisición del concepto de infinito. La mayor parte de ellos no se alinean claramente con los paradigmas de investigación ya establecidos sino que suelen adoptar marcos teóricos y metodologías mixtas al igual que en el trabajo que nos ocupa. No obstante, se ha realizado un esfuerzo por establecer una cierta clasificación que facilite su lectura y permita apreciar los resultados más reseñables y las conclusiones más trascendentes.

Todos los aspectos relacionados con los instrumentos metodológicos utilizados en este trabajo aparecen sintetizados en el capítulo 4. En él se recogen las pautas seguidas para el diseño de los cuestionarios y entrevistas, incluyendo los detalles de su aplicación, así como la distribución de las muestras elegidas.

En el capítulo 5, primera parte del análisis de resultados, se presenta el estudio cuantitativo de los mismos y la descripción de los patrones de evolución nivelar (PEN), o temporal, de las diferentes imágenes asociadas al concepto de infinito registradas en los cuestionarios y entrevistas que se han llevado a cabo. Así mismo, se efectúa la detección de los modelos intuitivos implicados en la creación de tales imágenes; con esta labor se han complementado las propuestas de Fischbein, y otros autores referidos en el capítulo 3, incorporando nuevos modelos que permiten una interpretación más detallada y precisa del esquema conceptual correspondiente. Por último, se ha considerado la influencia de contextos y representaciones en los patrones de evolución, así como en los modelos aplicados, a través de su grado de estabilidad que nos indica la mayor o menor sensibilidad del tipo de imágenes frente al contexto en el que se ubican las cuestiones planteadas. Para desarrollar este análisis se han establecido cinco ámbitos frecuentes en la literatura especializada: cardinalidad y equipotencia, divisibilidad infinita, sumas infinitas, operatividad e infinito y lenguaje del infinito. Cada una de estas facetas nos ofrece la oportunidad de profundizar en aspectos concretos del concepto y, a la vez, establecer vínculos entre cada una de ellas.

El capítulo 6 pretende elaborar un esquema conceptual nivelar (ECN) que permita describir en detalle las pecualiridades de este concepto en cada uno de los niveles considerados, a través de una serie de elementos evolutivos, componentes de una estructura previamente diseñada. Tales elementos deberán aportar información tanto progresiva o diacrónica, en relación con niveles inferiores y superiores, como sincrónica o propia de cada nivel; de este modo, encontraremos elementos propios, metafóricos, simbólicos, pre-formales, finitistas e infinitistas, obstaculizadores y contradictorios. Esta parte del análisis, cualitativa, se desarrolla a partir del estudio e interpretación de respuestas mediante un catálogo exhaustivo de las mismas que recoge la mayor cantidad posible de expresiones, giros, definiciones, etc., así como puntos de vista, en general, que aporten cualquier imagen adicional al ECN. Un mismo modelo intuitivo nos ofrece una diversidad considerable de propuestas que, aunque no exentas de ambigüedad en su determinación, nos capacita para diagnosticar los puntos débiles del aprendizaje de este concepto y, en base a ello, establecer estrategias de instrucción que reduzcan el impacto de elementos epistemológicos inconvenientes propios de esta noción.

Finalmente, en el capítulo de conclusiones se recogen los resultados más destacados del análisis efectuado; ello nos permitirá establecer ciertas orientaciones didácticas así como algunas propuestas para futuras investigaciones que desarrollen los aspectos más notables sobre los que apunta el presente trabajo.

Capítulo 1

UNA HISTORIA AD HOC DEL INFINITO

Sísifo denunció a Zeus del rapto de Egina lo que le valió la cólera del señor de los dioses. Zeus lo fulminó y lo precipitó en los Infiernos, condenándolo a empujar eternamente una roca enorme hasta lo alto de una pendiente. Apenas la roca llegaba a la cumbre, volvía a caer, impelida por su propio peso, y Sísifo tenía que comenzar de nuevo.

P. Grimal

Esta es una historia ad hoc del infinito. Tras una lectura minuciosa de las respuestas de un gran número de estudiantes entre once y diecinueve años, nos detendremos principalmente en aquellos episodios históricos que recogen el espíritu de tales concepciones y que, de alguna manera, nos permitirán efectuar una categorización adecuada de sus ideas e intuiciones. La mayor parte de éstas no son sino el reflejo del pensamiento incipiente de cualquier individuo en más de dos mil años de creación de las ideas actuales sobre este concepto. Veremos a lo largo del presente trabajo que la trayectoria epistemológica de esta noción contiene de manera natural una buena parte de los comentarios y opiniones recogidos en los diferentes cuestionarios. Al respecto, Polya (1967) nos ofrece una versión matizada del *principio genético*:

> Si hemos comprendido cómo la humanidad ha adquirido el conocimiento de ciertos fenómenos y de ciertos conceptos, estaremos en mejor disposición de juzgar cómo el niño puede recorrer el mismo camino.

En realidad este principio responde a una ley biológica fundamental: *la ontogenia resume la filogenia*, en términos del biólogo alemán Ernest Haeckel. También el esquema piagetiano contempla la necesidad de comparar la psicogénesis de un concepto y su historia.

Por otra parte, la psicología, los fenómenos sociales, las artes y la cosmología han contribuido al desarrollo de la idea de infinito. Cohn (1994) mantiene un enfoque antropomórfico o psicohistórico de la idea de infinito. Según este autor, los humanos son portadores a la vez del deseo de finitud y del de infinitud. “La aspiración finitista” se expresa por una necesidad de asignar límites a los objetos de conocimiento definiéndolos, conceptualizándolos. “La aspiración infinitista”, en cambio, se manifiesta en el deseo de transgredir toda forma de límite, por ejemplo, al preguntarse por el “más allá” de la muerte.

Crubellier (1994) define tres tipos de infinito: el infinito de Platón y Aristóteles que es un principio indefinible que hace concebible la existencia de la pluralidad, el cambio y el movimiento. El segundo infinito es el infinito de la Edad Media asociado a Dios. Y el tercer infinito es el de los matemáticos: es el orden infinito.

1.1. PRELUDIO CLÁSICO. LA OMNIPRESENCIA DE ARISTÓTELES.

Del periodo babilónico antiguo procede una tablilla que contiene el cálculo de la raíz cuadrada de 2 con tres cifras “decimales” sexagesimales, que en notación decimal sería 1.414122. El método algorítmico utilizado por los babilonios, posteriormente atribuido a Arquitas (428-350 a.C.), y después a Herón (s. I d.C.), consiste en aproximaciones sucesivas mediante iteraciones. Quizás pudo ser este procedimiento el que puso a los matemáticos de la época en contacto con los procesos infinitamente largos aunque, en realidad, no persiguieron las implicaciones de tales problemas.

El concepto de infinito aparece por primera vez en Occidente con Anaximandro de Mileto (610 - 546 a.C.); no obstante, para los pensadores griegos referirse a la infinitud quería decir emplear un término de significado completamente distinto a nuestro “infinito”[1]. Los pitagóricos mantuvieron que el movimiento del cosmos se rige por una bipolaridad fundamental expresada en términos de “finito” e “indefinido” o “ilimitado”. Fue Filolao (480 - ?) quien enfrentó ambos principios πὲραζ (*peras*: límite) y ἄπειρον (*ápeiron*: ilimitado). No resulta fácil comprender la resistencia de la matemática griega a introducir el infinito actual si no tenemos presente el carácter negativo a que alude ἄπειρον. Anaxágoras (500 - 428 a.C.), que también se refirió a “lo ilimitado” para denominar el estado caótico original en el que no existía nada porque aún no habían sido concebidas las formas, dedicó su vida a reflexionar sobre la materia y sus componentes; fue Aristóteles quien introdujo el término *homeomerías*, o partes *homeómeras*, para interpretar la teoría de Anaxágoras y representar con él elementos infinitesimales caracterizados por diferentes propiedades. Pero, a diferencia de los átomos de Demócrito, para Anaxágoras tales elementos no son partículas materiales indivisibles que impidan la fragmentación indefinida de los cuerpos sino que ellas mismas son divisibles hasta el infinito; nunca pueden llegar a ser aislados porque nunca hay una cantidad tan pequeña que ya esté compuesta de un sólo ingrediente. En palabras del propio filósofo: […] *dentro de lo pequeño, en efecto, no existe lo mínimo, sino que siempre hay algo menor, ya que no es posible que el ser no sea.* Y añadía: *Pero es que también dentro de lo grande hay siempre algo mayor, y es igual a lo pequeño en cantidad, dado que cada cosa en relación consigo misma es grande y pequeña* (Bernabé, 1988). Como podemos ver, en Anaxágoras, las ideas de infinito y de infinitesimal ya están estrechamente relacionadas.

---

1. Para Anaximandro la materia primordial, origen del mundo, ya no era como para Tales el agua sino otra a la que designa con un término poco explícito: ἄπειρον (ápeiron), esto es, con la sustantivación de un adjetivo que significaba “lo que carece de límite” y que había servido tradicionalmente para designar no tanto lo que realmente carecía de límites, sino aquellas realidades, como el mar, cuyos límites se hallaban más allá de lo que se quiere o se puede determinar con precisión. El problema es si, con el uso de esta palabra, el filósofo mantiene su valor tradicional o se refiere a algo que realmente carece de límites. En todo caso, se trata de un vocablo carente de una identificación positiva, que se refiere a algo “que no se parece a nada de lo que conocemos”, falto de definición en términos más concretos. Es por esta falta de precisión del término griego por lo que se traduce habitualmente como “indefinido” (Bernabé, 1988)

Por su parte, Tannery, citado por Zellini (1991), considera que Anaximandro hizo derivar el ἄπειρον en lugar de πέραζ de πεὶρα, que significa conocimiento o experiencia, transformándolo de ese modo en *lo incognoscible*, *lo insondable*; también para Aristóteles, lo que no tiene límite, πέραζ, no es representable exhaustivamente en nuestro pensamiento, como por ejemplo el conjunto de los números, y por lo tanto su naturaleza es incognoscible. La dificultad que plantea el infinito radica pues en su *inagotabilidad*; esto supone una primera definición del infinito: cualquier conjunto de objetos es ilimitado si sucede que, al tratar de identificar uno a uno sus elementos, no se logra formar un todo ya que siempre quedará un elemento que no habremos considerado. Para Aristóteles (a) *el infinito no es aquello fuera de lo cual no hay nada, sino aquello fuera de lo cual siempre hay algo;* sin embargo, en algún rincón de esa inagotabilidad de lo ilimitado se debe encontrar la razón que justifique la diferenciación de las formas; si se divide indefinidamente un cuerpo será imposible llegar a elementos constitutivos elementales e indivisibles, pero puede que en el curso de la división se encuentre, a un nivel casi infinitesimal, alguna imperceptible diversidad que permita distinguir la generación de unas forma u otras.

No al margen del enfrentamiento filosófico y de su desarrollo epistemológico, es de destacar la presencia de procesos infinitos y de métodos infinitesimales en algunos de los problemas clásicos de la Época Heroica de la Matemática correspondiente a buena parte del siglo V anterior a nuestra era. Así, el problema de Delos sobre duplicación del cubo, la razón áurea y la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado, que suponen la proporción entre magnitudes inconmensurables, las paradojas de Zenón que cuestionan el movimiento, y sobre las que nos detendremos en un apartado posterior, la cuadratura del círculo, verdadero precedente de los métodos infinitesimales y el tratamiento de la indivisibilidad sugerido por Demócrito se dirigen al núcleo del concepto que tratamos.

Aristóteles (383 - 322 a.C.) se interesó profundamente por el infinito incluso considerando que era un tema delicado a causa de las paradojas de Zenón. Se dio cuenta que no era fácil rechazar o aceptar la existencia del infinito ya que ambas decisiones engendraban sus propias paradojas. Para eludir este dilema, diferenció dos tipos de infinito, el *infinito potencial* y el *infinito actual*. Para la mayoría de la gente, el infinito matemático es concebido por oposición: el infinito frente a lo finito, a lo completo, a lo acabado. Así, se considera que un conjunto es finito si se pueden enumerar o contar todos sus elementos. Por el contrario, el conjunto de los números naturales es infinito porque no se puede completar la enumeración de sus elementos; se trata de un *infinito potencial*, un infinito en potencia y no en acto, un infinito que no existe en la realidad, pero que podría existir si el tiempo no nos estuviese contado. Consideremos ahora un segmento de recta finito OA. El número de puntos de este segmento ¿es finito o infinito?; la respuesta es menos evidente que para un segmento que se extienda sin límite. Si el número de puntos es infinito, este segmento es un *infinito actual*, ya que es un conjunto formado por una infinidad de componentes, los puntos, y debemos reconocer la existencia del infinito de otra manera diferente a la potencial, lo que significa prestarse a la crítica ya que esto significa reconocer que lo finito puede contener a lo infinito. Así, podemos considerar que hay un número infinito de puntos y que el segmento de recta es un infinito actual; es decir, un infinito que existe de hecho y moverse entre paradojas como mostró Zenón. O bien podemos pensar que el número de puntos es finito. Esta fue la elección de los pitagóricos y de este axioma se desprendía su teoría de las proporciones y el papel de los números en el universo. Aristóteles intentó superar el problema considerando que el segmento de recta es infinitamente divisible; el segmento no está dividido sino que es divisible. Así se puede considerar que este proceso de división es un infinito potencial, no un infinito actual evitando la cuestión de saber si la recta finita comporta un número finito o infinito de puntos. Además, la divisibilidad infinita de un segmento da siempre segmentos y no puntos, como la división del tiempo que siempre da intervalos de tiempo y no instantes. Para Aristóteles, el infinito no puede existir más que como potencialidad, su única concepción aceptable es la de un devenir, un proceso sin fin.

Para la escuela eleática el principio fundamental era el de la unidad y permanencia del ser; el cambio y el movimiento eran meras ilusiones de los sentidos. Este punto de vista contrastaba profundamente con las ideas pitagóricas de multiplicidad y cambio que suponen que el espacio y el tiempo pueden ser imaginados como constituidos por puntos e instantes, pero tanto el espacio como el tiempo también están dotados de otra propiedad conocida como *continuidad*, que es más fácil intuir que definir. Pitágoras, como Platón, es *finitista*. Los elementos últimos que forman una pluralidad se suponía, por una parte, que tenían las características de la unidad geométrica, el punto, y por otra, las características de las unidades numéricas o de los números. La relación entre punto y recta abrumaba a los griegos y llevó a Aristóteles a separar ambos conceptos. Pese a que admitía que los puntos estaban sobre rectas, mantenía que una recta no puede estar formada de puntos y que lo continuo no puede construirse a partir de lo discreto. Esta distinción contribuyó también a la presunta necesidad de separar el número de la geometría, ya que los números eran discretos, mientras que la geometría trataba de magnitudes continuas[2]. Puesto que recelaban de los procesos infinitos, omitieron el proceso del paso al límite; así, al aproximar un círculo mediante un polígono se contentaban con hacer que la diferencia fuera menor que cualquier cantidad dada previamente, pero se exigía que fuera siempre estrictamente positiva. De esta manera, el proceso queda claro para la intuición; el paso al límite, por otra parte, habría llevado consigo la consideración de lo infinitamente pequeño.

El dominio del número siguió conservando las propiedades características de lo discreto, pero el mundo de las magnitudes continuas, que incluía la mayor parte de la matemática prehelénica y pitagórica, era una cosa separada del número y tenía que ser tratada, por lo tanto, mediante métodos puramente geométricos. La doctrina pitagórica de que "los números constituyen el universo entero" se encontraba enfrentada a un problema realmente muy serio pues parecía que era la geometría más bien que los números la que regía el mundo. Como hemos señalado, para Aristóteles los enteros positivos son potencialmente infinitos; ahora bien, la mayor parte de las magnitudes no pueden ser ni siquiera potencialmente infinitas porque si se añadieran de una manera indefinida podrían exceder los límites del universo. El espacio, sin embargo, sí es

2. Rescatemos los argumentos de Aristóteles en contra del continuo: *Lo continuo, synechés, es una subdivisión de lo contiguo; así, por ejemplo, digo que una cosa es continua con otra cuando sus límites que se tocan entre sí llegan a ser uno y lo mismo [...] pero si los extremos son dos no puede haber continuidad. Según esta definición, resulta evidente que la continuidad pertenece a aquellas cosas en las que en virtud de su naturaleza llega a haber una unidad por contacto. Y así como lo continuo llega a ser uno, así también un todo será uno [...] Es evidente que lo sucesivo es primero, porque lo que está en contacto está necesariamente en sucesión, pero no todo lo que está en sucesión está en contacto. Por eso hay también sucesión en cosas que son anteriores según la razón, como en el caso de los números, entre los cuales no hay contacto. Y si hay continuidad tiene que haber necesariamente contacto, pero si sólo hay contacto todavía no hay continuidad; porque no es necesario que los extremos de las cosas que están juntas se unifiquen, pero si se unifican tienen que estar necesariamente juntos [⋯] De ahí que, aunque el punto y la unidad tengan una realidad separada, como dicen algunos, el punto no puede ser lo mismo que la unidad, pues a los puntos puede pertenecerle el contacto, pero a las unidades sólo la sucesión; además, siempre puede haber algo "entre" los puntos, pues toda línea está entre puntos, pero no es necesario que lo haya entre las unidades, pues no hay nada entre el uno y el dos*.

potencialmente infinito en el sentido de que puede ser subdividido indefinidamente, y el tiempo es potencialmente infinito en los dos sentidos.

El denominado método de exhaución de Eudoxo[3] (408 - 355 a.C.) utiliza el infinito del único modo previsto por Aristóteles, evitando cualquier consideración que se refiera a una presunta existencia actual del mismo; sin embargo, a pesar de su gran éxito práctico -Arquímedes recurrió a él en numerosas ocasiones-, no resolvió los problemas más importantes relacionados con el infinito; el propio examen de este método acaba por permitir abrirse a una concepción distinta del infinito. El sofista Antifonte (siglo V a.C.), por ejemplo, creía poder hallar un cuadrado cuya área fuese igual a la de un círculo dado basándose en la evidencia de que son indistinguibles el arco mínimo de circunferencia y el segmento mínimo de recta; corolario de la demostración era la existencia en acto de infinitos objetos distintos. Así, es posible inscribir en un círculo un polígono regular con un número de lados arbitrariamente grande y como, además, se puede construir un cuadrado cuya área sea igual a la de cualquier polígono regular queda demostrada la conjetura. En los polígonos de Antifonte se puede detectar una especie de orden teleológico cuya causa final inalcanzable es en cierto modo la circunferencia circunscrita; ésta supone un límite que comprendería la sucesión ilimitada de los polígonos, aun no constituyendo su término efectivo, es decir, una solución a la indefinida potencialidad del desarrollo de la sucesión *fuera* de ésta. Esto significa que es posible representar concretamente la solución final de un proceso ilimitado sin renunciar al carácter potencial de éste: la *inagotabilidad* de lo ilimitado sigue siendo un hecho irrenunciable, pero no obliga por ello a limitarse a una simple aproximación de lo que se quiere alcanzar. Pensemos, por ejemplo, en la suma de una serie infinita convergente cualquiera: se trata de un límite que se puede concretar en un ente matemático perfectamente definido pero que no pertenece a la sucesión indefinida de las sumas parciales que tienden a él. El límite no es un término de la sucesión y no es, por lo tanto, una mera aproximación al resultado que se quiere alcanzar; se llega a él renunciando al análisis indefinido de la sucesión que lo antecede y situándose en un punto de referencia externo que resulta invisible a quien se limite a la comprobación de su indefinida *lejanía* e *inalcanzabilidad*.

Pero ¿hubo en el pensamiento clásico alguna alusión a la posibilidad de actualizar el infinito absolviéndolo así de la negatividad de su ser meramente potencial? En principio, hemos de recurrir a los intentos atomistas de determinación de un *minimun*, es decir de un infinitesimal dado en acto capaz de resolver el devenir ilimitado de la divisibilidad del continuo. Acuden entonces a la mente las alusiones de Platón a una intuición atomista del espacio, o bien los átomos de Demócrito (460-371 a.C.) y Leucipo (480 a.C.) y los *cacumina* de Lucrecio[4] (98-55 a.C). Pero las teorías de Demócrito y Leucipo se atenían a la materia, y la dureza, densidad y solidez de sus partes elementales no pretendían representar la esencia de lo que habría cabido denominar un *infinitesimal*. Los átomos eran pequeños, pero no infinitamente pequeños. Parece, pues, más fácil

3. El nombre de *método de exhaución* no lo utilizaron los antiguos griegos, sino que es una desafortunada invención moderna introducida en el siglo XVII por Gregoire de St. Vincent (1584-1667)

4. *La división de la materia tiene / límites invariables y precisos / ····· / La extremidad de un átomo es un punto tan pequeño que escapa a los sentidos; debe sin duda carecer de partes: / él es el más pequeño de los cuerpos / ··· / Además, si nosotros no admitimos / de división un término preciso, / se compondrán los cuerpos más pequeños / de infinidad de partes, caminando / de mitad en mitad al infinito / ¿Qué diferencia habrá de un cuerpo grande / al cuerpo más pequeño? Suponiendo / que el todo es infinito, sin embargo, / de partes infinitas igualmente / se compondrán los átomos más breves: / convencido es preciso que confieses / que los simples corpúsculos terminan la división y solidez eterna.*

hallar una alusión implícita a los “infinitesimales” en los intentos de Antifonte de cuadrar el círculo. Pero Aristóteles mantuvo la ausencia de fundamento de las razones invocadas por Antifonte: el conjunto de los polígonos inscritos en la circunferencia es evidentemente un conjunto ilimitado, en el sentido de que para cada polígono con un número arbitrariamente grande de lados muy pequeños existe un polígono sucesivo de lados aún más pequeños, el cual a su vez no coincidirá con la circunferencia sino que admitirá después de él un polígono ulterior. Así mismo, un segmento no *está compuesto* por infinitas partes -actual- sino que *es divisible* infinitas veces -potencial-. Del mismo modo que lo ilimitado, esto es el *ápeiron*, no admite término final alguno sino únicamente un desarrollo indefinido, el conjunto de los polígonos no puede comprender un término concluyente que coincida con la circunferencia. En realidad, sostenía Aristóteles, los matemáticos no tienen ninguna necesidad de introducir magnitudes actualmente infinitas en sus demostraciones. A su vez, en este época, existe confusión entre finito y definido por una parte y entre infinito e indefinido por otra; por ejemplo, el número de granos de arena de nuestro planeta está mal definido pero es necesariamente finito y en lo que se refiere al infinito bien definido podemos pensar en el conjunto de los naturales. En *El Arenario* Arquímedes (287-212 a.C.) contradice la noción, frecuente en su época, de que el número de granos de arena sea infinito o demasiado grande para ser evaluado[5].

Otro de los argumentos desarrollados por Aristóteles para recusar la posibilidad de un infinito actual es el siguiente. Supongamos que existe realmente una sustancia o un principio, como pensaban por ejemplo los pitagóricos, cuya sola esencia sea la de ser un infinito. Para Aristóteles la definición de un ente agota su realidad; dicho de otro modo, la definición y la realidad de una tal sustancia son una y la misma cosa. Si el infinito es una sustancia divisible, ¿cómo definir sus partes? Cabría responder que así como ninguna parte de una sustancia como el aire puede ser definida sino como aire, una parte del infinito-sustancia no puede ser definida, a su vez, sino como lo infinito. Resulta de aquí que el infinito sería divisible en infinitos. Llegado a este estadio, Aristóteles concluye lacónicamente: “pero es imposible que la misma cosa sea varios infinitos”. Muchos fueron los autores que entendieron el argumento de imposibilidad de la siguiente manera: si un todo es infinito y una parte de este todo es también infinita, entonces, siendo el todo necesariamente mayor que su parte, tendríamos un infinito más grande que un infinito, lo cual es absurdo. Referido al marco conceptual fijado por Aristóteles, este “absurdo” significa que el infinito no es una entidad, sino un *proceso de incompletitud*; ahora bien, en tal caso no tiene sentido alguno darle tratamiento de cantidad, ni establecer distinción entre diversos infinitos, ni la comparación de infinitos, ni siquiera su manipulación como forma. Aristóteles considera que la creencia en la realidad del infinito se fundamenta principalmente en cinco razones:

- En el *tiempo*, pues es infinito.
- En la *división de las magnitudes*, pues los matemáticos también hacen uso del infinito.
- Si hay *generación y destrucción incesante* es sólo porque aquello desde lo cual las cosas llegan a ser es infinito.

5. En realidad, Arquímedes escribe *El Arenario* para demostrar que con su notación numérica puede nombrar cualquier número por grande que sea. Por otra parte, esta noción se halla presente en la literatura griega; por ejemplo, en el siglo V antes de nuestra era, Píndaro escribía en su *Segundo Canto Olímpico*: […] *pero la arena escapa al cálculo: así, de las alegrías que este hombre ha dado a los demás, ¿quién podrá decir el número?* La idea se halla presente también en la Biblia, en la que hay más de una veintena de referencias a la no numerabilidad de la arena.

- Porque lo finito encuentra siempre su límite en algo, de manera que si una cosa está siempre necesariamente limitada por otra, entonces *no podrá haber límites últimos.*
- Porque al *no encontrar nunca término en nuestro pensamiento*, se piensa que no sólo el número es infinito, sino que también lo son las magnitudes matemáticas y lo que está fuera del cielo.

Entre las definiciones del Libro V de los *Elementos* de Euclides (hacia el 300 a.C.), encontramos una, la cuarta, de sumo interés para nuestro trabajo. Afirma los siguientes: *Se dice que hay razón entre dos magnitudes cuando se puede multiplicar cada una de ellas de manera que exceda a la otra*. Esto significa que hay razón entre a y b si algún múltiplo entero de a es mayor que b y algún múltiplo entero de b es mayor que a. Con esta definición queda excluido un concepto que apareció más tarde, el de una cantidad infinitamente pequeña y no nula, a la que se llamó infinitésimo, ya que no cabe razón entre dos magnitudes si una de ellas es tan pequeña que ninguno de sus múltiplos entero excede a la otra. También excluye magnitudes infinitamente grandes, a las que no superaría ningún múltiplo entero de la cantidad menor. Esta es esencialmente una formulación del llamado *axioma de Arquímedes*, que el propio Arquímedes atribuyó a Eudoxo. En notación actual diríamos que

para todo real m > 0 y para todo real M, existe un natural N tal que N · m $ M

Intuitivamente, si consideramos una colección de objetos de tamaño *m*, por pequeño que sea, es evidente que los números

$$m,\ m+m,\ m+m+m,\ \dots$$

acabarán por superar cualquier número natural, por grande que sea. Ahora bien, *m* puede ser tan pequeño que desafíe la imaginación y podamos incluso dudar de esta última afirmación.

Euclides asume los puntos de vista de Aristóteles y evita escrupulosamente el infinito. Así, en su definición 23 de los *Elementos* establece que:

> Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente[6] en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos

Es claro que no deseaba emplear una expresión que implicase al infinito actual, como por ejemplo *prolongadas hasta el infinito*. Euclides no se refería a rectas sin fin, sino a segmentos de recta extensibles a longitudes arbitrarias, según supone en el postulado 2[7]. Esta noción de infinito potencial -las rectas consideradas finitas, reservándose la posibilidad de extenderlas al infinito- constituye una extrapolación razonable de la experiencia. La noción opuesta, la de infinito actual, según la cual existen realmente rectas de longitud infinita, es metafísicamente diferente; exige a la imaginación un cierto grado de audacia. Este intento de evitar una afirmación directa acerca de líneas rectas paralelas infinitas hizo que Euclides enunciara el axioma de las paralelas de una forma mucho más complicada. Consiguió que, al hablar de esta manera, este axioma perdiera la evidencia de los nueve restantes y hay buenas razones para pensar que evitó usarlo mientras pudo. Estrechamente relacionada con el problema del postulado de las paralelas está la cuestión de saber

6. Aquí la expresión *eis ápeiron* se debe tomar en el sentido adverbial indicado, no como si designara una región o apuntara hacia un lugar (“al infinito”).

7. *Postulado 1:* Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera*Postulado 2:* Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.

si el espacio físico es infinito. Euclides usa el postulado 2, pero solamente para obtener longitudes finitas grandes -por ejemplo en el libro I, proposiciones 11, 16 y 20-. Herón aporta nuevas demostraciones de estos teoremas y evita prolongar las líneas, con el fin de salir al paso de las objeciones de cuantos negaran que el espacio se pudiera abarcar por extensión.

Por otra parte, en la última de las nociones comunes de los *Elementos*, la octava, leemos “y el todo es mayor que la parte” que contrasta con la intuición de Anaxágoras. A su vez, en el Libro IX de los *Elementos*, Euclides nos ofrece una proposición de aritmética de gran alcance: *Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos*; expresado de otro modo: “el conjunto de los números primos es infinito”. Se encierran en esa expresión dos hechos muy ilustrativos. En primer lugar, se observa que el teorema está enunciado de forma tal, que no es preciso aludir al infinito en acto, respetando de nuevo la limitación aristotélica de aceptar sólo el infinito en potencia. Por otra parte, el conjunto de los números primos es una parte propia del conjunto de los números naturales y, sin embargo ambas, la parte y la totalidad, son infinitas; ahora bien, de acuerdo con la noción común de Euclides arriba enunciada, el todo debería ser mayor que la parte. ¿Es posible que haya *tantos* números primos *como* números naturales? El primer estudioso que se dio cuenta de lo absurdo -lo paradójico- de esta situación fue Galileo. A pesar de la concepción de no admitir el infinito actual, la geometría euclidea implica necesariamente que el conjunto de los puntos de una recta es infinito, porque “entre” dos puntos siempre se puede encontrar otro ya que la operación que consiste en tomar el punto medio de un segmento se puede repetir indefinidamente.

Así, el término infinito tuvo, para los diferentes pensadores griegos, un amplio valor significativo con una gama de matices que conviene resumir (Filep, 2001 y 2003):

	Aumento *-mediante suma-*	**Disminución** *-mediante división-*
Actual	No hay nada fuera de él Existe el más grande Existen la línea y el número infinito	No hay nada dentro de él Existe el más pequeño (átomo) Existen el número y la línea de átomos (punto = unidad) La divisibilidad infinita de una línea es imposible
Potencial	Siempre queda algo fuera No existe el más grande La línea puede construirse indefinidamente pero no existe la línea infinita No existe el número más grande	Siempre queda algo dentro No existe el más pequeño (para magnitudes) No existe la parte más pequeña de la línea, puede dividirse indefinidamente

Para los números, es decir para cantidades discretas, el infinito actual por disminución fue aceptado por consentimiento común: la unidad es el número más pequeño. También hubo consenso sobre la existencia del infinito potencial por disminución tanto para cantidades discretas como continuas. Arquitas expresó esto diciendo

> …si yo estuviera fuera, digamos en el cielo de las estrellas fijas, ¿podría extender mi mano o mi bastón hacia fuera o no? Supongamos que poder hacer esto no fuese absurdo; Podríamos entonces, de la misma manera, alcanzar de nuevo el exterior y así sucesivamente y si hay siempre un nuevo lugar que el bastón puede alcanzar esto implica evidentemente que se trata de una extensión sin límite (Heath, 1981).

Por su parte, Moreno y Waldegg (1991) efectúan el siguiente análisis sobre los diferentes usos y significados de la palabra “infinito” en el pensamiento griego:

- Como *nombre* aparece sólo en relatos de tipo mitológico, teológico o metafísico: “Infinito” pertenece al ámbito de los dioses.
- Como *adjetivo* que describe a un nombre se utilizaba sólo cuando este último tenía características de un absoluto, como el Universo, el Ser, el espacio o el tiempo.
- Como *adverbio* de modo se utilizaba para definir *acciones* (mentales) tales como extender, subdividir, continuar, añadir, aproximar, etc. Y este significado está asociado con el infinito potencial, es decir, con aquellos procesos que se pueden continuar indefinidamente.

Como adverbio, el infinito está ligado a la idea de *proceso* y, por lo tanto, su presencia no puede explicitarse más que como base del *modus operandi* que, como es bien conocido, constituye el núcleo del Análisis. Por otra parte este aspecto del carácter con que se dotó y usó el infinito impidió el desarrollo hacia una conceptualización actual del infinito. Fue preciso enfatizar el significado del infinito como adjetivo para obtener su status alcanzado en el siglo XX; para esto se hizo necesario generar nuevos objetos conceptuales a los que se pudiese adjudicar el atributo infinito; estos nuevos objetos fueron los conjuntos; ya no se hablará del infinito en sí, sino de “conjuntos infinitos”. Es así como el infinito pasó de ser considerado una categoría filosófica a entenderse como un objeto matemático inmerso en una estructura formal.

Plotino (205-270 d.C), el pensador neoplatónico más importante, defendía la realidad metafísica del infinito actual. Mientras que estaba de acuerdo con Aristóteles en que no existe el infinito actual en la esfera de lo sensible, afirmaba la realidad del infinito actual en una esfera trascendente sólo accesible a través de la intuición mística. Para San Basilio el Grande (330-379 d.C.) el infinito se convierte en sinónimo de la completitud de la divina perfección y desde este momento el infinito será citado en relación con los atributos divinos y los filósofos intentarán demostrar, de diferentes maneras, tal cualidad del ser supremo. San Agustín (354-430 d.C.) estuvo influenciado por Plotino y Platón e integró el platonismo y el neoplatonismo en el cristianismo. En su obra *La ciudad de Dios* admite el infinito actual de los números naturales. Mantiene que si Dios tuviese un poder creativo ilimitado, sería difícil creer que no pudiese concebir algo más grande que cualquier número sin importar su tamaño: *Dios conoce todos los números de una manera actual. El infinito actual se encuentra en la mente de Dios*.

Desde el siglo V va creciendo la diferencia entre el infinito filosófico y el infinito matemático. En la antigüedad, el *horror infiniti* culminó en los escritos de Boecio (480-524), quien llegó a hablar de lo ilimitado como de un monstruo de malicia, *malitiae dedecus*, no sostenido por principio alguno, huidizo siempre a cualquier definición. Por su parte el infinito en metafísica y en la filosofía religiosa se percibe siempre positivamente; de hecho se llega a designar con términos tales como Eterno, Absoluto, Todo, Uno, etc.

1.2. LAS PARADOJAS DE ZENÓN. DIVISIVILIDAD Y PLURALIDAD.

Los argumentos de Zenón han proporcionado, de alguna manera, la base a casi todas las teorías del espacio y el tiempo y del infinito que se han construido desde sus días hasta los nuestros. No resultará ocioso, por lo tanto, dedicar un pequeño espacio a su comentario.

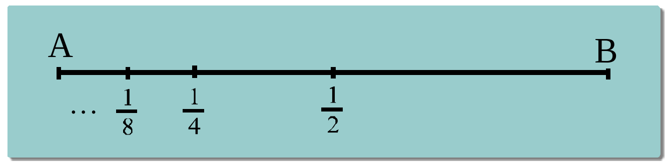
Como ya hemos visto, los pitagóricos habían tomado, a diferencias de los filósofos jónicos, una dirección más abstracta suponiendo que el número en su plural multiplicidad era la sustancia básica que se oculta tras los fenómenos; este atomismo numérico fue precisamente sobre el que se centró el ataque de sus vecinos los eleáticos, un movimiento filosófico rival. El principio fundamental de estos era, por el contrario, el de la unidad y permanencia del ser (Boyer, 1994 y Salmon, 2001). El más conocido de los discípulos de Parménides fue Zenón de Elea (s. V a.C.), quien pretendía defender a su maestro atacando a sus críticos. Parménides rechazaba el pluralismo y la realidad de cualquier tipo de cambio: para él todo era una realidad indivisible e invariable y cualquier apariencia de lo contrario era mera ilusión. Zenón puso en evidencia el problema de la relación entre lo discreto y lo continuo y planteó una serie de argumentos para demostrar la inconsistencia de los conceptos de multiplicidad y de divisibilidad. El método adoptado por Zenón era el método dialéctico, una auténtica innovación en la historia del pensamiento, que consiste en partir de las premisas que defiende el oponente para terminar reduciéndolas a un absurdo. No sabemos exactamente lo que dijo Zenón por lo que nos vemos obligados a apoyarnos en citas de Aristóteles, que menciona a Zenón con objeto de criticarlo, y de Simplicio que vivió en el siglo VI d.C. y que basaba sus afirmaciones en los escritos que debía poseer de Aristóteles.

Zenón intentó evidenciar los absurdos que se desprendían si se negaban las tesis de Parménides. ¿Crees que hay muchas cosas?, entonces debes concluir que ¡todo es a la vez infinitamente pequeño e infinitamente grande! ¿Piensas que el movimiento es infinitamente divisible?, pues entonces de ello se sigue que ¡nada se mueve! Esto es los que se denomina *paradoja*: una demostración en la que a partir de hipótesis aparentemente razonables se sigue una contradicción o una consecuencia absurda. Las paradojas de Zenón ponen de relieve algunos problemas que no se han podido resolver sin los recursos matemáticos generados a los largo del siglo XIX y posteriores. No se puede concluir que el trabajo de Zenón haya tenido una influencia directa sobre la historia de las matemáticas pero sí nos ha transmitido el tipo de preocupaciones que existieron. No obstante, mientras se desarrollaban las matemáticas, y se meditaba sobre las paradojas, surgieron nuevas dificultades que requirieron nuevas matemáticas para su resolución; tales dificultades surgieron como respuesta a la evolución de nuestra comprensión sobre qué es el rigor matemático: soluciones que podían satisfacer los estándares de rigor de Aristóteles no nos satisfarían ahora a nosotros.

Las cuatro paradojas sobre el movimiento son distintas, pero el argumento fundamental consistía, probablemente, en las cuatro consideradas en bloque. En la época en que vivió Zenón había dos concepciones opuestas del espacio y del tiempo: una, que el espacio y el tiempo son indefinidamente indivisibles (Anaxágoras), en cuyo caso el movimiento resultaría continuo y "liso"; y la otra, que el espacio y el tiempo están formados por pequeños intervalos indivisibles, en cuyo caso el movimiento consistiría en una sucesión de minúsculos saltos espasmódicos (Pitagóricos). Los argumentos de Zenón están dirigidos contra ambas teorías, las dos primeras paradojas contra la primera, y las otras dos contra la segunda. La primera paradoja de cada pareja considera el movimiento de un único cuerpo, y la segunda el movimiento relativo de un cuerpo con respecto a otro.

Aristóteles formula en su *Física* la primera paradoja, llamada de la *Dicotomía*:

> Zenón formuló cuatro supuestos sobre el movimiento que han producido gran perplejidad en cuantos han intentado resolverlos. Según el primero, el movimiento es imposible, porque lo que se moviese tendría que llegar a la mitad antes de llegar al término final (Aristóteles, b).



Esto es, el movimiento es imposible porque, si el espacio es divisible hasta el infinito, un móvil que parte del punto A para llegar al punto B tendrá que recorrer antes la mitad de la trayectoria, pero para que eso sea posible tendrá que alcanzar antes la mitad de la mitad, y así *ad infinitum*; Zenón apela aquí al hecho de que cualquier distancia, por pequeña que sea, puede dividirse por la mitad ; esto supone que debe haber un número infinito de puntos sobre la línea, con lo que el móvil tendría que recorrer un número infinito de puntos y así alcanzar el final de algo que esencialmente no tiene final, lo cual es imposible en un tiempo finito. El argumento parece suponer que *la suma de un número infinito de tiempos finitos tiene que ser infinita*, por lo que el proceso no se acabaría nunca. Para su refutación Aristóteles nos remite a *233a21*: no es lo mismo infinito en divisibilidad que infinito en extensión. Recurre, pues a su célebre distinción entre lo potencial y lo actual; como dirá en *263a28*: "en un continuo hay un número infinito de mitades, pero sólo en potencia, no en acto". Es decir, Aristóteles lo interpreta como que no se puede tocar un número infinito de puntos *uno por uno* en un tiempo finito[8].

La realidad de los hechos es que quien viaja a una velocidad constante recorre la unidad de longitud en un tiempo finito. Así pues, con la noción matemática de límite cabe pensar que se dispone de una especie de solución a la paradoja, resolviendo la indefinición del *ápeiron*, que haría inagotable la sucesión de longitudes. Aun conservando en sí la idea de un proceso y de una potencialidad ilimitada, el límite tiene la capacidad de resolver esa potencialidad en una unidad formal. Grünbaum (1969) demostró que la aplicación de la teoría aritmética de los límites a la solución de la paradoja se justifica por la estructura métrica del tiempo físico. La consciencia humana del tiempo admite un límite inferior de perceptibilidad, o un umbral mínimo más allá del cual los intervalos temporales se diluyen en una pequeñez inimaginable, pero ese *minimum* insuperable es una cantidad arquimedeana: sumado consigo mismo infinitas veces da un resultado infinito; por consiguiente, la contemplación mental de toda la sucesión se resolvería en la imposibilidad de un período ilimitado de tiempo. Zenón, al suscitar la duda acerca de la

8. La expresión *uno por uno* tiene su importancia:
(1) Si *todos* los puntos tocados están relacionados, entonces, aunque pases a través de ellos continuamente, no los puedes tocar todos uno a uno; es decir, tras tocar uno, no hay otro que sea el siguiente: no existen dos puntos contiguos sino que siempre hay un número infinito entre dos cualesquiera de ellos, los cuales no pueden ser enumerados uno a uno.
(2) En cambio, si sólo se tienen en cuenta los puntos medios obtenidos mediante la división repetida del trayecto, sí se pueden alcanzar *uno a uno* y, aunque sean un número infinito, pueden alcanzarse en un tiempo finito. Su argumento, por el contrario podría suponer que un tiempo finito está formado por un número finito de instantes, en cuyo caso lo que quiere decir podría ser perfectamente cierto bajo la suposición de que la posibilidad de la dicotomía continuada no es rechazable. Si, por otra parte, suponemos que el argumento se dirige contra los partidarios de la divisibilidad infinita, debemos suponer que procede así: "los puntos dados por sucesivas mitades son infinitos y se alcanzan sucesivamente cada uno en un tiempo finito tras alcanzar el anterior; pero la suma de un número infinito de tiempos finitos debe ser infinito y, por lo tanto, el proceso no terminará nunca". Quizás sea esta la interpretación históricamente correcta, pero en esta forma, el argumento no es válido. Si la mitad del trayecto supone medio minuto y la cuarta parte un cuarto de minuto, la duración total será de un minuto.

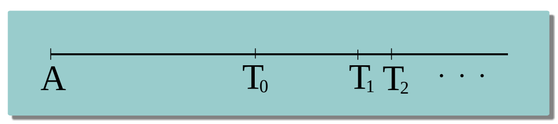
posibilidad de recorrer el intervalo (0, 1), explota en realidad la ilícita dilación implícita en la reducción de la sucesión

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

a los correspondientes actos mentales del proceso de contar, y no revela la circunstancia de que ese proceso no reproduce exactamente la métrica del tiempo físico conexo al recorrido efectivo. La existencia de un umbral de observabilidad es, por lo demás, un postulado más o menos explícito de la física o la psicología de la percepción. Aristóteles (b) también sostiene la existencia de un intervalo de tiempo mínimo necesario para la realización de una acción cualquiera: no es posible "infinitesimalizar" la vida concreta, so pena de incurrir en ambigüedades y de caer en el absurdo. Mediante la estratagema aritmética del "paso al límite" se obvia el riesgo de pensar uno a uno los intervalos y caer en el error de confundir dos duraciones incompatibles. La infinidad de los subintervalos en que es divisible la unidad de longitud tiene esta característica notable: está contenida enteramente en una totalidad limitada que puede constituir el objeto de una intuición empírica. De ese modo, una materia dada dentro de los límites de un cuerpo finito es visible y tangible enteramente, aun implicando la imposibilidad de un análisis exhaustivo de todos sus componentes.

La segunda paradoja lleva el nombre de *Aquiles* y según Aristóteles dice lo siguiente:

> El corredor más lento nunca podrá se alcanzado por el más veloz, pues el perseguidor tendría que llegar primero al punto desde donde partió el perseguido, de tal manera que el corredor más lento mantendrá siempre la delantera.

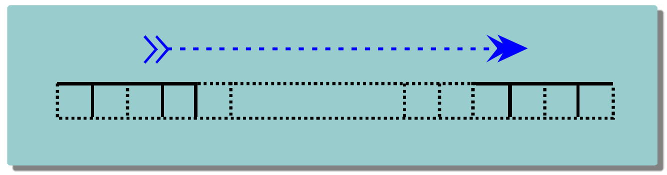


El argumento es similar al anterior y se le puede aplicar la misma crítica. Aquiles tendrá que recorrer un número infinito de puntos para alcanzar a la tortuga, pero esto es imposible porque para darle alcance tendría que transcurrir un número infinito de instantes desde el momento en que partieron. Ahora bien, de esto, que es verdad, no se sigue que un número infinito de instantes constituya un tiempo infinito, como tampoco que un número infinito de puntos constituya una extensión o líneas infinitas. Una vez más, como se dirá en 241a3, "el tiempo no está compuesto de instantes ni la línea de puntos ni el movimiento en acto de movimientos ya cumplidos". Zenón construye esta paradoja considerando que hay una infinidad de intervalos de tiempo; las distancias recorridas durante estos intervalos son cada vez más próximas a cero y pone de manifiesto su convicción intuitiva de que $4 \cdot 0 = 0$. Para refutar estos dos argumentos, Aristóteles construye la siguiente paradoja:

> Supongamos que se necesita un tiempo infinito T para recorrer una magnitud rectilínea AB, a velocidad constante. Sea ΔT una parte finita del tiempo T y AC la parte de la magnitud rectilínea recorrida durante este tiempo. Puesto que AC y AB son finitos y puesto que AC es una parte de AB, existe un múltiplo de AC que será mayor que AB. En consecuencia, el tiempo T será inferior al múltiplo del tiempo ΔT. Por lo tanto el tiempo T será finito, lo que es una contradicción.

Las dos primeras paradojas se han construido considerando que el tiempo y el espacio son infinitamente divisibles. Las dos paradojas siguientes se formulan tomando como hipótesis que tanto el tiempo como el espacio están constituidos por elementos indivisibles, según enseñaban los pitagóricos. Estas dos paradojas están dirigidas contra el movimiento "cinematográfico". La tercera, llamada de *La flecha*, nos la presenta Aristóteles como sigue:

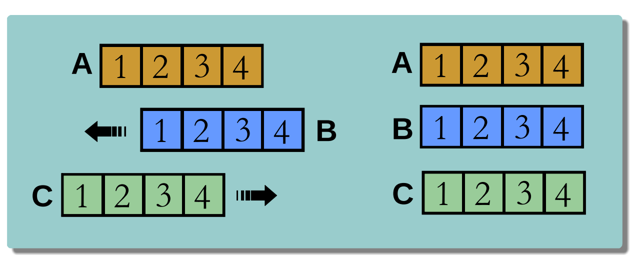
> El tercero pretende que la flecha que vuela está detenida. Esta conclusión sólo se sigue si se admite que el tiempo está compuesto de "ahoras", pero si no se lo admite la conclusión no se sigue.



El sentido común podría suponer que si en un instante la flecha ocupa una posición, en el instante siguiente ocupará otra; pero como ya se ha visto no hay un instante siguiente, pues, por muy próximos que podamos suponerlos, siempre habrá entre ellos infinitos instantes. Así, en cualquier instante durante su movimiento la flecha ocupa una posición determinada y, por lo tanto, está en reposo. En consecuencia, no puede estar en movimiento. Si la flecha se moviese durante ese instante tendría que ocupar un espacio mayor que el suyo propio. Aristóteles afirma que esta paradoja falla si no admitimos las unidades de tiempo indivisibles. En la formulación de esta paradoja, Zenón se sirve del hecho de que la percepción que se tiene del movimiento de la flecha no es a tirones, a intervalos, sino contínua. Pero este no es el caso, según él, si el tiempo y el espacio están constituidos de elementos indivisibles. Es sorprendente observar que en el cine no hay necesidad de una infinidad de imágenes para crear la ilusión de movimiento. Para su refutación, Aristóteles señala que esta paradoja es una consecuencia de la suposición errónea de que el tiempo está compuesto de instantes. Un instante no tiene duración y ningún movimiento puede tener lugar en un instante.

La cuarta paradoja, llamada del *Estadio* o de las *Filas en Movimiento*, la formula Aristóteles con estas palabras:

> El cuarto argumento supone dos series contrapuestas de cuerpos de igual número y magnitud, dispuestos desde uno y otro de los extremos de un estadio hacia su punto medio, y que se mueven en dirección contraria a la misma velocidad. Este argumento, piensa Zenón, lleva a la conclusión de que la mitad de un tiempo es igual al doble de ese tiempo.



Consideremos tres filas de objetos, A, B y C ordenados como se indica en la primera posición de la figura. Mientras la fila A se mantiene en reposo las filas B y C se mueven en sentidos opuestos hasta que las tres se encuentran alineadas como se representa en la segunda posición. Entonces la mitad del tiempo puede ser igual al doble del tiempo ya que hasta encontrarse en la misma posición, B ha pasado sobre el doble de objetos de C que de A. Por lo tanto el tiempo que le lleva sobre C es el doble que el que le lleva pasar sobre A, pero el tiempo que les lleva tanto a B como a C pasar a la posición de A es el mismo. Es posible que Zenón intentara simplemente señalar que la velocidad es relativa. La velocidad de C relativa a B no es la misma que la relativa a A. O bien puede haber querido indicar que no hay un espacio absoluto al que referir las velocidades. Aristóteles dice que la falacia de Zenón consiste en suponer que las cosas que se mueven con la misma velocidad emplean el mismo tiempo en adelantar a un objeto en movimiento y a un objeto fijo. Ni el argumento de Zenón ni la respuesta de Aristóteles son claros, pero si suponemos que la paradoja consiste en un ataque a los intervalos mínimos indivisibles y a los segmentos mínimos indivisibles de espacio, que es lo que Zenón intentaba atacar, entonces su argumentación tiene perfecto sentido.

Resumiendo, para refutar los argumentos de Zenón, Aristóteles busca en primer lugar explicar que el continuo no puede ser una suma de indivisibles, es decir que una línea no puede estar formada por puntos y que un intervalo de tiempo no puede estar constituido de instantes. Basa su razonamiento en el hecho de que un punto, como un instante, no tiene extremos porque un extremo no es de la misma naturaleza que aquello donde se halla el extremo. Así, un punto es el extremo de una línea, y es de naturaleza diferente a la línea. El instante es un extremo de un intervalo de tiempo y difiere de este por la misma razón. Llama continuo a “lo que es divisible en partes siempre divisibles”. La línea es infinitamente divisible y el intervalo de tiempo es infinitamente divisible. Son, por lo tanto, continuos. El punto y el instante no son divisibles porque no son magnitudes. En efecto, según él, el límite es indivisible y la cosa limitada es divisible. Para poder refutar las paradojas, Aristóteles distingue por lo tanto el punto que es indivisible de la línea que es un continuo. El punto es el límite de una línea y el límite es indivisible. De la misma manera, distingue el instante, que es un indivisible, del intervalo de tiempo, que es un continuo. El instante es el límite de un intervalo de tiempo y no representa una duración.

Según Fischbein, el argumento global de las paradojas de Zenón se basa en la idea de que el tiempo es, en sí mismo, divisible en fragmentos pequeños; pero el concepto de división del tiempo se toma prestado del modelo de espacio. Psicológicamente, el tiempo es *uno*, es continuidad. Lo que podemos dividir indefinidamente es el espacio sustituto, el espacio como metáfora del tiempo. Mientras que podemos imaginar un segmento compuesto por una cantidad infinita de puntos, no podemos imaginar el movimiento compuesto exclusivamente por una infinidad de instantes en reposo. Este es el problema de las paradojas de Zenón. La *metáfora del espacio* se halla tan profundamente inmersa en nuestro lenguaje, en nuestra lógica, que no sentimos ninguna discrepancia cuando hablamos y razonamos en términos de tiempo y espacio.

Podemos eludir todas estas paradojas manteniendo que, aunque el espacio y el tiempo están compuestos por puntos e instantes, el número de ellos en cualquier intervalo finito es infinito, o bien negando que el espacio y el tiempo están compuestos por puntos e instantes en absoluto o bien rechazando la realidad del espacio y del tiempo. Parece que Zenón mismo, como seguidor de Parménides, se adhería a esta última afirmación. Numerosos filósofos le han seguido durante los siglos posteriores; muchos otros, como Bergson, han preferido negar la descomposición del espacio y el tiempo en puntos e instantes. Pero las dificultades también aparecen admitiendo la existencia de números infinitos. Así, independientemente del espacio y el tiempo, los números infinitos y las series en las que no hay ningún par de términos consecutivos deben ser admitidas. Consideremos, por ejemplo, todas las fracciones menores que 1, ordenadas por su magnitud. Entre cualesquiera dos de ellas hay otras, por ejemplo la media aritmética de ambas. Por lo tanto, no existen pares de fracciones consecutivas y el número total de las mismas es infinito; en consecuencia la mayor parte de lo que Zenón afirmaba respecto a las series de puntos sobre una línea puede aplicarse igualmente a las series de fracciones. Las dificultades del infinito son de dos tipos, de los cuales el primero de ellos puede denominarse “fraude” o “falsedad”, mientras que las otras implican, para su solución una cierta cantidad de pensamiento nuevo y no siempre fácil.

Siguiendo el camino abierto por Russel, algunos filósofos, entre ellos el más notable fue Grünbaum, emprendieron la tarea de mostrar cómo las matemáticas modernas podrían resolver todas las paradojas de Zenón. Lo que observaron fue que una solución puramente matemática no era suficiente: las paradojas no sólo cuestionan las matemáticas abstractas, sino también la naturaleza de la realidad física. De manera que lo que buscaban era un argumento para que los planteamientos de Zenón no sólo no amenazaran las matemáticas del infinito, sino que las matemáticas describiesen correctamente los objetos, el tiempo y el espacio. La idea de que una ley matemática -al estilo de la ley de Newton de la gravitación universal- pudiese o no describir correctamente las cosas es familiar, pero algunos aspectos de las matemáticas del infinito -la naturaleza del continuo, la definición de sumas infinitas, etc- parecen resistirse al hecho de que parecen aplicarse de manera contingente. Esto es lo que hicieron: nada garantiza *a priori* que el espacio tenga la estructura del continuo o incluso que las partes del espacio se puedan sumar de acuerdo con la definición de Cauchy (la mezcla de alcohol y agua, por ejemplo, da un volumen inferior a los dos volúmenes de partida). Nuestra creencia de que la teoría matemática del infinito describe el espacio y el tiempo se justifica a partir de las leyes de la física y de que estas leyes vienen confirmadas por la experiencia. Mientras que es cierto que casi todas las teorías físicas suponen que el espacio y el tiempo tienen la estructura del continuo, también es cierto que las teorías cuánticas de la gravedad implican que no es así. Mientras no sepamos dónde nos conduce finalmente esta investigación es muy posible que el espacio y el tiempo vuelvan, en el nivel más fundamental, a ser bastante diferentes del continuo matemático que hemos supuesto hasta ahora. Black introdujo el término *máquinas infinitas* con el que tanto él como sus seguidores deseaban mostrar que aunque las paradojas de Zenón ya no ofrecían problemas a las matemáticas, después de todo las matemáticas no eran aplicables al espacio, al tiempo y al movimiento. Más concretamente, nuestra resolución de la Dicotomía y de Aquiles suponía que el trayecto completo podía partirse en series de infinitas mitades que podían sumarse. Pero ¿es realmente posible completar cualquier serie infinita de acciones para completar lo que llamamos una *supertarea*? Si no es así y suponemos que Aquiles puede completar su tarea, su trayecto completo no puede describirse correctamente como una serie infinita de mitades, aunque las matemáticas modernas puedan describirlo así. Lo que las máquinas infinitas pretenden establecer es que una serie infinita de tareas no puede completarse o lo que es lo mismo que cualquier tarea completable no se puede partir en un infinito de tareas más pequeñas como sugieren las matemáticas.

1.3. INTERLUDIO MEDIEVAL - RENACENTISTA.

Los primeros debates provocados por la teoría de Aristóteles tuvieron un punto de partida teológico. Juan Filopón, un pensador cristiano de Alejandría (490-566), se encuentra en el origen de numerosos argumentos dirigidos contra la idea de la eternidad del mundo. Estos argumentos, que utilizan las propias definiciones de Aristóteles al respecto del infinito, se proponían invalidar las conclusiones de éste sobre la infinitud del tiempo para justificar la idea de un mundo creado por la voluntad soberana de Dios. Si el mundo no hubiera tenido principio, escribirá Filopón, se tendría que afirmar que el número de hombres engendrados hasta los tiempos de Sócrates tendría que ser infinito; más al agregar el número de hombres engendrados desde Sócrates hasta hoy se obtendría "algo más grande que el infinito". Otra de las paradojas enunciadas por Filopón: cuando el Sol completa una revolución, la Luna ha efectuado 12; suponiendo que el mundo no tuviera principio, es preciso admitir, de una manera u otra, que las revoluciones del Sol son infinitamente numerosas y que, por consiguiente, las revoluciones de la Luna representan un infinito doce veces más grande que otro infinito, otro "absurdo". Las críticas de Filopón tuvieron un eco considerable en las tradiciones griega, árabe, hebrea y latina e hicieron nacer una multitud de argumentos derivados. Por ejemplo, ciertos teólogos musulmanes opusieron a los filósofos árabes aristotélicos un argumento que hizo fortuna en la escolástica medieval. Supongamos que el mundo no tuviera principio; entonces el número de almas separadas de sus cuerpos tras la muerte, y que sobrevivirán eternamente a este cuerpo, constituye un número infinito, un infinito actual; ¿no hay ahí una contradicción en el razonamiento de los filósofos aristotélicos, que debería obligarles a reconocer que la tesis de la eternidad del mundo es, filosóficamente, insostenible?

Tampoco faltaron quienes adoptasen unos principios *infinististas* que les condujeron a poner en tela de juicio la totalidad del dispositivo conceptual aristotélico. Tal es el caso de Thabit ibn-Qurra (Levy, 2001). En uno de sus numerosos textos, al término de largos desarrollos consagrados al problema del conocimiento divino, Thabit ibn-Qurra (826-901) es invitado por su discípulo a comentar el argumento, tan frecuentemente invocado en los debates sobre el infinito, según el cual *un infinito no puede ser mayor que otro infinito*. El argumento que se expone es tan claro como innovador. Es la primera vez, que tengamos conocimiento, en que se bosqueja una auténtica aritmética del infinito a partir de las propiedades aritméticas del número entero. No se producirá una formulación matemáticamente coherente sino mil años después de Thabit, con los trabajos de Georg Cantor y su teoría de los transfinitos. Para Thabit es del todo evidente que "hay un número infinito" y que se trata ciertamente de un infinito actual. No se enuncia claramente ninguna definición de esta noción, pero comprendemos, no obstante, que la infinita multiplicidad de las especies numéricas -ahora diríamos, la infinitud del conjunto de los números enteros- se identifica con la naturaleza misma "del número en sí" -hoy diríamos "de la infinitud de lo numerable"- Dando ahora respuesta como matemático al argumento clásico "un infinito no puede ser más grande que otro infinito", o con otras palabras "es absurdo enunciar relaciones de orden respecto de lo infinito", Thabit replica que es perfectamente posible dar sentido matemático a una tal relación de orden. La proeza operatoria de Thabit consiste, por hablar en términos modernos, en definir la "igualdad" de dos conjuntos infinitos -el de los números pares y el de los impares- por su equipotencia: el conjunto infinito de los números pares "es igual" al conjunto de los impares, porque a cada número par se le puede asociar un número impar y recíprocamente. A partir de ahí Thabit puede concluir que los enteros pares representan la mitad de todos los enteros: hay tantos enteros pares como enteros impares y mediante esta partición quedan agotados todos los enteros. Al afirmar que el infinito de los enteros es "doble" que el infinito de los enteros pares, Thâbit invalida el argumento en discusión[9]. Así, Thabit no llega a poner en tela de juicio el axioma según el cual "el todo es mayor que cualquiera de sus partes". El infinito de los números enteros, tomado

9. Va incluso más lejos al generalizar la observación relativa a los números pares y a los impares mostrando un infinito "igual" a un tercio del infinito de los enteros. Los enteros de la forma 3p que tienen la misma infinitud que los enteros de la forma 3p+1 y que los de la forma 3p+2; esto le permite dividir el conjunto de los enteros en tres infinitos "iguales". La igualdad ingenua, la que pasa por una enumeración inaplicable al infinito, ha sido reemplazada por otro tipo de comparación que permite la evaluación de las relaciones de proporción entre "el número en su totalidad" y algunas de sus partes.

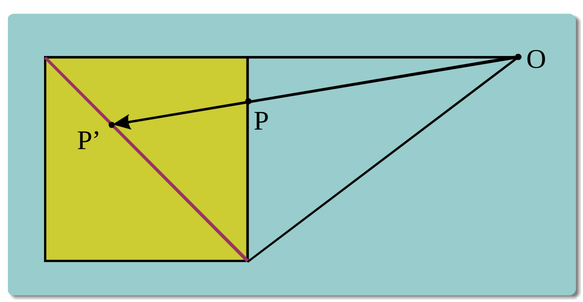
como un todo, sigue siendo más grande que el infinito de los enteros pares, puesto que es el "doble". Thabit no dice que haya "tantos" números enteros como pares, en la medida en que podemos hacer corresponder biunivocamente un número par a todo número entero y recíprocamente. Por eso mismo no es necesario ver en Thabit un "precursor" de Cantor para valorar el interés del pensamiento sabio árabe. Su audacia fue que no sólo "operó" con los infinitos, confiriéndoles así un estatuto que la tradición aristotélica les negaba, sino que al hacerlo, amplió la noción misma de número y el marco conceptual constitutivo de esta tradición[10].

La perspectiva teológica logra discernir en todos los acontecimientos naturales una operación divina, y por lo tanto un infinito actual. Esa misma perspectiva contribuyó a transformar la sinonimia mal cósmico-infinito en alusión directa a una infinitud positiva; en la Edad Media, las primeras señales de ese cambio se descubren en las tesis de Duns Scoto sobre el estado de gracia infinitamente grande de Cristo, en los argumentos demostrativos de Gregorio de Rímini en favor del infinito categoremático, en las indagaciones escolásticas acerca de la "latitudo formarum", esto es, acerca de los grados de intensidad, mínima y máxima, de las cualidades y de las formas. En el séptimo tratado de las *Summulae logicales* de Petrus Hispanus, habitualmente identificado con Pietro Giuliano (1226-1277) que llegó a ser el papa Juan XXI, se enseña a entender el infinito de dos maneras diferentes: uno, designado con el término de "categoremático", debía expresar algo semejante al infinito actual, aunque sin identificarse con él; el otro, designado con el término "sincategoremático", debía expresar la idea contenida en el infinito potencial, privándola de la principal ambigüedad implícita en el empleo del término "potencia". Gregorio de Rímini y Buridán, precisaron la índole "abierta" del infinito sincategoremático, al igual que la repetitividad del puro infinito en que consiste: dada una cantidad finita, por grande que sea, existe una cantidad aún más grande. El infinito categoremático, en cambio, era el atributo de un sujeto que se plantease como "algo" mayor que cualquier magnitud finita susceptible de existencia. Fue un franciscano del siglo XIII, Ricardo de Middleton, uno de los primeros en reconocer que el Universo puede expandirse más allá de cualquier límite dado sin que ello deba implicar la idea de un mundo actualmente infinito. La condena de algunas de estas proposiciones fue, no cabe duda, de considerable importancia también para la utilización que en el futuro habría de hacerse, en la matemática, del infinito: el nacimiento de la cosmología moderna coincidió con las primeras transgresiones de la prohibición aristotélica de utilizar infinitos y cantidades infinitesimales en las demostraciones de geometría y aritmética.

10. Podemos considerar algunas otras interpretaciones orientales del infinito. En la mitología india, "ananta" designa a una inmensa serpiente que representa la eternidad, la vida, el infinito y la inmensidad del espacio. "L'asamkheya" por su parte representa *lo imposible de calcular, el innumerable, el número imposible de concebir*. Pero, los matemáticos indios concebían el infinito como el inverso del cero. Brahmagupta (628) designaba el infinito matemático por el término "khachheda", traducido como "la cantidad cuyo denominador es nulo". Bhâskara II o Bhâskarâchârya (1114-1185) designa el infinito matemático por "khahara" o "división por cero". Parece que para todos estos matemáticos el infinito es el resultado de un límite. Así, los indios habían asimilado en su mitología el cero, la vida, con el infinito, el universo, como entes asociados lo que les permitió concebir el infinito como la inversa de cero. La idea de infinito potencial se encuentra también en los escritos en lengua árabe. Los sabios de lengua árabe se interesan igualmente por el aspecto filosófico del infinito. Por su parte el matemático Ibn Al-Banna (1321) evoca la dualidad concreto/abstracto; "infinito significa que cuando se alcanza un límite, se puede siempre ir más allá". Esta es la forma potencial de definir el infinito que no parece una realidad sino un punto de vista del espíritu. Ibn Al-Banna debate sobre la división infinita: "La división de un cuerpo en partes, desde el punto de vista del espíritu, no tiene fin. Ahora bien, todo cuerpo concreto, fuera del espíritu, ve su división detenerse en una parte indivisible ya que está limitado por dos extremos. La existencia de este cuerpo se da a partir de una síntesis no por vía del análisis. Ahora bien, la síntesis de un cuerpo finito a partir de elementos infinitos es imposible; esto es, si toda parte es divisible, es que ha sido objeto de una síntesis. Resulta de ello necesariamente que el objeto finito no puede ser infinito, extendiendo la operación hacia el infinito".

Tomás de Aquino (1224-1274) negó la existencia del infinito actual, argumentando que si se pudiesen concebir simultáneamente todos los elementos de un supuesto conjunto infinito, de manera que formasen una totalidad actualmente definida, podrían ser contados uno a uno, con lo que inevitablemente serían un número finito y se produciría una contradicción. La omnipotencia divina fue extendida posteriormente, por algunos, a la creación de cantidades infinitas, mientras que la perfección divina aparecía designada mediante términos que aludían a su "totalidad", a su "plenitud", a su "eternidad", pero no a su ilimitación. Ésta era de exclusiva competencia del reino de la cantidad, y por consiguiente completamente ajena a Dios. Santo Tomás no se atrevió a seguir el planteamiento aristotélico y aceptó la tesis conforme a la cual "Dios es infinito, y eterno, e incircunscribible"; pero inmediatamente añade que el infinito puede ser de dos naturalezas opuestas: una remisible a la idea de forma y la otra a la idea de materia. La distinción entre ambos infinitos, que no se diferencia en el fondo de la distinción entre infinito potencial e infinitud actual, era de ese modo un motivo de conciliación entre la tesis cristiana de la infinitud de Dios y la tajante asignación aristotélica del infinito al principio material de la existencia. Para Santo Tomás el infinito del que se ocupan los matemáticos corresponde evidentemente al infinito potencial, al infinito *ex parte materiae*, y por consiguiente no es atribuible a Dios. Cuando se refiere al empleo que hacen los matemáticos del infinito, Santo Tomás repite lo que ya había afirmado Aristóteles: para las demostraciones de sus teoremas, el geómetra no precisa en absoluto del infinito en acto; le basta con cerciorarse de que es posible, en determinados casos, ir más allá de cualesquiera magnitudes o cantidades fijas asignadas de manera que pueda emplear el infinito, sin menoscabo alguno, limitándose al único significado consentido, esto es, al potencial. De la imposibilidad de un conjunto actualmente infinito procedía la finitud del ente con que se medía el conjunto, esto es, del número. Una vez definido un conjunto como agregado de unidades distintas, el número correspondía a una operación intelectual ulterior que enriquecía el conjunto con una medida y, por lo tanto, con un orden, precisando posteriormente el carácter formal de la posibilidad de concebirlo como un todo limitado. El conjunto es contado *per unum*, es decir, enumerando una a una las unidades singulares e indivisibles que lo constituyen. La última unidad contada determina el resultado final; así, el número final confirma en cierto modo la existencia del conjunto como totalidad actual, asignándole una existencia concreta fundada en la existencia efectiva y simultánea de todos los elementos numerados. El asociar el número con el concepto de medida, casi platónicamente entendida como criterio de organización demiúrgica del mundo, indujo a Santo Tomás a concebir el número infinito como noción contradictoria, carente de sentido, inútil y desorientadora para quienquiera que pretendiese captar en la perfección de la forma limitada la insondable perfección de Dios.

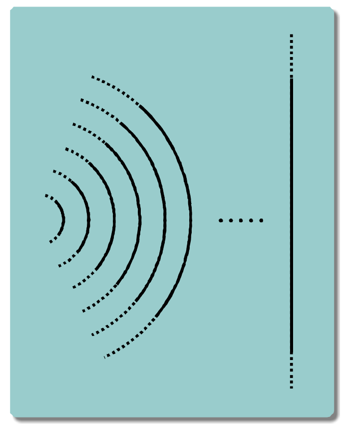
Bacon (1214-1294), en su obra *Opus Maius*, afirma que podemos establecer una correspondencia biunívoca, como diríamos hoy, entre los puntos del lado de un cuadrado y los de la diagonal del mismo cuadrado, aunque tengan diferentes longitudes. Bacon afirmaba que el infinito matemático en acto no es posible con la lógica: el todo no podía ser más grande que sus partes, lo que sería antieuclidiano y, en



consecuencia, antiraristotélico, actitudes ambas aún prohibidas. Guillermo de Occam (1280 - 1349), por su parte, establece en su *Questiones in quator libros sententiarum* que

> No es incompatible que la parte sea igual o no sea menor que el todo; esto es lo que ocurre siempre que una parte del todo sea infinita. Esto se puede comprobar en cualquier cantidad discreta o en cualquier multiplicidad cuya parte tenga unidades que no sean menores que aquellas contenidas en el todo. Así, el principio de que el todo es mayor que sus partes es válido sólo para cosas compuestas de partes enteras finitas.

Duns Scotus (1266-1308), a diferencia del resto de filósofos escolásticos sugirió que el infinito no sólo era potencial sino que también podía ser actual; argumentaba que era incorrecto pensar que un círculo estaba compuesto por un número infinito de puntos. Consideremos dos círculos concéntricos de diferente tamaño. Por una parte, *el círculo mayor tendrá más puntos* porque tiene una circunferencia mayor. Por otra, debido a que los puntos de *ambos círculos pueden emparejarse* mediante una correspondencia uno a uno, deberían tener el mismo número de puntos. Argumento tales como este ponían de manifiesto que el razonamiento sobre el infinito no era siempre completamente absurdo. Aunque las conclusiones pueden ser paradójicas, sugerían que quizás se podría aplicar la razón al infinito sin ser completamente contradictorio. La primera persona que demostró esta posibilidad y recondujo la corriente de pensamiento hacia el infinito matemático y filosófico fue Nicolás de Cusa (1401-1464) hasta quien llegó la gran influencia de Aristóteles en el siglo XV. Su primer y más famoso tratado, *De docta ignorantia*, es un discurso místico sobre lo finito y lo infinito. Su inspiración fundamental vino no de sus bastos conocimientos, sino de una iluminación mística en 1437 durante su regreso desde Constantinopla. Introduce una analogía matemática para explicar sus ideas metafísicas: al igual que un determinado polígono no puede medir al círculo continuo, nuestra mente finita no puede comprender el infinito. Nicolás enseñaba que, en el infinito, el círculo coincide con la línea, ilustrando esta paradójica afirmación mediante una secuencia de círculos de diámetro cada vez mayor. A medida que aumenta el tamaño de los círculos, la longitud de la circunferencia es menos curva y más parecida a una línea recta. Nicolás de Cusa sólo considera el infinito desde el punto de vista matemático y *confundió infinito con ilimitado y, a veces, con indefinido*. Nicolás de Cusa describió la infinitud actual como el máximo absoluto, definido como “lo que no puede ser más grande”, en que desaparece cualquier posibilidad de ulteriores aumentos y disminuciones: el verdadero infinito es la auténtica resolución del “más y menos”, del “grande y pequeño” con que Platón designó al infinito potencial (McFarlane, 1999).



El infinito esta permanentemente presente en el Renacimiento; no ya en el “universo numérico” sino en el mundo de la geometría y de las artes: Piero della Francesca (1406-1492) escribe su tratado matemático-pictórico *De Prospectiva Pingendi* y Girolamo Cardano (1501-1576) escribe el tratado *De Subtilitate*, sobre sutilezas, algo que nosotros llamaremos “magnitudes infinitesimales”. Las cantidades infinitesimales y las cantidades no arquimedeanas fueron reintroducidas en el uso matemático, lo que benefició a la innovación si bien fue en menoscabo de la corrección formal de las demostraciones. Así, el método de los indivisibles, que ya trató

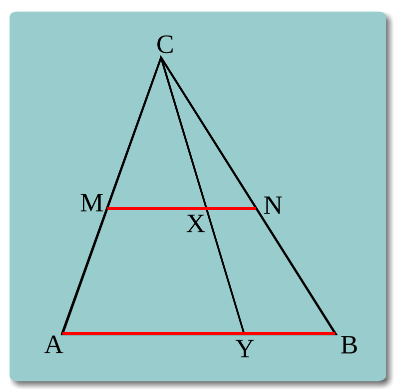
Arquímedes, fue desarrollado también por Leonardo, Luca Valerio, Galileo Galilei, Paul Guldin, Bonaventura Cavalieri y Evangelista Torricelli. Por su parte, Michael Stifel escribía en 1544 respecto a los irracionales: “no pueden ser verdaderos números aquellos a cuya naturaleza les falta precisión. Por lo tanto, al igual que un número infinito no es un número, un número irracional no es un verdadero número sino que permanece oculto en un tipo de nube de infinito”.

En el diálogo *De l’infinito, universo e mondi*, Giordano Bruno (1548-1600) esboza en cinco palabras la correspondencia paradójica entre la infinitud potencial a que nos fuerza nuestra imperfección y la infinitud actual limitadora que la encierra: la esencia divina es descrita en él como “término interminado de algo interminado”; posteriormente precisa: “Término, por ser diferente la infinitud de uno de la del otro”. ¿Y en qué consiste esa diferencia? Bruno llama

> al universo todo infinito, porque no tiene margen, término ni superficie; digo que el universo no es totalmente infinito, porque cada parte que de él podemos tomar es finita, y cada uno de los mundos innumerables que contiene es finito. Digo que Dios es todo infinito, porque excluye de sí cualquier término, y cada uno de sus atributos es uno e infinito, y digo que Dios es totalmente infinito porque todo él está en todo el mundo y en cada una de sus partes, infinita y totalmente: al contrario que la infinitud del Universo, la cual está totalmente en todo, y no en esas partes suyas... que nosotros podemos comprender en aquél.

La adhesión de Bruno a la infinitud del Universo no excluye nunca, en el fondo, el respeto por la tesis aristotélica de la inalcanzabilidad del tamaño actualmente infinito y del carácter de pura potencialidad de los infinitos concebibles por la razón.

1.4. ACTO FINAL: ACTUALIZACIÓN DEL INFINITO.



Galileo (1564-1642) menciona en varias ocasiones el infinito actual en su obra *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias;* según él, las líneas así como los objetos concretos que se encuentran en la naturaleza están formados por un continuo, infinito actual, de partes pequeñas. En sus consideraciones geométricas presenta un concepto de infinito que choca con la noción de Euclides de que *el todo es mayor que sus partes*; bastaría con dibujar un triángulo y observar que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de AB y MN, lo que está en claro contraste con la intuición común de que al ser la longitud de AB el doble que la de MN, debería está formado por un número de puntos mayor. También se hizo eco de la paradoja que surge al hacer corresponder a cada número natural su cuadrado, denominada *paradoja de Galileo.* Así la describe en el siguiente diálogo:

> *Simplicio:* Aquí surge inmediatamente una duda que me parece insoluble; y es que, estando nosotros seguros de que pueden darse líneas, una de las cuales es mayor que la otra, teniendo ambas infinitos puntos, hay que confesar que existe, en magnitudes de la misma especie, una cosa más grande que el infinito, puesto que la infinitud de los puntos de la línea mayor excederá a la infinitud de los puntos de la menor. Ahora bien, que se de un infinito más grande que el infinito, me parece algo totalmente absurdo.

> *Salviati:* Este tipo de dificultades proviene de los razonamientos que nosotros hacemos con nuestro entendimiento finito al tratar con los infinitos, otorgándoles los mismos atributos que damos a las cosas finitas y limitadas, lo cual pienso que es improcedente puesto que creo que las propiedades de mayor, menor o igual no convienen a los infinitos. Como prueba de ello, me viene a la memoria un argumento que propondré para ser más claro... Supongo que sabéis perfectamente cuáles son los números cuadrados y los no cuadrados.
>
> *Simplicio:* Se perfectamente que un número cuadrado es el que resulta de la multiplicación de otro número por sí mismo...
>
> *Salviati:* Muy bien... Si yo digo que todos los números, incluyendo cuadrados y no cuadrados, son más que los cuadrados, enunciaré una proposición verdadera, ¿no es así?
>
> *Simplicio:* Evidentemente
>
> *Salviati:* Si continúo preguntando cuántos son los números cuadrados, se puede responder con certeza que son tantos cuantas raíces tengan, teniendo presente que todo cuadrado tiene su raíz y toda raíz su cuadrado; no hay por otro lado, cuadrado que tenga más de una raíz ni raíz con más de un cuadrado.
>
> *Simplicio:* Así es
>
> *Salviati:* Pero si pregunto cuántas raíces hay, no se puede negar que haya tantas como números, ya que no hay ningún numero que no sea raíz de algún cuadrado. Estando así las cosas, habrá que decir que hay tantos números cuadrados como números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces son todos los números. Decíamos al principio, sin embargo, que todos los números son muchos más que todos los cuadrados, puesto que la mayoría de ellos no son cuadrados. Incluso el número de cuadrados va disminuyendo siempre a medida que nos acercamos a números más grandes...
>
> *Simplicio:* En este caso, ¿qué es lo que se deduce?

Y vemos que para Galileo el infinito no es susceptible de comparación y, por lo tanto, de aritmetización. También aborda en otro momento la divisibilidad indefinida de un segmento:

> *Salviati:* [⋯] Paso ahora a otra consideración y que es la siguiente: admitiendo que la línea, como toda magnitud continua [continuo], sea divisible en partes siempre divisibles, no veo cómo pueda dejar de reconocer que está compuesta de infinitos indivisibles, ya que una división y una subdivisión que se pueda proseguir siempre supone que las partes sean infinitas, pues de otro modo la subdivisión tendría un límite. Que las partes sean infinitas trae como consecuencia que no son extensas ya que infinitas partes extensas forman una extensión infinita. Así, pues llegamos a la conclusión de que las magnitudes continuas están compuestas de infinitos indivisibles.
>
> *Simplicio:* Pero si nosotros podemos proseguir indefinidamente la división en partes extensas, ¿qué necesidad tenemos de introducir, a tal respecto, las inextensas?
>
> *Salviati:* El hecho mismo de poder proseguir perpetuamente la división en partes extensas implica la necesidad de composición de infinitas partes inextensas. Es ésta la razón de que, para ser más precisos, os pida que me digáis con toda franqueza si las partes extensas en una magnitud continua son, según vuestra opinión, finitas o infinitas.
>
> *Simplicio:* Y yo os respondo que son finitas e infinitas. Infinitas en potencia y finitas en acto. Infinitas en potencia: es decir, antes de la división. Pero finitas en acto: después de la división. Pues no hay que pensar en todas ellas en acto, sino sólo después de que se las divide o señale. En caso contrario, se dice que están en potencia [⋯]

> *Salviati:* Parecería que esta distinción entre acto y potencia nos posibilita, por una parte, aquello que, por otra, sería imposible. Voy a tratar de ajustar estas partidas haciendo otro cálculo. A la cuestión de saber si las partes extensas de las magnitudes continuas finitas son finitas o infinitas, he de responder todo lo contrario de lo que ha dicho el señor Simplicio; o sea, que no son ni finitas ni infinitas.

Un paso esencial en el desarrollo de la ciencia moderna fue la integración de la aritmética y la geometría de Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665). En los fundamentos de la geometría analítica *se halla implícita la hipótesis de que existe un número asociado con cada punto* en el continuo del espacio geométrico. Pero, como demostraron los pitagóricos, no existen tales números asociados para ciertas magnitudes geométricas. Cualquier intento de expresar las coordenadas de ciertos puntos en forma numérica, tales como un desarrollo decimal, dan lugar a sucesiones infinitas. Aun así, la geometría analítica continuó desarrollándose con éxito. Descartes introdujo una distinción entre *infinito*, atributo propio de Dios, e *indefinido* utilizado para indicar magnitudes indefinidas en cantidad o en posibilidad. Por su parte, Pascal parecía defender el infinito actual:

> La unidad añadida al infinito no lo hace mayor; lo finito es aniquilado por lo infinito y se convierte en pura nada; sabemos que existe un infinito pero ignoramos su naturaleza. Conocemos la existencia y naturaleza de lo finito porque nosotros mismos somos extensos y finitos pero el infinito tiene extensión como nosotros pero no tiene fronteras por eso no conocemos ni la existencia ni la naturaleza de Dios.

La distinción que establece Descartes (b) entre infinito e indefinido refleja la posición tradicional entre infinitud actual e infinitud potencial, si bien los términos del problema aparecen levemente desplazados: lo “indefinido” no deja nunca de recordar la fatal imperfección del objeto terrestre que en sí aparece carente de límite; pero indefinida será, ahora, característicamente, la cosa que, aun siendo sin límites bajo cualquier aspecto, no está, pese a todo, exenta de toda limitación. Así, escribe:

> Sitúo aquí la distinción entre lo indefinido y el infinito. Y nada hay a lo que llame propiamente infinito salvo aquello en lo que por ninguna parte hallo límite alguno, sentido en el cual únicamente Dios es infinito. Pero a las cosas de las que no veo un fin únicamente bajo algún aspecto, como la extensión de los espacios imaginarios, la multitud de los números, la divisibilidad de las partes de la cantidad y otras semejantes las llamo *indefinidas*, y no *infinitas*, porque no carecen por todas partes de fin ni de límites.

Esta distinción no carece de un discreto contenido de novedad. También fue de los primeros en intuir el infinito desde perspectivas llamadas a desempeñar un papel preeminente en lo que después vendría. En una carta de 1630, Descartes (a), refutaba a Mersenne un argumento demostrativo bastante difundido acerca de la inexistencia de conjuntos infinitos. Mersenne se limitaba a exponer la observación de que una eventual línea infinita debería contener infinitos pies y además infinitas toesas, cada una de la cuales es 6 veces más grande que un pie. El conjunto infinito de toesas habría debido contener, pues, absurdamente, al igual que su subconjunto mismo, el infinito conjunto de pies, aun coincidiendo ambos con la línea infinita. La conclusión debía, pues, ser la siguiente: la línea infinita no puede existir, dado que, de existir, debería coincidir con cada uno de dos conjuntos infinitos, uno de los cuales sería mayor que el otro. Descartes aceptó sin rechistar la paradoja, pero negó que se pudiesen extraer las conclusiones que a Mersenne le parecían evidentes. La paradoja revelaba, en cambio, una característica previsible de todo conjunto que apareciese como infinito: la relación entre una toesa y un pie es un número *finito*, lo que hace a priori incompatible la observación de Mersenne con lo que al infinito y a sus leyes se refiere. En realidad, la objeción de Descartes era profunda y captaba uno de los nudos del problema, como demuestra el hecho de que dos siglos más tarde Cauchy aún expusiera la paradoja de Galileo, no muy diferente al ejemplo de Mersenne, para demostrar la inexistencia de conjuntos actualmente infinitos. Este ejemplo paradójico debía demostrar la imposibilidad de concebir los números enteros como un conjunto actualmente infinito. Pero la objeción de Descartes habría tenido, en tal caso, motivos para imponerse. Aquél no negaba la paradoja, sino que afirmaba que era una consecuencia ineludible del infinito: el infinito es paradójico justamente porque no se adaptan a él las leyes de cotejabilidad de lo finito.

En realidad, Galileo no defendió la existencia del infinito en acto pero no lo habría hecho con los argumentos de Cauchy. En la tesis de Cauchy estaba implícita la idea de que, para existir, el acto debía ser finito. Dedekind, por último, ideó darle la vuelta a la tesis de Cauchy, utilizando la paradoja, en lugar de como prueba de la inexistencia del infinito, como contenido esencial de su propia definición. Los conjuntos infinitos se convirtieron para Dedekind en los conjuntos que pueden ser situados en correspondencia biunívoca con sus cuadrados o con los números pares. La idea de Dedekind resultó, a fin de cuentas, indiscutible. Entre sus méritos se pudo vislumbrar también la refutación definitiva de la idea de que en un eventual objeto matemático que reprodujese el infinito se debería reconocer la característica de entidad "máxima". En realidad, ese posible malentendido ya había sido denunciado por Kant: el concepto de infinito no coincide con el de máximo sino que sólo puede concebirse como una relación con respecto a una unidad *tomada sin limitación alguna*, en el sentido de que es mayor que cualquier número dado de tales unidades. Su esencia consiste más bien en la capacidad de comprender y contener cualquier cantidad alcanzable mediante el puro mecanismo de contar. Hegel repetiría que se trata en tal caso de una relación, de una cualidad, no de una cantidad; no se puede entender el infinito indicando lo "grande" que es. El otro aspecto del infinito cuya comprensión y asimilación anticipó Descartes era una variante de lo que se denominó a partir de Leibniz "principio de continuidad". En una carta a Desargues, Descartes aprobó la idea de considerar un haz de rectas paralelas como un caso particular de un sistema de rectas que confluyen en un punto único. Si las rectas son paralelas, no hay duda de que se les puede atribuir una propiedad común, que cabría definir sin ambigüedad como su "dirección". Pero esa "dirección" también puede llamarse "punto en el infinito" para quien contemple la fuga en perspectiva de las rectas paralelas que se alejan indefinidamente por un fondo imaginario. La idea de dar el nombre de punto a una dirección se le ocurrió a Desargues precisamente por sus investigaciones sobre la perspectiva. El papel desempeñado por la perspectiva renacentista fue determinante, como observó Panofsky, para la aparición de una nueva noción de infinito. El tono de determinadas respuestas de Descartes a las objeciones que le formuló Mersenne hace ver que la paradoja de la infinitud no es ya motivo aceptable para proclamar su inexistencia. El infinito, aun experimentado negativamente como carencia de límite, se ha convertido en algo explícito y *positivo*, perdiendo definitivamente la característica originaria de sinónimo de la negación y del no-ser, que lo convertía en el ἄλογος por excelencia, en lo innombrable sin remedio. Ahora bien, ni en los escritos de Descartes, ni en los de matemáticos preleibnizianos como Kepler, Galileo, Fermat, Pascal o Cavalieri el empleo matemático del infinito apareció aún como un auténtico *mecanismo*, como cálculo. A pesar de ello, Cavalieri (1598-1647) fue el primero en adoptar respecto del infinito una posición que pudiéramos considerar moderna, a saber: que las magnitudes infinitas y las magnitudes finitas están gobernadas por leyes diferentes.

Hobbes (1588-1679) intentó defender la idea de un infinito potencial a la luz del descubrimiento de Torricelli (1608-1647) de una figura, el cuerno de Gabriel, cuya superficie tiene un área infinita pero cuyo volumen es finito. Locke (1632-1704) defendió la idea de infinito en el capítulo XVII de su *Ensayo sobre el Conocimiento Humano*. Dice que si consideramos una idea de algo de cualquier tamaño, encontramos que *podemos aumentarla* y mentalmente *añadir tanto como nos plazca y no hay razón para parar*. Al igual que la mayoría de los filósofos empiricistas, creía que no podemos tener una idea propia del infinito, sino que *todas nuestras ideas derivaban de datos de los sentidos* o bien "impresiones" y puesto que todas las impresiones sensoriales son inherentemente finitas, así ocurriría con nuestros pensamientos e ideas. Wallis (1616-1703), entre otras contribuciones, prosiguió el desarrollo de los procedimientos infinitesimales de Cavalieri y fue el primero en utilizar el símbolo infinito, 4, en cálculo, empleando los métodos analíticos de Fermat y Descartes de las series infinitas[11]. Desde el principio propuso una modificación del método de los indivisibles de Cavalieri; mientras que éste dividía las superficies en un número infinito de segmentos, Wallis las descomponía en un número infinito de paralelogramos de igual tamaño, tamaño que era "una fracción infinitamente pequeña, igual a 1/4 de la superficie total".

El siglo XVII aporta el cálculo infinitesimal que, como su nombre indica, maneja objetos infinitos; este cálculo no utiliza más que el infinito potencial -*tan grande como se quiera*-. Leibniz (1646-1716) y Newton (1642-1727) proporcionaron técnicas poderosas para resolver muchos problemas matemáticos que habían resultado imposibles de resolver. La idea de Leibniz más conocida es que el universo está compuesto de un infinito de indivisibles e inmateriales mónadas, siendo Dios la mayor de ellas. Leibniz creía en un infinito actual pero no en el sentido de Cantor. Estos extraños infinitesimales eran más pequeños que cualquier número positivo pero distintos de cero. A pesar de su notable éxito práctico, en el corazón del Calculus había paradojas y contradicciones que implicaban el cálculo de sumas infinitas de infinitesimales que misteriosamente daban números finitos, así como manipulaciones incoherentes y misteriosas de cantidades infinitesimales. Pero, puesto que el Calculus funcionaba, era evidente que algo de verdad debía tener; de alguna manera, Newton y Leibniz habían descubierto una sutil "lógica de la infinitud" que les permitía realizar maravillas matemáticas sin ser capaces realmente de proporcionar unos fundamentos rigurosos o racionales a sus métodos. Las técnicas de Newton y Leibniz implicaban inconsistencias pues, siguiendo los pasos de Cusa, garantizaban la existencia actual a lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, admitiendo que una sucesión infinita puede acabar en un límite actual. Leibniz retoma el ejemplo clásico de Galileo y escribe:

> ¿Quién puede negar que el número de todos los números contiene el número de los cuadrados que se encuentran entre todos los números? Contener significa siempre ser parte

---

11. Aún resulta una cuestión especulativa, pero parece que Wallis partió de una versión cursiva de la *m* (o M) latina que representa el número 1000 en cifras romanas; también se especula sobre la posibilidad de que Wallis hubiera pensado en la lemniscata. Un contemporáneo de Wallis, el matemático y filósofo holandés Bernhard Nieuwentijt, utiliza por su parte el símbolo "*m*" en su *Analysis infinitorum* de 1695, un símbolo cercano al futuro 4, que designa en dicha obra al infinito.

> y pienso que la proposición la parte es más pequeña que el todo es también verdadera en el infinito como en lo finito.

Y concluye, a diferencia de Galileo que mantiene que hay *un sólo* número infinito, que no hay número infinito porque es contradictorio. Leibniz no llega a realizar la confusión entre el infinito matemático y el metafísico, cosa que Cantor intenta hacernos creer. Leibniz fue de los primeros en advertir el riesgo de errores derivados del enfoque de las nociones actuales del infinito que adoptaron los matemáticos de los siglos XVII y XVIII; a pesar de ello, la disputa entre infinito actual y potencial continuó. La Academia de Berlín promovió una competición cuyo objetivo era aclarar el concepto de infinito; el ganador fue L'Huilier (1750-1840) que defendió un regreso al infinito clásico de Aristóteles contra la aceptación del infinito actual apoyada por Leibniz.

El asombro causado por la contemplación de lo infinitamente pequeño hizo escribir a Leibniz palabras reveladoras, de las que se pueden deducir bastantes cosas a propósito del sentido de sus innovaciones matemáticas. La definición de diferencial propuesta por Leibniz sugería la idea de una especie de fuerza primitiva. Merece la pena describir brevemente el procedimiento seguido por Leibniz. Si quisiéramos atribuir un nombre al mecanismo que ha hecho posible llegar al infinitesimal, nos veríamos obligados a invocar el principio de continuidad. Leibniz concibió más bien sus resultados como una especie de extrapolación al infinito de los conceptos referibles al cálculo de sucesiones finitas; y esos mismos resultados, al plantearse como la meta última de un recorrido ilimitado, eran la demostración visible de la existencia del infinito actual. Desde esa perspectiva, una curva podía ser considerada como una línea poligonal con un número infinito de lados; del mismo modo, una serie "discreta" de números era extensible al caso "continuo" de una suma infinita de diferenciales, esto es, a la integral concebida como actualidad infinita efectiva. A falta de una descripción más rigurosa de los resultados del Análisis mediante la idea de "paso al límite", Leibniz siguió hablando de los infinitesimales *dx* como de "ficciones" útiles para el arte de la invención matemática, como entidades imaginarias que no corresponden forzosamente a cosas actualmente existentes fuera de la mente que las concibe. Las técnicas del nuevo cálculo imponían "pasar por alto" los infinitesimales con respecto a las cantidades finitas ordinarias, y esa regla se convirtió luego en uno de los primeros axiomas que figuran en el primer libro sobre el cálculo infinitesimal, escrito a finales del siglo XVII por el marqués de L'Hôpital: *dos cantidades que difieren en un infinitesimal son iguales*. Es evidente, con todo, que dos cantidades que difieren en otra cantidad, por pequeñísima que ésta sea, no pueden ser iguales, salvo a costa de una contradicción lógica o de una aproximación; y es cierto que el cálculo infinitesimal *no* fue nunca un método de aproximación. La otra característica también era previsiblemente fuente de perplejidad. El denominado principio de Arquímedes estipulaba que cualquier magnitud, aun pequeñísima, sumada a sí misma un número suficiente de veces puede engendrar una magnitud arbitrariamente grande. En este sentido, el infinitesimal no era "arquimedeano", pues su empleo en el cálculo infinitesimal estipulaba que la multiplicación por un número finito arbitrariamente grande no alterase su característica de entidad próxima a cero: un infinitesimal multiplicado por cualquier número finito sigue produciendo un infinitesimal. No debe extrañar que la certeza de ver al infinito presente y actuante por doquier acabase por suscitar *la idea de designarlo como simple signo algebraico*. Y ésa fue probablemente la innovación más revolucionaria. Según la opinión de Robinson, padre del Análisis no Estándar, esa singular mezcolanza de permisividad lingüístico-aplicativa e incompatibilidad lógica que floreció basándose en las declaraciones de

Leibniz pudo empañar incluso la comprensión de las verdaderas intenciones de algunos de los matemáticos tradicionalmente situados en los inicios de la refundación del Análisis en el siglo XIX. Cauchy, por ejemplo, habló a menudo de infinitesimales y los empleó constantemente en las definiciones fundamentales. La desaparición paulatina del infinitesimal culminó en la obra de Weierstrass, pero después de él hubo varios intentos de recuperación por parte de Du Bois-Reymond, Stolz, Schmieden y Laugwitz y Skolem. Robinson, por último, remitiéndose principalmente a los trabajos de Skolem sobre los modelos no estándar de la Aritmética, enunció con tono de absoluta certeza que las ficciones de Leibniz *existían*. ¿Pero de qué *existencia* se trata realmente? Russel, por su parte, puso al descubierto la trama lógica de los argumentos de Leibniz, revelando sus ambigüedades y contradicciones y demostrando que sólo los métodos de la lógica matemática podían reformular correctamente el principio de los indiscernibles.

Casi todos los matemáticos del siglo XVIII realizaron algún esfuerzo o al menos se pronunciaron acerca de la lógica del cálculo infinitesimal, pero aunque uno o dos de ellos estaban en el buen camino todos los esfuerzos resultaron fallidos. La distinción entre un número muy grande y un “número” infinito difícilmente se hacía; si un teorema era cierto para todo *n* parecía claro que también lo era para *n* infinito. De manera análoga, un cociente incremental se reemplazaba por la derivada y una suma de un número finito de términos difícilmente se distinguía de una integral; los matemáticos pasaban de una a otra con toda libertad. Todo esto podría resumirse en la descripción de Voltaire del cálculo infinitesimal como “el arte de numerar y medir exactamente una cosa cuya existencia no puede ser concebida” según recoge Kline (1992).

La idea de que el tamaño puede medirse mediante una correspondencia uno a uno se conoce hoy en día como el *principio de Hume*, aunque Hume (1711-1776), como Galileo, creían que el principio no podía ser aplicado a conjuntos infinitos. Según Hume, se puede hablar legítimamente de la milésima o diezmilésima parte de un grano de arena y conseguir formarse una idea clara de tales números y de sus proporciones; pero las imágenes que la mente logra formarse del grano inicial y de las partes en que lo subdivide no son en realidad diferentes una de otra. La conclusión es evidente: “La idea de un grano de arena no es divisible ni separable en veinte, ni aun menos en mil, diez mil o un número infinito de ideas diferentes”. Hume propone además un experimento fácil: tómese un borrón de tinta en un papel y alejémonos manteniendo la vista fija en él; en un momento determinado, el borrón se volverá invisible por la excesiva distancia, pero cuando esté a punto de desaparecer aún será visible como “minimum” puntual e indivisible; al igual que en el caso de las ideas de la imaginación, se da un último término concebible, escribió, *en el de las impresiones sensoriales se pasa de la nada a una mínima actualidad perceptible e irreducible a partes más pequeñas*.

Kant (1724-1804) observó la distinción entre “progressus in infinitum”, como ocurre entre los infinitos por división de una totalidad empíricamente intuible y “progressus in indefinitum”, que no conoce limitación de especie, salvo la provisional que se le puede aplicar a cada paso, antes de pasar al paso sucesivo. Si se reduce por dicotomía un segmento unitario a partes cada vez más pequeñas, también los elementos más remotos de la división se hallan ya en realidad asignados y presentes en el todo aun antes de que esa misma división haya comenzado. Su existencia se da por descontada: está ya implícita en la pertenencia a una forma limitada en la que pueden ser hallados en el curso de un proceso que alcanza necesariamente a cada uno de ellos. Ambos son infinitos esencialmente potenciales, pero el "progressus in infinitum" posee el privilegio de admitir un límite que lo envuelve, y en eso se basa la naturaleza de toda verdadera infinitud que no es nunca un desarrollo incondicionalmente ilimitado, y es referible siempre a un orden formal, limitador. La otra infinitud, la de la magnitud del Universo, a menudo no fue considerada tal: la repetición de lo infinito, en que consiste, puede ser achacable justamente a lo que es finito, y no a lo que es infinito, de hecho Kepler afirmó que el Universo es finito. Kant predicó que el tiempo y el espacio no son entes concretos, sino categorías universales de nuestra intuición. Su propósito fue el de conducir nuestras especulaciones hacia los fenómenos finitos e inmediatos, renunciando a las inferencias metafísicas "a lo Platón". Desgraciadamente Kant, en un esfuerzo por dar coherencia a su pensamiento, subordina la realidad al entendimiento: no conocemos el objeto en sí, sino su manifestación fenomenológica. La contradicción de Kant es obvia como Hegel observó: Kant nos asegura que no podemos discutir la existencia de objetos fuera de los límites de nuestra razón, pero enseguida pasa a postular la existencia de dichos objetos.

Lagrange (1736-1813) intentó dar un fundamento riguroso al Cálculo reduciéndolo al Álgebra, eliminando toda referencia a los infinitesimales y a los límites. Cauchy seleccionó algunos conceptos fundamentales como límite, continuidad, convergencia, derivada e integral y estableció el concepto de límite como la base de todos los demás obteniendo rigurosamente los resultados más importantes del Cálculo.

El ejemplo paradigmático de rechazo del infinito que se ha venido manejando desde Cantor es un pasaje de Gauss en una carta de 1831 a Schumacher. Éste le había enviado un intento de demostración del postulado euclideo de las paralelas, y Gauss protesta, según cita Ferreirós (1992):

> Pero en lo que respeta a su demostración protesto ante todo contra el uso de una magnitud infinita como si fuera completa, cosa que nunca está permitida en la matemática. El infinito es sólo una *façon de parler,* cuando propiamente se habla de límites que se acercan tanto como se quiera a determinadas relaciones, mientras que a otros se les permite crecer sin limitación.

Aunque parece que estas frases tenían una intención bien concreta y no puede aplicarse sin más contra el infinito actual de la teoría de conjuntos. En cualquier caso, la forma de expresión utilizada por Gauss es muy tajante y no se restringe a una cuestión particular: toma como modelo la teoría de límites entendida sobre la base del infinito potencial, y realmente parece juzgar el asunto de forma totalmente general. No obstante, el rechazo idealista al mecanicismo de corte newtoniano trajo consigo una cierta vuelta a las posiciones de Leibniz y, en particular, revitalizó el planteamiento de la *Monadología,* que se basaba en una aceptación completa de lo simple, mónadas, y del infinito actual:

> Estoy en tal medida a favor del infinito actual, que en lugar de admitir que la naturaleza lo aborrece, como se dice vulgarmente, sostengo que la afecta por todas partes para mejor mostrar las perfecciones de su Autor. Así, creo que no hay ninguna parte de la materia que no sea, no digo ya divisible, sino actualmente dividida; y en consecuencia la menor partícula debe considerarse como un mundo lleno de una infinidad de criaturas diferentes. (citado en Ferreirós, 1992)

Jacob Steiner (1796-1863) representaba el enfoque sintético de la geometría proyectiva. Steiner resalta con claridad una y otra vez, en la parte dedicada a “nociones introductorias” la concepción de la recta, el plano, los haces de rectas, etc. como conjuntos de infinitos elementos. Se trata de una idea que estaba implícita en la geometría desde sus orígenes, y tarde o temprano se tendría que aceptar que las concepciones geométricas involucraban el infinito; pero justamente, desde Aristóteles se venía evitando considerar la recta como un conjunto de puntos, y se afirmaba que el continuo no puede considerarse como compuesto de partes no continuas. Encontramos en Steiner un punto de vista muy cercano al conjuntista, aunque lejos todavía de planteamientos generales y del estudio preciso de la noción de conjunto. Así, no sólo puede decirse que la geometría proyectiva preparó la aceptación del infinito actual en matemáticas, sino que -al menos en el caso de Steiner- introdujo quizá por vez primera planteamientos conjuntistas algo avanzados. Por otra parte, no cabe duda de que Dedekind y Cantor, al hablar de aplicaciones o correspondencias biunívocas tenían en la mente la importancia de esta noción para la geometría.

No fue hasta el siglo XIX en que Cauchy (1789-1857) y Weierstrass (1815-1897) dotaron de fundamentos rigurosos al Análisis. La esencia de su solución al problema fue prescindir de los infinitesimales y del infinito y, en su lugar, pensar en términos de relaciones entre cantidades pequeñas, pero finitas, que potencialmente podían hacerse arbitrariamente pequeñas. Así, aunque los polígonos nunca se convertirán círculos en un sentido actual, un polígono puede encontrarse tan cerca como queramos del círculo. Esto representa un retorno hacia la concepción potencial del infinito y la eliminación del infinito actual del Análisis. Pero aún quedaba un problema fundamental: ¿cómo podemos justificar el uso de números irracionales que no se pueden expresar en términos finitos? La solución la proporcionó Richard Dedekind (1831-1916) que se vio forzado a introducir formalmente el infinito del continuo en las matemáticas.

La obra de Bolzano *Las paradojas del infinito* (1851) abrió “oficialmente” la discusión sobre la posibilidad de introducir el infinito en las matemáticas como un objeto de estudio. El paso decisivo fue el de concebir el infinito como un atributo –un adjetivo- de una colección y no como un nombre o un adverbio. Bolzano necesitaba un nuevo concepto del infinito con el fin de resolver sus paradojas, un número considerable de las cuales habían surgido en su época, y la mayoría de ellas debidas a la ausencia de una buena definición y dominio operacional bien delimitado del infinito. Bolzano (1781-1848) entiende que la manera adecuada de referirse al concepto de infinito es vía el concepto de conjunto; desde entonces ya no se estudia “el infinito” *per se*, sino los “conjuntos infinitos”. Desde la segunda mitad del siglo XIX hasta nuestros días el infinito actual ha influenciado profundamente el pensamiento matemático. Bolzano no sólo es conocido por sus importantes e influyentes resultados sino también por sus errores:

> §18) si A es un conjunto y se sustraen algunos de sus elementos, entonces el nuevo conjunto tiene menos elementos que antes;
> §19) Puesto que la línea BR es mayor que la línea AR se deduce que hay infinitos de diferentes magnitudes;
> §40) Paradojas del concepto de espacio: dos segmentos de diferente longitud están formadas por diferente número de puntos.

Según Cantor, los problemas de Bolzano eran debidos a que la idea de cardinalidad de un conjunto aún no había aparecido. Bolzano establece una biyección del intervalo [0, 5] sobre el intervalo imagen [0, 12], pero estos dos conjuntos no pueden tener, según él, la misma potencia: “Es evidente que el conjunto de valores comprendidos entre 0 y 5 es infinito así como el de valores inferiores a 12; pero no es menos cierto que el segundo conjunto debe ser más grande que el primero, ya que es incontestable que es una parte del segundo”. De nuevo vemos resurgir el axioma de Euclides que Bolzano da por cierto. Sin embargo, a lo largo de sus *Paradojas*, Bolzano supera, por un instante, el axioma bimilenario al recoger las sucesiones de Galileo: “A pesar de toda apariencia contraria, las dos series [...] comportan, en efecto, *el mismo conjunto* de términos”. Bolzano no llega a resolver sistemáticamente las paradojas del infinito. Su voluntad de aceptar el infinito actual siempre está presente, pero el rigor no siempre le acompaña. Para él, decir de una cosa que es infinita es hablar “de una pluralidad no susceptible de ser determinada por un simple número”. Pero en tal caso tampoco es posible el cálculo sobre el infinito: “El concepto de un cálculo del infinito parece ser una contradicción en sí; querer *contar* algo es intentar determinarlo mediante números. Ahora bien, según nuestra propia definición, el infinito es un conjunto constituido por una infinidad de partes, es decir un conjunto más grande que cualquier número -un infinito potencial-. ¿Cómo queremos entonces intentar determinar el infinito mediante números?”. Bolzano, para analizar conjuntos infinitos de números reales, establece un criterio “métrico” de comparación al identificar los números reales con puntos de la recta; para él los conjuntos de puntos están cargados de significado geométrico, algo que aparecerá con frecuencia en las respuestas de muchos alumnos.

La idea principal que apoya el nuevo nivel de representación conduce al abandono de la concepción de un conjunto como resultado de un proceso constructivo. En su lugar, Bolzano adopta un concepto sintético de conjunto; es decir, un conjunto se concibe como un todo, sin necesidad de pensar separadamente en cada uno de sus elementos. El cambio en el papel del infinito de nombre o adverbio a atributo, proporciona evidencias de la presencia del nuevo nivel de representación en la obra de Bolzano que da lugar a un nuevo significado que transformaría al infinito en un objeto con un dominio operacional. Hay un punto esencial que distingue el trabajo de Bolzano y de Cantor: el criterio de comparación de conjuntos elegido. El de Bolzano se basa en relaciones de inclusión, opuesto al de Cantor que se centra en compararlos mediante una correspondencia entre ellos. La diferencia entre infinitos fue el punto de partida para el desarrollo de un dominio operacional. Bolzano definió varias operaciones entre conjuntos infinitos basadas en el criterio de comparación elegido. Sin embargo erró en su objetivo de aritmetizar el infinito.

Bolzano formuló la propuesta de que una clase de objetos fuera definible como tal prescindiendo de que fuese finita o infinita. Se adelantó a Cantor al considerar que a la idea de conjunto correspondía una verificación de coherencia mediante el principio aristotélico del tercio excluso: aunque sea infinito, un conjunto puede ser determinable por la circunstancia de que, en principio, cada uno de sus elementos posee o no una propiedad específica. Como más tarde haría Cantor, Bolzano puso su fe en la existencia del infinito actual, en la convicción de que el acto mental capaz de aunar en una unidad superior objetos separados y diferentes se hallaba de ese modo al abrigo de contradicciones lógicas. Los hechos desmentirían más adelante esta convicción, determinando a fin de cuentas una verdadera renuncia a todo intento de dar una definición general y directa del concepto de conjunto. Las ideas de Bolzano se adelantaron en varios decenios a todo un periodo del siglo XIX que se caracterizó por la invención de un lenguaje matemático que buscó hacer del infinito una totalidad actual y estática que no estuviese regida por el devenir temporal. Así, pretendió justificar, junto al infinito potencial o sincategoremático de las sucesiones infinitas, la infinitud actual de todos los subconjuntos de dichas sucesiones como colección cerrada de objetos existentes por sí mismos. Bolzano se adelantó a esta evolución al demostrar que los agregados se forman mediante operaciones sintéticas del pensamiento fuera del tiempo: si se habla del conjunto de los habitantes de Pekín, se especifica un conjunto perfectamente definido sin estar obligados a enumerar uno a uno, por separado, todos sus componentes. El método ε-δ de Weierstrass refleja esa mismo carácter estático. Los términos clave de su definición: *toda, existe, todos* sugieren totalidades infinitas y estáticas. Posteriormente, Cantor abordaría explícitamente el punto esencial: era la idea de tiempo la principalmente envuelta en esa perspectiva. La convicción de que el apriorismo kantiano era inatacable, al menos en la idea del tiempo, recibió un desmentido categórico (Vidal 2003). Así, a propósito de las relaciones entre continuidad y tiempo, Cantor estableció la clara prioridad de la idea del continuo. Escribió al respecto:

> Debo declarar ante todo que a mi juicio la introducción de la noción de tiempo o de la idea de tiempo no debe servir para explicar la noción, mucho más primitiva y general, del continuo; el tiempo, a mi parecer, es una idea que presupone, para ser explicada claramente, la noción de continuidad, independiente de la del tiempo, y que, aun con dicha noción de continuidad, no puede concebirse ni objetivamente como sustancia ni subjetivamente como una idea necesaria a priori; esa idea de tiempo no es más que una idea auxiliar y relativa.

La crisis del apriorismo kantiano esbozada en esas palabras desempeñó un papel decisivo en la matemática de finales del XIX, en particular si se considera que fue precisamente el desarrollo de una aritmética y de una geometría fuera del tiempo lo que permitió definir el infinito en términos estáticos, susceptible de convertirse en último término en una base matemática de la infinitud actual. "La serie de los números", escribe Cantor, "no debe construirse sobre la intuición del espacio y del tiempo; antes bien, el concepto de número, como *emanación directa de las leyes puras del pensamiento*, nos debe permitir por ver primera adquirir conceptos rigurosos y exactos en verdad de lo que es espacial y temporal". El tratado *De l'infini mathématique*, de Couturat (1896), fue una de las cimas de esa concepción estática del número y de la infinitud actual, propuesta como verdad inducida de los teoremas cantorianos e incluso de la ley de continuidad tal como había sido formulada a partir de Leibniz.

Que el reconocimiento de la inagotabilidad del infinito no ponía en tela de juicio los resultados de muchas demostraciones matemáticas fue establecido exhaustivamente en realidad a finales del siglo XIX por Weierstrass en el ámbito de una reformulación rigurosa de los principios del análisis. Se demostró entonces no sólo que el infinito podía ser entendido, sin mengua, en el sentido potencial sino también que la alusión a esa potencialidad podía ser suprimida mediante un lenguaje matemático que aludiese a cantidades simplemente finitas y eliminase sin más el uso explícito del término infinito.

Según Boyer (1994), Cauchy admitía el infinito potencial de Aristóteles. Junto con Gauss parece que sufrió de una especie de *horror infiniti*, insistiendo en que no podía haber en la matemática una cosa tal como un infinito actual. Interpretaba el infinito como indefinidamente grande, una variable que toma valores sucesivos que van aumentando. Sus expresiones "aproximarse indefinidamente" o "decrecer indefinidamente" evocan la idea de un proceso sin fin, es decir, del infinito potencial. La definición de límite de Weierstrass, en cambio, evita la idea de movimiento para la variable *x* y la expresión “indefinidamente” utilizada por Cauchy. Es una definición estática que elude la idea de infinito potencial.

Desde los días del viejo Zenón, los hombres no han cesado de hablar del infinito, tanto en teología como en matemáticas, pero nadie antes de 1872 habría podido decir con precisión de qué estaba hablando. Hasta la época de Cantor, el infinito siempre se entendió en un sentido numérico, como un tipo de número mayor que todos los números. Por supuesto que como a todo número le puede suceder otro mayor, simplemente no existe algo tal como *el número más grande*. Aún así, la esencia del infinito estaba asociada con algo muy grande o muy pequeño. Pero en dicho año apareció la definición de conjunto infinito de Dedekind en su obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. En 1874 Cantor demostraba, además, que no todos los conjuntos infinitos son del “mismo tamaño”, cosa que no parecía haber pensado Dedekind.

Bolzano, a pesar de ver la biyección, mantenía que de ésta no se puede deducir la igualdad entre el todo y una de sus partes. A pesar de ello intentó definir una “aritmética del infinito” pero no pudo culminar su plan al no contar con un concepto que “cuantificase” los conjuntos infinitos -el criterio que utilizó para comparar conjuntos es el de la inclusión-, como lo sería la cardinalidad de Cantor. Cantor traslada la operatividad de los números reales a los puntos de la recta, propiciando el desarrollo de una teoría de conjuntos lineales de puntos. Así mismo, ensaya con la correspondencia uno-a-uno entre dos conjuntos, como una extensión de los métodos finitos, resultando un método externo adecuado para comparar conjuntos, si bien el criterio de biyección no aparece de inmediato en su forma definitiva; establece así la relación de equipotencia entre conjuntos. El uso de la biyección entre los elementos de dos conjuntos refleja un cambio fundamental en el concepto de función. Las funciones manejadas en el contexto del cálculo de Cauchy son continuas, usadas en cierta forma como un instrumento que permite “medir” una magnitud con respecto a otra. El nuevo concepto de función también permite “contar” los elementos de un conjunto (Waldegg, 1988). Hasta Cantor sólo se distinguían dos tipos de conjuntos: finitos e infinitos; Cantor fue el primero en demostrar que existen varios tipos de conjuntos infinitos, irreducibles entre sí:

1. *Conjuntos numerables*. Equipotentes al conjunto de los números naturales. Cuando entre dos conjuntos se establece una aplicación biyectiva, el orden de uno de ellos se traslada al otro. $\mathbb{Q}$ es numerable; el conjunto de los números algebraicos es también numerable.

2. *No numerables*. Los racionales son densos pero el conjunto de los racionales no es continuo. Demostró la no numerabilidad de $\mathbb{R}$, con lo que surge un vínculo entre continuidad y no numerabilidad.

Cantor resolvió en el siglo XIX el problema del infinito actual. Lo que hizo fue usar sistemáticamente el concepto de correspondencia uno a uno para decidir sobre la equivalencia de conjuntos. Si comparamos dos conjuntos infinitos, ya no podemos contar sus elementos como hacemos con grupos finitos de objetos. Tenemos que determinar la equivalencia o no equivalencia de los dos conjuntos por medios formales (Fischbein, 1998). En 1883 Cantor podía afirmar que había llegado el momento de introducir una nueva especie de infinito, un infinito *propio*, es decir perfectamente determinado y por lo tanto actual. Los números transfinitos de Cantor fueron justificados por principios *a priori*, no por teoremas o hechos matemáticos; como en el caso de los números reales definidos por Dedekind, fueron algunos postulados y en definitiva un acto libre de creación quienes decidieron la existencia de los nuevos objetos:

> Ahora debemos mostrar cómo nos vemos llevados a las definiciones de estos nuevos números, y de qué manera se obtienen, en la sucesión de los números reales absolutamente infinita, las divisiones naturales que yo llamo *clases de números*. La serie de los números enteros reales positivos 1, 2, 3,..., n,... debe su formación a la repetición y a la agrupación de unidades que se han tomado por punto de partida y que se han considerado iguales: el número *n* expresa un número finito determinado de repeticiones sucesivas de ese género, así como la agrupación de las unidades escogidas en una totalidad única. La formación de los números enteros *finitos* se basa, así pues, en el principio de la adición de una unidad a un número ya formado; se puede, por otra parte, imaginar un nuevo número, al que llamaremos T, que servirá para expresar que todo el conjunto anterior está dado en virtud de la ley en su sucesión natural. También podemos representarnos el número ω como el límite hacia el cual tienden los números *n*, a condición de entender con ello que ω será el primer número entero que seguirá a todos los números *n*, de manera que haya que declararlo superior a todos los números [⋯]

Por consiguiente, el primer entero transfinito, ω, debe ser entendido como un límite al que tiende la variable entera finita *n*, del mismo modo que un número irracional, por ejemplo, puede ser considerado como el límite de una variable. Los números transfinitos, escribió Cantor, se asemejan en cierto sentido a nuevas entidades irracionales o, mejor, imitan su índole más profunda, pues ambos dibujan los rasgos y las características imprescindibles del infinito actual. Se pueden considerar los números enteros, incluidos los transfinitos, como “actuales”, apuntaba Cantor, en tanto en cuanto basándose en las definiciones “asumen un lugar perfectamente determinado en nuestro conocimiento, se distinguen claramente de todos los demás elementos de nuestro pensamiento, sostienen relaciones definidas con ellos y, por consiguiente, modifican, de manera definida, la sustancia de nuestra mente”. Ahora bien, Cantor no se atrevió a pronunciarse sobre la “existencia” efectiva de los nuevos entes matemáticos; separó la matemática de la metafísica y estableció una triple división del infinito actual:

> El infinito actual surge en tres contextos: primero, cuando se observa en la forma más completa, independiente de cualquier otro ser mundano; *in Deo,* al que denominaré Infinito Absoluto o simplemente Absoluto; segundo, cuando surge en el mundo creado, contingente; y tercero, cuando la mente lo entiende *in abstracto* como una magnitud, número o tipo de orden matemático. Me gustaría establecer un claro contraste entre el Absoluto y lo que yo he denominado Transfinito, es decir, los infinitos actuales de los dos últimos tipos, los cuales están claramente limitados, sujetos a incrementos y, de esta manera, relacionados con lo finito.

Por otra parte, lo infinitamente pequeño en un sentido actual es absurdo para Cantor: “desde el punto de vista del *análisis* puramente *aritmético*, *no hay* magnitudes infinitamente pequeñas, sino magnitudes variables que *devienen* en infinitamente pequeñas”. Es preciso aclarar que en la época de Cantor los infinitamente pequeños eran rechazados como podemos observar en la definición de límite de Weierstrass[12] por no respetar el principio de Arquímedes. Pero los argumentos de Cantor

12. Como ya se ha indicado anteriormente, suponer la existencia de infinitésimos actuales contradice el axioma de Arquímedes: si α es un infinitésimo actual y *b* una magnitud finita dada, el producto $n\alpha$ quedará infinitamente pequeño aunque n sea grande; no se tendrá, por lo tanto, que $n\alpha > b$.

contra los infinitesimales actuales son del mismo tipo que los de sus adversarios contra el infinito actual. Delahaye (2001) resume la situación:

> Los matemáticos del siglo XX supieron dar a lo infinitamente pequeño un estatuto de objeto matemático. El método utilizado en el siglo XIX para restituir el rigor al cálculo infinitesimal supone una renuncia al infinito actual, al que se sustituye por un infinito potencial, que corresponde a cantidades que se aproximan cada vez más a su límite.

La correspondencia uno a uno hace posible distinguir los conjuntos contables de los no contables. En el nivel geométrico de representación, y mediante una verificación empírica, somos incapaces de detectar instrumentos cognitivos que nos conduzcan a establecer la diferencia entre densidad y continuidad. Es necesario un nivel de representación superior que incluya la idea de potencia de un conjunto, su cardinal, así como un nuevo tipo de operatividad, para que la comparación sea posible. Se genera, por lo tanto, un cambio metodológico ya que el proceso de verificación deja de ser empírico y pasa a ser más dependiente de la lógica. Otro aspecto a destacar respecto a este nuevo nivel de representación se refiere a los desarrollos decimales. Cantor utilizó desarrollos decimales para demostrar uno de sus más bellos resultados: que la línea y el plano son equipotentes. Esto condujo a un cambio en el significado de las expresiones decimales. En este nivel de representación hay transformaciones, por ejemplo de una línea al plano, que implican "conservación" en el sentido piagetiano, lo cual no ocurría con el criterio de Bolzano ya que el número cardinal del conjunto permanece invariante a través de las transformaciones. La conservación de la cantidad es un prerrequisito con el fin de que el concepto de número exista; el uso de números de cualquier tipo sólo es significativo si hay algo -denominado cantidad- que permanece invariante bajo transformaciones. Según Piaget, la cantidad es una construcción mental basada en un sistema de operaciones de correspondencia reversibles entre conjuntos. Por lo tanto, no nos sorprende que la teoría de Cantor de conjuntos infinitos le condujese a una generalización del concepto de número (Jahnke, 2001).

Con respecto a la biyección Cantor establece que:

> Si se puede hacer corresponder elemento por elemento dos conjuntos bien definidos M y N por una operación en sentido único convenimos en decir que estos conjuntos tienen la misma *potencia* o bien que son *equivalentes.*

Se puede observar que Cantor no precisa que M y N sean finitos o infinitos. La biyección permite determinar si dos conjuntos tienen el *mismo número de elementos*, sin saber cuántos hay. Los conjuntos finitos se pueden definir por extensión y comprensión, pero los conjuntos infinitos sólo admiten ésta última manera de ser definidos. Dedekind utilizará la biyección entre conjuntos utilizada por Cantor para convertirla en definición de un conjunto infinito:

> La propiedad que he utilizado para definir el sistema infinito ha sido ya utilizada antes por Cantor e incluso por Bolzano, pero ninguno de estos autores ha intentado transformar esta propiedad en definición del infinito y construir de una forma rigurosamente lógica la ciencia de los números sobre esta base.

Este es el texto donde Dedekind (1998) lo enuncia:

> 64. Definición: un sistema S se llama infinito cuando es similar a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se llama a S sistema finito

Tras la introducción de los números ordinales por Cantor hoy día también se dice que un conjunto A es finito si y sólo si card(A) = ord(A). Antes de 1873, Cantor no había supuesto en ningún momento la diferencia de potencia entre infinitos, entre lo discreto y lo continuo; para él sólo había un infinito. Intuitivamente puede parecer que los conjuntos numéricos se ordenan como $\mathbb{N} < \mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{A} < \mathbb{R}$, siendo $\mathbb{A}$ el conjunto de los números algebraicos; en cambio, se demuestra que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ tienen la misma potencia. En el Teorema de Cantor, o demostración diagonal de 1891, es la primera vez que Cantor afirma que existe una potencia superior a la del continuo: "Para toda aplicación *f* del conjunto de los enteros positivos en el intervalo abierto (0, 1) de los números reales, existe, al menos, un número real que está en (0, 1) pero que no está en la imagen de *f*" (versión de Wilfrid Hodges). Pero ¿existe un cardinal entre $\aleph_0$, cardinal de $\mathbb{N}$, y $2^{\aleph_0}$, cardinal de $\mathbb{R}$?; la *hipótesis del continuo* afirma que no. Cantor pensaba que esta afirmación era verdadera y dedicó el resto de su vida a intentar demostrarla.

Los nuevos instrumentos que introdujo Cantor le permitieron alcanzar otros resultados que conviene indicar (Grattan-Guinness, 1984):

- Dos segmentos AB y AC, concebidos como conjuntos de puntos, tienen el mismo número independientemente de su longitud que no tiene ninguna influencia. El conjunto de puntos de un segmento es el mismo que el de una semirrecta.
- Existe una correspondencia biunivoca entre los puntos de un cuadrado y los de uno de sus lados. Inicialmente, Cantor había asignado $\aleph_1$ a la cardinalidad de la línea (la cardinalidad *c*), $\aleph_2$ a la cardinalidad del plano y $\aleph_3$ a la cardinalidad del espacio.
- Estableció y demostró la cardinalidad de cada uno de los conjuntos numéricos y la relación entre ellos:

$$n < c = 2^{n} < f = 2^{c} < g = 2^{f}$$

La hipótesis de Cantor o *hipótesis del continuo* dice: "***c*** sigue estrictamente a *n*, *f* sigue estrictamente a *c*, *g* sigue estrictamente a *f* y así sucesivamente"; por lo tanto, estos elementos constituyen una nueva sucesión que podemos renombrar como sigue: $n = \aleph_1$, $c = \aleph_2$, $f = \aleph_3$,..., donde $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$. Gödel y Cohen demostraron que si se admite que los axiomas de Zermelo-Fraenkel no son contradictorios, la hipótesis del continuo es indecidible. El intento de aprehender el infinito en su totalidad definiendo una completitud fuera de la cual no quedase nada acabaría por resultar ilusorio. En 1931, K. Gödel demostró que la matemática no cejaba de mostrar *aperturas*, alusiones a *otra cosa* de lo que en todo caso habría logrado expresar en un sistema formal como el hilbertiano. La matemática simbólica no era, pues, capaz de expresar, como deseó el formalismo, un mundo cerrado y exhaustivo de signos, un sistema formal *completo*[13]. Weyl recogió este resultado y lo resumió claramente en un escrito de 1932: el infinito es accesible intuitivamente como campo de posibilidades indefinidamente abierto; y, por serlo, es análogo a la sucesión de los

13. Para cualquier sistema formal de la matemática, Gödel indicó dos consecuencias inevitables: 1) existen proposiciones relativamente elementales e intuitivamente ciertas que no se pueden deducir en el formalismo del sistema; 2) la afirmación que expresa la coherencia del sistema no es deducible en su formalismo, en el sentido de que un intento de deducción conduciría al absurdo de una relación como $1 \neq 1$.

números, que es prolongable ilimitadamente. La completitud, el denominado infinito actual, se halla, no obstante, fuera de nuestro alcance, pese a lo cual la exigencia de la totalidad acucia a la mente a representarse el infinito como entidad cerrada por conducto de construcciones simbólicas. El interés filosófico primario de la matemática, al igual que de la física, sugirió asimismo Weyl, debía radicar en alcanzar una intrínseca solidez de esas construcciones simbólicas; y la labor de Weierstrass, Cantor, Frege, Russell y Hilbert también había servido para ello. Los frecuentes reenvíos a Pitágoras, Bruno, Nicolás de Cusa y a la célebre frase de Anaxágoras: “De lo pequeño no existe lo mínimo, sino siempre algo más pequeño”, que figuraron en el libro de Weyl, desconcertaron bastante a quien siguió de cerca la evolución de las ideas que culminaron en dicha publicación.

Russel dice en un pasaje de sus *Principia* que los filósofos que argumentan contra la realidad de los números infinitos simplemente cometen un error técnico: no comprenden la diferencia entre números finitos e infinitos; los números finitos obedecen la ley de inducción matemática; los números infinitos no. La teoría lógica de los *tipos*, formulada por vez primera por Russell, constituyó una corrección de la concepción ingenua de la idea de “colección” y las paradojas que entrañaba. La existencia de esas paradojas fue achacada a un círculo vicioso implicado por determinadas clases infinitas concretas de objetos: algunas de esas clases debían ser consideradas lógicamente “imposibles”, simplemente porque su definición las presuponía como entidades ya definidas (Russell).

Zermelo logró demostrar, en 1904 y 1908, que en *todo* conjunto M, y en particular en todo conjunto infinito, se puede definir lo que se llama un *buen ordenamiento*, es decir una relación de orden, que cabría imaginar por simplicidad analógica con el “mayor” o “menor” de los números, caracterizada por la propiedad siguiente: cada uno de los subconjuntos no vacíos del conjunto dado M tiene un elemento más pequeño que todos los demás; y en concreto, para *cada* par de elementos de M, *a* y *b*, podemos decir cuál es el “mayor” o el “menor” de los dos. En realidad, Zermelo consiguió, más exactamente, demostrar que un conjunto M puede ser ordenado correctamente siempre que se admita la existencia actual de una función que a *cada* subconjunto M’ de M asocie un elemento *m’* de M’. Esta función de elección, pensada como existente, transformaba la potencialidad inagotable de la operación de ordenación en una realidad estática y total. El método intuitivo de ordenamiento en que tropezaron los intentos preliminares de Cantor, debía consistir en una especie de recuento de los elementos a ordenar, uno *tras* otro, en sucesión temporal, basándose en una extensión del procedimiento ordinario del contar al transfinito. La hipótesis de existencia de la función de elección de Zermelo, que se convirtió en axioma de la teoría de conjuntos, era capaz de deshacer los vínculos de la sucesión temporal de las elecciones, volviendo simultáneo lo que el tiempo obligaba a ser sucesivo. Las clases de conjuntos infinitos equivalentes, es decir, en correspondencia biunívoca entre sí, que Cantor, prudentemente, llamaba “potencias”, para evitar una aplicación en exceso precipitada de la idea de número a semejantes abstracciones, podía elevarse más razonablemente a “números”, a condición de que se hubiese demostrado de la manera más general su comparabilidad, al igual que los números ordinarios finitos. Dicha comparabilidad quedaba asegurada gracias al teorema de buen ordenamiento de Zermelo.

Kronecker (1823-1891) encabezó hasta el final de su vida la oposición a cualquier intento de fundamentar el infinito actual y llegó a atribuir a las innovaciones de Cantor rasgos satánicos.

Proponer los números reales como signos efectivos para la *medición* de determinadas cantidades de la geometría quería decir avalar la introducción de un axioma que establece la referencia a series de enteros asociadas a los irracionales correspondientes a determinados puntos del espacio, lo cual representa para Kronecker una reunión híbrida de la matemática con las intuiciones correspondientes a la geometría; una construcción artificial para una problemática conciliación entre la ciencia del número entero, que era un puro producto mental, y la ciencia del espacio, el cual, en cambio, siempre cabía concebirlo como algo externo, por estar vinculado de algún modo a la intuición sensible[14] (Ferreirós, 1991). El descubrimiento de las paradojas lógicas exacerbó la polémica y sirvió para demostrar al mismo tiempo que los objetos que se afirmaba que debían "existir" en virtud de simples actos de creación mental, estaban a menudo viciados por contradicciones intrínsecas. "No existe ningún infinito actual (dado en su totalidad). Los cantorianos lo han olvidado y han incurrido en contradicciones" (Poincaré). Esta nueva evidencia era, por lo demás, consecuencia directa del proceso de aritmetización de la matemática efectuada por Weierstrass y Cantor. Antes del perfeccionamiento de las tesis neointuicionistas aparecieron en escena matemáticos como Lebesgue, Baire y Borel, quienes formularon, desde 1905, objeciones a la coherencia del infinito actual, al transfinito y al empleo del axioma de Zermelo. Hilbert se propuso salvar de las antinomias la integridad de la matemática recurriendo al método axiomático y al cálculo lógico, pero él mismo siguió convencido de que el empleo de la deducción lógica debía admitir una condición extralógica ulterior, intuible como experiencia inmediata y anterior a cualquier actividad de pensamiento, lo cual le aproximó a Kant. Admitió, sin embargo, que la capacidad del pensamiento intuitivo no llega al transfinito y que a ello se debe el que los teoremas matemáticos que implican esa categoría sean injustificables como eventuales verdades dotadas de evidencia concreta.

Las reacciones de los matemáticos a la teoría cantoriana se pueden clasificar en dos grandes tendencias. *Intuicionistas* -y próximos a ellos los *constructivistass*- que tratan el infinito tan sólo como potencial o constructivo; para Wittgenstein potencial no implica incompletitud, es decir potencial y actual no son aspectos complementarios del infinito. Los denominados *Formalistas* manifiestan que resulta inútil pensar que se pueda tener una concepción "intuitiva" de los conjuntos infinitos. Weierstrass aunque eliminó toda referencia al infinito en su Análisis, lo utilizó implícitamente[15]. Para Hilbert, el Análisis sólo desarrolla el significado potencial del infinito; es necesaria la Teoría de Conjuntos para obtener el infinito actual. Afirmar "qué es lo que existe" ha sido y es una cuestión de debate en el campo de la Filosofía; según Rucker (1982), si nosotros sentimos que los "objetos" utilizados por los matemáticos son reales, entonces podemos concluir que existen "objetos" infinitos:

> La cuestión sobre la existencia o no de cosas infinitas permanece como un problema casi empírico abierto...; existen varias clases de infinitos físicos que podrían existir actualmente: el tiempo infinito, el espacio infinitamente largo, el espacio de dimensión infinita, el espacio infinitamente continuo, y la materia infinitamente divisible.

---

14. Kronecker rechazaba la noción de infinito y dio lugar a una escuela de pensamiento en la filosofía de las matemáticas denominada *finitismo* que condujo a la escuela filosófica y matemática conocida como *constructivismo* matemático.

15. Por ejemplo, en las series numéricas infinitas que definen a los números reales y en sus deducciones lógicas.

De hecho, Brouwer y Russell admitían la existencia de entidades físicas infinitas.

En resumen, hemos podido apreciar a través de este breve recorrrido histórico la evolución tanto filosófica como matemática sufrida por el concepto de infinito. Un concepto que, a diferencia de muchas otras nociones matemáticas, no se ha convertido en patrimonio de un lenguaje formal y exclusivista sino que ha permanecido formando parte de numerosos contextos del conocimiento y de la cultura en general. Los diferentes posicionamientos recogidos se pueden categorizar en unas pocas líneas de pensamiento que responden más a filiaciones ideológicas que a un verdadero interés por su formalización. Así, perspectivas numéricas, materiales o espirituales han desembocado, al menos, en otras tantas interpretaciones sobre la realidad o existencia del infinito, sobre la oportunidad de su inclusión en argumentaciones científicas, sobre la veracidad de los resultados obtenidos tras dicha inclusión, etc. Por último, conviene retener en nuestra memoria la mayor parte de las actitudes revisadas a lo largo de las páginas anteriores, pues no dejará de sorprendernos el grado de fidelidad a las mismas que encontraremos en las respuestas de los estudiantes a medida que avancemos en los próximos capítulos. No podemos explicar tales comportamientos aludiendo exclusivamente a la mera transmisión del conocimiento, exigua y difícilmente detectable en el caso que nos ocupa, sino que es preciso recurrir también a la carga emocional y perceptiva del lenguaje cuya estructura neuronal condiciona nuestro aprendizaje desde el nacimiento.

Capítulo 2

PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Creo que las matemáticas están mucho más ligadas de lo que imaginamos a nuestra fisiología concreta, nuestras experiencias y nuestras preferencias sicológicas. Son locales, no universales.

I. Stewart

En este capítulo consideraremos el estado de la cuestión tras la revisión bibliográfica que se ha llevado a cabo. Tres serán los ejes que lo articularán y que establecerán las bases teóricas de la presente investigación: la idea de *esquema conceptual* de Tall y Vinner, la de *modelo intuitivo* de Fischbein y la *teoría de metáforas* de Núñez y Lakoff. Todas ellas aparecen disjuntas en las publicaciones actuales, siendo uno de nuestros objetivos el conjugarlas en un esquema global que recoja las aportaciones fundamentales de cada una. Se incorporará así mismo una cuarta dimensión que complemente la estructura que diseñaremos; tal será la de obstáculo tanto epistemológico como didáctico. Por último, se recogerá brevemente la filosofía de otras referencias teóricas, dentro de la investigación en educación matemática, que de una u otra manera presentan ciertos elementos de convergencia con las mencionadas.

2.1. PENSAMIENTO MATEMÁTICO ELEMENTAL VS AVANZADO.

En los inicios de la investigación sobre el aprendizaje aparece ya un interés declarado por distinguir diferentes etapas en el desarrollo del mismo, descubrir sus peculiaridades y determinar los parámetros de las transiciones correspondientes. Para llevar a cabo este programa, se enfrentan dos grandes paradigmas de investigación. La *teoría conductista*, construida a partir de la observación externa de estímulos y respuestas, rechaza especular sobre el funcionamiento interno de la mente, mientras que la *psicología constructivista*, por su parte, intenta discutir cómo se crean las ideas mentales en cada individuo. Piaget observó la necesidad del individuo de estar en equilibrio dinámico con su entorno; tal equilibrio puede ser afectado al enfrentarse con nuevos conocimientos que entrarían en conflicto con los viejos, teniendo lugar un periodo de transición en el que se reconstruye la estructura del conocimiento para dar lugar a un nivel de equilibrio más maduro. De esta manera identificó sus conocidas cuatro etapas de equilibrio, cada una más rica que la anterior, en el crecimiento de niño a adulto; pero la articulación de etapas presenta un problema importante a la hora de establecer nuevas estrategias de enseñanza, al afirmar que el paso de un estadio al siguiente no puede acelerarse significativamente bajo la influencia de la instrucción; así, Papert (1980) subraya el carácter esencialmente conservador que enfatiza lo que el niño no puede hacer. No obstante, el aspecto más interesante de la teoría de Piaget es el proceso de transición de un estado mental a otro. Skemp (1979) distinguió entre el caso en que el proceso de aprendizaje produce una simple *expansión* o ampliación de la estructura cognitiva del individuo y el caso en el que hay un conflicto cognitivo, requiriéndose una *reconstrucción* mental. Es este *proceso de reconstrucción* el que provoca las dificultades que se presentan durante una fase de transición; en este sentido Papert (Ibid.) afirma que

> El conocimiento nuevo contradice a menudo al viejo y un aprendizaje efectivo precisa de estrategias para tratar tal conflicto. A veces estos conocimientos pueden reconciliarse, a veces uno u otro deben ser abandonados y a veces ambos pueden "mantenerse cerca" si se alojan en compartimentos separados.

La idea de infinito, objeto del presente trabajo, yace en la frontera entre lo que se ha dado en denominar *Pensamiento Matemático Elemental* (PME) y *Pensamiento Matemático Avanzado* (PMA). Las definiciones de estos dos ámbitos aún no presentan acotaciones muy precisas pero sí aproximaciones muy prometedoras. Piaget (1950), por su parte, fue el primero en intentar describir los aspectos formales que separan ambos tipos de pensamiento:

> El pensamiento formal alcanza su madurez durante la adolescencia [⋯] a partir de los 11 ó 12 años, cuando el sujeto es capaz de razonar de un modo hipotético-deductivo, es decir, sobre la base de hipótesis que no mantienen necesariamente relación con la realidad o con las creencias del sujeto y... cuando confía en la validez de una inferencia frente al acuerdo de las conclusiones con la experiencia.

Harel y Sowder (2005) plantean algunas cuestiones en su búsqueda de criterios para definir estos dos ámbitos:

> ¿En qué sentido es *avanzado* el *pensamiento matemático*? ¿*Avanzado* implica "efectivo", "eficiente" o "elegante"?. El pensamiento matemático no avanzado ¿implica necesariamente lagunas o errores? *Avanzado* implica también que hay algo *elemental*; si esto es así, ¿en qué sentido el *pensamiento matemático* es elemental? Es muy difícil caracterizar estas propiedades, incluso aunque compartamos una idea intuitiva de su significado y aún es más difícil construir una taxonomía que diferencie entre las propiedades del pensamiento matemático.

El estudio cognitivo del PMA se inició y desarrolló a lo largo de los años ochenta del siglo pasado, culminando en una publicación a modo de manifiesto, *Advanced Mathematical Thinking*, editado por David Tall en 1991 con la colaboración de algunos de los investigadores más representativos del debate abierto en torno a dicha idea.

El cambio hacia un pensamiento matemático avanzado supone una transición difícil, desde una posición donde los conceptos tienen una base intuitiva fundada en la experiencia hasta otra en la que vienen especificados por definiciones formales y propiedades que se han reconstruido a través de deducciones lógicas. Durante esta transición coexisten en la mente del estudiante las experiencias más tempranas y el nuevo corpus de conocimiento deductivo. Las investigaciones empíricas han mostrado que esto da lugar a una amplísima variedad de conflictos cognitivos que puede actuar como un obstáculo para el aprendizaje. Autores como Pimm (1995) observan que el adjetivo *avanzado* está siendo aplicado por diversos autores tanto para describir las matemáticas como el pensamiento poniendo de manifiesto su ambigüedad. De hecho, Selden y Selden (2005) nos invitan a responder a la pregunta: ¿qué tipo de pensamiento está asociado especialmente con las matemáticas avanzadas en estudiantes, licenciados y matemáticos?; y también a esta otra: ¿qué tipo de matemáticas deben considerarse como avanzadas a través del currículo escolar desde la educación infantil? Recogeremos a continuación algunas de las aportaciones que se han realizado hasta ahora con el fin de caracterizar tales conceptos.

Existe cierto consenso entre los autores en suponer que los diversos mecanismos cognitivos que gobiernan el aprendizaje individual no son cualitativamente diferentes para adolescentes y para niños. Al respecto, Dreyfus (1991) escribe que

> No hay una distinción evidente entre muchos de los procesos del PME y el PMA, incluso aunque las matemáticas avanzadas se centran mayormente en las abstracciones propias de la definición y la deducción [⋯] Es posible pensar en tópicos de matemáticas avanzadas de una manera elemental y también existe un pensamiento avanzado sobre tópicos elementales. Una característica diferencial entre el PME y el PMA es la complejidad y su manipulación [⋯] los aspectos matemáticos y sicológicos de un proceso difícilmente pueden estar separados; a la vez que se ejecuta un proceso matemático es muy probable que se genere una imagen visual mental.

Aunque el dominio de las matemáticas que recoge el término matemáticas avanzadas es amplio, sólo un número restringido de tópicos se enseñan normalmente tanto en secundaria como en bachillerato. Pero, como ya hemos dicho, no parecen evidentes las características que separan el PME del PMA, ya que cada concepto avanzado se basa en conceptos elementales y no podrá ser asimilado sin una sólida comprensión de estos. Sin embargo, Robert y Schwarzenberger (1991) introducen algunos matices que subrayan ciertas contradicciones en esta categorización:

> Muchos de los rasgos propuestos muestran, tras un examen más minucioso, una fuerte continuidad en el aprendizaje de las matemáticas de los más jóvenes. Pero cuando todas las características son consideradas simultáneamente, hay un cambio cuantitativo: más conceptos, menos tiempo, la necesidad de mayor poder de reflexión, mayor abstracción, menos problemas significativos, más énfasis en la demostración, mayor necesidad de un aprendizaje versátil, mayor necesidad de un control personal sobre el aprendizaje. La confusión creada por nuevas definiciones coincide con la necesidad de un pensamiento deductivo más abstracto. Tomados juntos estos cambios cuantitativos dan lugar a un cambio cualitativo que caracteriza la transición al pensamiento matemático avanzado [⋯] La formalización conlleva la abstracción de propiedades específicas que ya no sólo se aplican a los objetos de los que proceden sino también a cualquier objeto que obedezca dichas propiedades. Esto supone la construcción de un nuevo objeto mental que es diferente del inicial y que, por lo tanto, puede entrar en conflicto con él [⋯] Esto da lugar a una discontinuidad fundamental en la difícil transición desde las matemáticas elementales a las matemáticas avanzadas.

Ya entrando en la descripción del ámbito del PMA se pueden enumerar algunos de los procesos que participan en su desarrollo:

> Representar, visualizar y generalizar, así como clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer o formalizar. En otras palabras, el PMA consiste en una larga lista de procesos en interacción.

Según Azcárate y Camacho (2003), entre los procesos cognitivos implicados en el PMA destaca el proceso de abstracción, cuya esencia es la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente, y puntualizan:

> No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

Para Tall, el paso del PME al PMA supone una transición significativa

> [⋯] de *describir* a *definir*, de *convencer* a *demostrar* de una manera lógica basada en dichas definiciones. Esta transición requiere una reconstrucción cognitiva durante el esfuerzo inicial de los estudiantes en su primer año universitario. Es la transición de la *coherencia* de las matemáticas elementales a la consecuencia de las matemáticas avanzadas, basadas en entes abstractos que el individuo debe construir mediante deducciones a partir de las definiciones formales.

Y en (Tall, 1995) se indica que el crecimiento cognitivo entre ambos tipos de pensamiento comienza

> [⋯] desde la *percepción de* y la *acción sobre* objetos en el mundo externo, construyéndose a través de dos desarrollos paralelos: uno desde lo visual-espacial a lo verbal-deductivo, el otro mediante sucesivas encapsulaciones proceso-objeto utilizando símbolos manipulables [⋯] Esto supone un lugar natural donde situar la línea entre el PME y el PMA.

En las matemáticas elementales los objetos son *descritos* mientras que en las matemáticas avanzadas los objetos son *definidos*. En ambos casos el lenguaje es el vehículo que permite formular las propiedades de los objetos pero la inversión indicada provoca importantes dificultades para los estudiantes que se inician en el PMA. A partir de aquí podemos enumerar diversos tópicos del currículo de matemáticas que apuntan hacia el cambio a formas más avanzadas de pensamiento como pueden ser aquellos que suponen la introducción de la demostración en geometría, o que implican procesos potencialmente infinitos, como la noción de límite, o aquellos otros que suponen la utilización de símbolos definidos por sus propiedades o, en fin, los que implican el cambio más notable en los procesos de pensamiento como ocurre en la construcción de teorías matemáticas a partir de un conjunto de definiciones axiomáticas.

Según Dreyfus (1991) es conveniente disponer de representaciones mentales ricas de los conceptos con el fin de alcanzar un desarrollo adecuado en matemáticas. Para este autor una representación es rica si contiene numerosos vínculos entre diversos aspectos del concepto. La abstracción supone uno de los procesos más importantes en el PMA que implica a su vez dos procesos previos: generalizar y sintetizar; las dificultades en el proceso de transición al concepto abstracto dependen esencialmente de tales vínculos. Dreyfus considera que el aprendizaje se articula en cuatro etapas, desde utilizar una única representación, pasando por utilizar más de una representación en paralelo y establecer vínculos entre representaciones paralelas hasta integrar representaciones y conexiones flexibles entre ellas.

Harel y Sowder (2005) proponen un test general que permita identificar el PMA en los diferentes niveles a través del currículo. La idea principal es que el PMA implica, en algún grado, al menos alguna de las características de los obstáculos epistemológicos en el sentido de Brousseau:

> Estas consideraciones [⋯] nos conducen a la siguiente definición, que sugiere una agenda de investigación para determinar formas de pensamiento que sean avanzadas, así como los niveles de su desarrollo: el pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo implica al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico. El nivel de adquisición de una forma de pensar por parte de un individuo está determinado según hasta qué punto el individuo haya superado estos obstáculos.

Las condiciones a las que se refieren estos autores, como veremos más detenidamente en el apartado 2.7, son las siguientes: un obstáculo epistemológico es una porción de conocimiento, más que una ausencia del mismo, que de manera intrínseca participa en la adquisición de conocimientos posteriores más generales; es lo suficientemente robusto como para soportar contradicciones eventuales; y, finalmente, tal obstáculo debe aparecer a lo largo del desarrollo histórico de las matemáticas. Así, para ellos, el PMA aparece a edades tempranas, por ejemplo en el razonamiento sobre proporciones:

> Nuestro punto de vista es que las raíces del pensamiento matemático para las matemáticas avanzadas deben favorecerse durante el estudio de las matemáticas elementales. Formas generales de pensamiento, construidas sobre formas ricas de comprensión en matemáticas elementales pueden colaborar simbióticamente con formas posteriores de comprensión y de pensamiento en matemáticas avanzadas.

Edwards et al. (2005) proponen un criterio diferente: se puede considerar que el pensamiento es avanzado si depende del razonamiento deductivo y no directamente de la percepción sensorial. Estos autores reconocen que "el pensamiento matemático ejemplar puede darse en cualquier edad de los estudiantes y en cualquier nivel de las matemáticas" pero prefieren reservar el término PMA para aquel pensamiento que implica "razonamientos rigurosos y deductivos sobre objetos matemáticos inasequibles a nuestros cinco sentidos", lo que difícilmente ocurre en los niveles no universitarios. Y aunque admiten que el razonamiento deductivo puede darse en estudiantes jóvenes, subrayan el hecho de que éstos progresan lentamente desde una primera observación tácita de los objetos de las matemáticas como parte del, o asociados al, mundo físico y, consecuentemente, poseedores de definiciones descriptivas. Así mismo asocian con el PMA la idea de *estructurar* el mundo real y los problemas matemáticos en el sentido de introducir notación, diagramas, definiciones, análisis, etc. para una clase de problemas con el fin de facilitar su solución, y en algunos casos para convertirlos en otros tipos de problemas.

Estas dos últimas referencias proponen puntos de vista diferentes del PMA, pero para ambas tal pensamiento siempre trata de objetos matemáticos. Por el contrario, la perspectiva de Rasmussen et al. (2005) es diferente; está más relacionada con el *cómo* pueden inventar los estudiantes, o reinventar, por sí mismos al menos algunas porciones de dichos objetos matemáticos. Así, su punto de vista de "avanzado" no se refiere tanto al pensamiento del estudiante en un momento dado, como a la manera en que el estudiante desarrolla este pensamiento a lo largo del tiempo y construye algunas de las matemáticas que le acompañan.

Para Gray et al. (1999) las matemáticas elementales se desarrollan a partir de dos métodos; uno centrado en las propiedades de los *objetos*, el otro sobre las propiedades de los *procesos*. Las matemáticas avanzadas, en cambio, adoptan la noción de *propiedad* como fundamental para establecer definiciones conceptuales a partir de las cuales se construye una teoría formal sistemática. La noción de PMA implica la creación de mundos mentales nuevos en la mente del individuo que pueden ser completamente hipotéticos. La idea de dar una definición verbal como una lista de criterios y construir el concepto a partir de la definición es inversa a la mayor parte del desarrollo de las matemáticas elementales donde los objetos matemáticos se entienden como poseedores de una serie de propiedades que pueden ser descubiertas estudiando los objetos y los procesos relacionados. Así, el paso de la construcción *objeto → definición* a la construcción *definición → objeto* es considerado como una parte esencial de la transición del pensamiento matemático elemental al avanzado.

2.2. OBJETOS, PROCESOS Y CONCEPTOS. ESQUEMA CONCEPTUAL.

Durante la pasada década de los ochenta las investigaciones pusieron de manifiesto que los individuos construyen sus imágenes mentales de un concepto no siempre de forma coherente y consistente y que experiencias previas pueden contaminar los significados de los fenómenos cuando se sitúan en nuevos contextos, lo que es particularmente evidente en la introducción de conceptos de matemática avanzada. Thompson (1985) propuso un marco teórico en el que el conocimiento matemático se caracterizara en términos de *procesos* y *objetos*. Según esta perspectiva, las matemáticas tratan de números, variables, funciones y así sucesivamente, y todos ellos pueden ser considerados como objetos que están conectados mediante relaciones que generan estructuras entre ellos. Los procesos, por su parte, están compuestos de operaciones sobre estos objetos que los transforman y las estructuras pueden ser o no preservadas bajo estas transformaciones.

Por su parte, Sfard (1991) considera dos tipos de interpretaciones al hablar del mismo concepto matemático: las *operacionales* que consideran las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones y las *estructurales* que entienden los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Si bien mantiene que ambas son complementarias, considera que las concepciones operacionales preceden a las estructurales. Sfard establece tres grados de estructuración progresiva en el proceso de formación de concepciones: interiorización, condensación y cosificación; los dos primeros son procesos graduales mientras que la cosificación consiste en un proceso casi instantáneo. La nueva entidad cosificada, el objeto, se desprende del proceso que la ha producido y empieza a adquirir su significado por el hecho de pertenecer a una cierta categoría. El estadio de cosificación es el punto en el cual empieza la interiorización de unos conceptos de nivel superior, aquellos que se originan a partir de procesos sobre el objeto en cuestión.

El poder de los símbolos matemáticos para evocar tanto procesos como conceptos llevó a Gray y Tall (1994) a dar un nombre formal a esta noción. La amalgama de un *proceso*, un *concepto* resultante de este proceso y un *símbolo* que puede evocar tanto el proceso como el concepto fue denominada *procepto*. En la aritmética elemental, por ejemplo, los proceptos comienzan como simples estructuras y crecen interiormente con el crecimiento cognitivo del individuo. Esencialmente un *procepto* es un símbolo matemático cuya flexibilidad permite representar bien un proceso matemático o bien el resultado de este proceso. Si bien otros teóricos (Dubinsky, 1991 y Sfard, 1991) utilizan el término *objeto*, Gray y Tall prefieren la palabra *concepto* porque términos tales como "concepto de número" o "concepto de fracción" son más frecuentes en el lenguaje ordinario que "objeto número" u "objeto fracción"; además, el término se utiliza en relación con el de *esquema conceptual* que se definirá más adelante. Para Gray et al. (1999)

> No hay ninguna "cosa" denominada "objeto mental" en la mente; en su lugar, se utiliza un símbolo que puede ser dicho, oído, escrito y visto. Este contiene la esencia destilada que puede retener la mente como una entidad simple, puede actuar como un vínculo de acciones internas para realizar cálculos y puede ser comunicado a otros.

Para Tall (1991b) se comienza con la imitación de los nombres de los números en sucesión, "uno, dos, tres,...", quizás de forma imperfecta al principio, "... cuatro, cinco, nueve, siete,...", luego con más confianza, hasta la rutina de indicar los objetos y recitar los nombres de los números en una secuencia que conducirá al proceso de contar. Entonces tiene lugar la encapsulación. El *proceso* de contar lleva al *concepto* de número. El poder de las matemáticas no viene dado por un simbolismo único y preciso - "una función es un conjunto de pares ordenados tal que..."- sino por una *dualidad* que alcanza su flexibilidad mediante la *ambigüedad* -una función es tanto un *proceso*, que permite realizar cálculos, como un *concepto* que puede ser manipulado-. El concepto de límite es también un *procepto*; la misma notación representa tanto el *proceso* de tender hacia el infinito como el *valor* del límite, si bien este fenómeno es muy diferente de los *proceptos* que aparecen en las matemáticas elementales. Así, un procepto puede entenderse como un concepto sobre el que pensar para formular problemas y un proceso para hacer cálculos y resolver problemas.

Según Tall, para entender el crecimiento de los conceptos matemáticos es preciso diferenciar su naturaleza, como se verá posteriormente. Consideremos el concepto "triángulo" frente al concepto "cinco". El primero es un objeto que puede visualizarse y describirse en términos de propiedades específicas; puesto que tenemos la experiencia de describir el objeto con palabras, disponemos de una respuesta cuando se nos pregunta qué es. El número "cinco" es diferente. Puede ser representado mediante un conjunto de cinco objetos, pero la *cinquidad* es una propiedad de la colección de objetos -su cantidad- mas que una propiedad intrínseca de cualquiera de los objetos. A diferencia del triángulo, el cual puede visualizarse como un objeto mental, el número "cinco" se encuentra íntimamente ligado a un *proceso*, el proceso de *contar*. Quizás no sepamos explicar qué es "cinco", pero sabemos *hacer* muchas cosas con el número cinco. El concepto "cinco" está dotado de significado no porque sepamos lo que *es*, sino porque sabemos qué *hacer* con él, podemos hacer *aritmética*. Este contraste entre ambos conceptos muestra una diferencia radical entre la naturaleza de los objetos mentales matemáticos que apelan directamente a nuestros sentidos, tales como puntos, líneas, cuadrados, círculos, gráficas de funciones, superficies en el espacio, cubos, esferas, conos, etc., y los objetos mentales simbólicos propios de la aritmética, tales como números enteros, fracciones, números negativos, decimales, etc.[1] Capturando la esencia

1. El concepto "triángulo" se produce porque podemos *ver* un triángulo, *sentir* físicamente objetos que son triangulares; podemos *hablar* sobre un triángulo y sus propiedades y *oír* a otros hablar sobre ello cada vez con más sofisticación. Todas estas percepciones están basadas fundamentalmente de esta idea, utilizando los símbolos tanto como entidades mentales como procesos es como podremos describir claramente la diferencia entre un concepto que crece desde las *percepciones de* los objetos, tal como un triángulo, y un concepto que crece desde las *acciones sobre* los objetos, tales como contar, que está representado mediante un símbolo, en este caso un número. Un proceso tal como contar utiliza símbolos que también representan un concepto, en este caso un número[2]. Un proceso tal como contar los elementos de un conjunto infinito o sumar los términos de una serie, un infinito potencial, utiliza símbolos que representan un concepto tal como el cardinal de un conjunto o la suma de una serie, un infinito actual.

La atención sobre los objetos conduce a un estudio de sus propiedades y las relaciones entre ellas, creciendo sutilmente mientras el individuo se desarrolla. En cambio, la atención sobre las acciones, conduce a un desarrollo de naturaleza muy diferente, que requiere la introducción de números-símbolos con el fin de darles su expresión más completa. Las matemáticas basadas en la acción comienzan con operaciones sobre objetos físicos[3]. Pero no se quedan en el nivel físico de contar y continúan con el fin de resolver problemas. No podríamos sumar dos números muy largos contando los elementos correspondientes a cada conjunto y luego contando la combinación. Utilizamos los símbolos numéricos para comprimir los conceptos en entidades "pensables", los proceptos, que podemos manipular para hacer aritmética y que nos permiten utilizar de manera dual el proceso para *hacer* matemáticas y el concepto para *pensar en* matemáticas. Por lo tanto, una razón de la complejidad del conocimiento matemático es que la mayoría de las nociones matemáticas pueden adoptar el papel de procesos o de objetos, dependiendo de la situación del problema y de la conceptualización del que aprende. Al familiarizarse el estudiante con un determinado proceso, éste adopta la forma de una serie de operaciones que pueden realizarse sin pensar; el estudiante ha alcanzado el *pensamiento operacional* respecto de este problema. En una etapa posterior, la imagen mental de este proceso cristaliza en una entidad simple, un nuevo *objeto*. Una vez alcanzado este nivel, el estudiante es capaz de pensar sobre esta noción bien dinámicamente como un proceso o bien estáticamente como un objeto. En estos términos, uno de los pasos esenciales en el aprendizaje de las matemáticas es la *objetualización*: obtener un objeto a partir de un proceso. Y uno de los principales objetivos del currículo es desarrollar el pensamiento operacional, pensamiento sobre un proceso en términos de operaciones sobre objetos. La habilidad para *reflexionar* sobre nuestras propias ideas es, según Tall (2003 y 2004), junto con los aspectos de *percepción* y *acción* ya mencionados, la tercera componente de una teoría fundamental del crecimiento matemático. La *reflexión sobre la percepción* de los objetos conduce a la observación de semejanzas y diferencias que se pueden describir y analizar; mediante la verbalización de estas propiedades es posible compartir y matizar sus significados. Esta reflexión, acompañada por la acción sobre lo que nosotros percibimos, conduce al desarrollo de ideas geométricas y a la teoría deductiva de la geometría euclidea. La *reflexión sobre la acción* de contar, y la prolongada experiencia de los números y su aritmética, conduce a teorías sofisticadas en aritmética y álgebra.

---

en nuestros sentidos. También podemos considerar la noción de triángulo más allá de lo que podemos ver o dibujar: podemos imaginar un triángulo con lados perfectamente rectos. El concepto "cinco" es cualitativamente diferente; se produce debido a que podemos llevar a cabo un proceso como contar y realizar operaciones con números y conseguir una aritmética consistente.

2. El símbolo para la suma 3 + 2 representa tanto el proceso de añadir como el concepto de suma y la multiplicación 3 x 2 también es un proceso de suma repetida y un concepto de multiplicación.

3. Podemos contar cinco objetos y ponerlos juntos en un grupo, después contar tres objetos en otro grupo y poner los grupos juntos para contarlos y encontrar una colección de ocho objetos. Estas ideas teóricas de número, tal como 5+3 = 8, ya han sido percibidas en relaciones físicas, de manera que la teoría de la aritmética comienza físicamente con manipulaciones del mundo físico (corporeización).

Por su parte, para Dubinsky y su grupo de investigación un individuo desarrolla la comprensión de un concepto empleando ciertos mecanismos denominados *interiorización, encapsulación* y *tematización*. Estos mecanismos se utilizan para construir y conectar estructuras mentales denominadas *acciones, procesos, objetos* y *esquemas*. Esta teoría, denominada APOE, es una adaptación a la teoría de Piaget sobre la abstracción reflexiva y persigue modelizar las construcciones mentales utilizadas en el aprendizaje matemático avanzado. Una *acción* es cualquier transformación física o mental de objetos para obtener otros objetos. Esto ocurre como reacción a estímulos que el individuo percibe como externos. La acción se convierte en un proceso cuando el individuo puede "describir o reflexionar sobre todos los pasos de la transformación sin realizarlos necesariamente". Decimos entonces que la acción ha sido interiorizada y se ha convertido en un proceso. Un *proceso* es una transformación de un objeto u objetos cuya característica más importante es el control que el individuo ejerce sobre ella, en el sentido de que es capaz de describirla o reflexionar sobre ella. Mientras que estas estructuras mentales describen cómo un individuo construye una simple transformación, un tópico matemático supone frecuentemente muchas acciones, procesos y objetos que necesitan ser organizados y relacionados en un marco coherente que se denomina *esquema*. Un *esquema* es una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas vinculados de alguna manera a los que se recurren para resolver una situación problemática. Un *objeto* se construye a partir de la encapsulación de un proceso y se refiere a un objeto mental o físico. Esta encapsulación se alcanza cuando el individuo es consciente de la totalidad del proceso, observa qué transformaciones pueden actuar sobre él y es capaz de construir tales transformaciones. La reflexión sobre un esquema puede dar lugar a un nuevo objeto; por lo tanto, vemos que hay, al menos, dos formas de construir objetos: a partir de procesos y a partir de esquemas.

Los mecanismos mentales de interiorización y encapsulación nos permiten pensar sobre lo que ocurre después de completar un proceso. Uno de sus objetivos al elaborar la teoría general es aislar pequeñas porciones de esta estructura compleja y dar descripciones explícitas de posibles relaciones entre esquemas. Cuando esto se ha realizado para un concepto particular, recibe el nombre de *descomposición genética* del concepto[4]. Sin embargo, aunque podamos decir que el conocimiento matemático consiste en una colección de esquemas, podemos decir muy poco sobre cómo este conocimiento existe en la mente de una persona. La *interiorización* de acciones es una actividad "habitual" en la clase de matemáticas; por ejemplo, un estudiante puede desear describir el comportamiento de una función cuadrática en un intervalo dado para observar dónde crece o decrece. La transformación de calcular valores funcionales en dicho intervalo se concibe en primer lugar como una *acción* en la que se requieren determinadas instrucciones, por ejemplo una fórmula. Repitiendo esta acción y reflexionando sobre la relación entre los valores funcionales al variar x sobre el intervalo, el estudiante puede comenzar a *interiorizar* la acción en una estructura mental denominada *proceso*. Esta es una estructura que implementa la acción, no externamente, sino internamente, en la mente del individuo. Así, el individuo puede observar el comportamiento de los valores funcionales al variar x sobre el intervalo sin necesidad de evaluar $f(x)$ para valores explícitos de x. En este punto, si el estudiante se hace consciente del proceso como una totalidad, y

4. Una *descomposición genética* se puede definir como un análisis teórico de un concepto matemático en términos de las construcciones mentales que un estudiante debería hacer para desarrollar su comprensión del concepto.

puede construir realmente dicha transformación de forma explícita en su imaginación, por ejemplo pensar en términos de coordenadas horizontales y verticales, entonces decimos que el individuo ha *encapsulado* el proceso en un *objeto* cognitivo[5]. En muchos casos, los dominios y los rangos de funciones son conjuntos infinitos, de manera que estos mecanismos permiten a un individuo pensar sobre el infinito en estos contextos.

En la teoría APOE, el primer estado (A) se describe como "... una reacción a estímulos que el sujeto percibe como externos". Para Tall et al. (2000) la teoría parece dar a entender un estado inicial en el que el estudiante no tiene, ni puede tener, una visión del amplio desarrollo futuro de la teoría. La parte esquemática completa de la teoría (E) es, esencialmente, imposible de prever hasta que el estudiante ha alcanzado la última etapa (O) de encapsulación de los objetos. Interpretaciones más recientes de APOE (Czarnocha et al., 1999) sugieren una dialéctica más amplia en la cual "el desarrollo de cada nivel influye en los desarrollos tanto de los niveles superiores como inferiores", pero incluso así se ignora manifiestamente la actividad corporeizada más rica del cerebro según Lakoff y Jonson (Tall et al., 2000).

La idea de *conceptos espontáneos* de Cornu junto con la de *esquema conceptual* de Tall y Vinner fueron el comienzo de toda una sucesión de trabajos de investigación sobre el desarrollo y los conflictos cognitivos en matemática avanzada. Según Vergnaud (1990), el punto decisivo en la conceptualización es el paso de los *conceptos como instrumentos* a los *conceptos como objetos* y una operación lingüística esencial en esta transformación es la de *nominalizar*; pero, de acuerdo con él, un concepto no puede limitarse a su definición, al menos cuando hablamos de su aprendizaje y su enseñanza. Todo objeto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar[6], por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos. Duval, en cambio, indica que en matemáticas se prefiere hablar de "objetos matemáticos" que no de conceptos matemáticos, como si los entes matemáticos fueran partes de un mundo propio que tiene su origen en el conocimiento. Para Duval (1993) la noción de concepto se vuelve secundaria, mientras que lo que adquiere carácter prioritario es la pareja (*signo, objeto*), poniendo de manifiesto la paradoja que surge en el aprendizaje de los objetos matemáticos y su conceptualización:

> [⋯] por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no van a confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si no pueden tener relación más que con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo podrían ellos adquirir el dominio de los tratamientos

5. En muchos casos, los dominios y los rangos de funciones son conjuntos infinitos, de manera que estos mecanismos permiten a un individuo pensar sobre el infinito en estos contextos

6. Aquí *objeto* debe entenderse en el sentido de "objeto real" o de "cosa". Lo que eso significa se halla bien expresado en la *Metafísica* de Aristóteles, cuando afirma que la cosa, en cuanto parte de lo real, es lo que representa las características siguientes: tridimensionalidad, accesibilidad sensorial múltiple -es decir, más de un sentido por vez- independiente de las representaciones semióticas y posibilidades de separación material y de otras partes de la realidad, de otras "cosas"

> matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados?

Para Cornu (1981), en la actividad matemática las nociones matemáticas no sólo se usan según su definición formal, sino también mediante representaciones mentales que pueden diferir de un individuo a otro:

> Estos modelos individuales se elaboran a partir de *modelos espontáneos* -modelos que preexisten, antes del aprendizaje de la noción matemática y que tienen su origen, por ejemplo, en la experiencia cotidiana- e interfieren con la definición matemática. Observamos que la noción de límite denota, con frecuencia, una frontera que no se puede cruzar y a la cual podemos, o no, aproximarnos. A veces se entiende como alcanzable y otras veces como inalcanzable.

Con el fin de destacar el papel que juega la estructura conceptual de un individuo, Vinner y Hershkowitz (1980) introdujeron los términos *esquema conceptual* y *definición conceptual*. A partir de ellos, Tall y Vinner establecieron la distinción entre la forma individual de pensar sobre un concepto y su definición formal, distinguiendo así entre las matemáticas como una actividad mental y las matemáticas como un sistema formal. Durante los procesos mentales en los que se renombra y manipula un concepto entran en juego muchos otros procesos asociados que, consciente o inconscientemente, afectan su significado y uso. Se atribuye un nombre a un concepto cuando verlo u oírlo es un estímulo para nuestra memoria; normalmente, no es la definición del concepto, incluso en el caso en que el concepto tenga una definición. Según Tall y Vinner (1981)

> El cerebro humano no es una entidad puramente lógica. Su complejo funcionamiento está en desacuerdo, con frecuencia, con la lógica de las matemáticas. No siempre es pura lógica que nos revele algo, ni casualidad que nos haga cometer errores [⋯] Utilizaremos el término *esquema conceptual* para describir la estructura cognitiva total que se asocia a un concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados. Se construye a lo largo de años a través de experiencias de todo tipo, y va cambiando a medida que el individuo madura y se encuentra con nuevos estímulos[7] [⋯] Mientras se desarrolla el *esquema conceptual* no es necesario que sea coherente en todo momento. El cerebro no trabaja así. Entradas sensoriales excitan ciertas vías neuronales e inhiben otras. De esta manera estímulos diferentes pueden activar partes diferentes del *esquema conceptual*, desarrollándolas de tal manera que no es necesario obtener un todo coherente [⋯] A la parte del esquema conceptual que se activa en un instante determinado la denominaremos *esquema conceptual evocado*.

El esquema conceptual es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso de que el concepto tenga representaciones visuales pero también puede ser una colección de impresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las imágenes mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas a formas verbales. Pero es importante recordar que esta forma verbal no fue lo primero que evocó nuestra memoria. La mayoría de los conceptos de la vida cotidiana, como casa, naranja, gato, etc., se adquieren sin necesidad de definiciones. Por

7. Por ejemplo, el concepto de sustracción supone inicialmente un proceso que sólo implica números naturales. En esta etapa, el niño puede observar que la resta de un número siempre *reduce* la respuesta. Para tal niño esta observación forma parte de su esquema conceptual y puede causar problemas posteriormente cuando se encuentre con la sustracción de números negativos. Por esta razón, todos los atributos mentales asociados a un concepto, sea consciente o inconsciente, deberían incluirse en el esquema conceptual ya que pueden contener las semillas de un conflicto futuro.

otra parte, algunos conceptos, incluso de la vida cotidiana, pueden ser introducidos mediante definiciones (Tall y Vinner, 1981):

> Entenderemos por *definición conceptual* un conjunto de palabras utilizadas para especificar dicho concepto. Puede ser aprendido por un individuo de una manera puramente memorística o bien de manera significativa relacionándola en mayor o menor grado al concepto como un todo. También puede ser una reconstrucción personal de una definición llevada a cabo por el estudiante [⋯] Si la definición conceptual le es dada o construida por él mismo, aquella puede variar de una vez a otra. Así, una definición conceptual personal puede diferir de la definición conceptual formal, siendo esta la que es aceptada por la comunidad matemática en general. Para cada individuo, una definición conceptual genera su propio esquema conceptual -que podríamos llamar "esquema de la definición conceptual"-. Este es, por supuesto, parte del esquema conceptual. En algunos individuos puede estar vacía o, virtualmente, no existir. En otros puede o no estar coherentemente relacionada con otras partes del esquema conceptual.

Por lo tanto, una definición conceptual es una afirmación con palabras y símbolos que identifica un concepto particular. En matemáticas avanzadas, una definición conceptual especifica *precisamente* los requerimientos necesarios para que una noción dada pueda ser considerada un ejemplo de este concepto. Podría tener más atributos, pero nunca menos. Poincaré, según cita Tall (1988), apunta algunas ideas sobre lo que es una *buena definición*:

> Para los filósofos o los científicos es aquella que se aplica a todos los objetos con el fin de definirlos, sólo se aplica a ellos y satisface las reglas de la lógica. Pero en educación no es así; una buena definición es aquella que puede ser entendida por los alumnos.

Uno de los temas más recurrentes de discusión se refiere a "la diferencia entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos mediante los cuales son concebidos aquellos conceptos" (Vinner y Dreyfus, 1989)[8].

> Todos los conceptos matemáticos excepto los primitivos tienen definiciones formales [⋯] El estudiante, por otra parte, no utiliza necesariamente tales definiciones cuando debe decidir si un objeto matemático dado es o no es un ejemplo de tal concepto. En la mayoría de los casos, decide sobre la base de un *esquema conceptual*, es decir, el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, junto con todas las propiedades que lo caracterizan [⋯] El esquema de un estudiante es el resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto. Por lo tanto, el conjunto de objetos matemáticos considerados por el estudiante como ejemplos del concepto no es necesariamente el mismo que el conjunto de objetos matemáticos determinado por la definición. Si estos dos conjuntos no son el mismo, el comportamiento del estudiante puede diferir de lo que el profesor espera. Para mejorar la comunicación, necesitamos comprender porqué esto falla.

Tall y Vinner (1981) denominan *factor de conflicto potencial* a aquella parte del esquema conceptual o de la definición conceptual que puede entrar en conflicto con otra parte del esquema conceptual o la definición conceptual. No es necesario que tales factores sean evocados en

8. La idea de la formación de entidades conceptuales fue sugerida por Piaget (1977) en su distinción entre forma y contenido. Posteriormente, algunos investigadores han reconocido su valor en el aprendizaje de las matemáticas y ha sido denominada *encapsulación* (Ayers, Davis, Dubinsky, 1988), *reification* (Sfard, 1989), *operación de integración* (Steffe et al., 1988).

circunstancias que provoquen un conflicto cognitivo real, pero si lo son, entonces se les denomina *factores de conflicto cognitivo*. Un tipo más serio de factor de conflicto potencial es aquel en el que el esquema conceptual está en desacuerdo no con otra parte del esquema conceptual, sino con la propia definición conceptual formal. Tales factores pueden impedir seriamente el aprendizaje de una teoría formal. Cuando los estudiantes se encuentran con viejos conceptos en un contexto nuevo es el esquema conceptual, con hipótesis implícitas abstraídas de contextos anteriores, el que responde a la tarea. Si el esquema se ha construido sobre experiencias que entran en conflicto con la definición formal, esto puede conducir a respuestas que difieran de la teoría formal. Según Vinner (1983b), refiriéndose a la definición conceptual de función, para manipular conceptos uno necesita un esquema conceptual y no una definición conceptual; además las definiciones conceptuales permanecen inactivas o bien son olvidadas; al pensar, casi siempre será evocado el esquema conceptual.

Con el fin de representar sus ideas mediante diagramas, Vinner (1983a) propone la existencia de dos *células* diferentes en la estructura cognitiva, sin ningún significado biológico. Una de las células albergará las definiciones conceptuales y la segunda los esquemas conceptuales, pudiendo estar una de ellas o ambas vacías. Podría establecerse alguna interacción entre ambas células, aunque pueden formarse de manera independiente. Veamos qué ocurre cuando se introduce un concepto por primera vez por medio de una definición. La célula del esquema conceptual está vacía al principio. Tras varios ejemplos y explicaciones, se va rellenando gradualmente. Sin embargo no es necesario reflejar todos los aspectos de la definición conceptual. Pueden darse entonces los escenarios que a continuación se describen. La Fig. 1 recoge el largo proceso de formación de un concepto. No obstante, parece que para muchos profesores, en secundaria y bachillerato, el proceso de formación de un concepto es el representado en la Fig. 2, es decir, que el esquema conceptual se formará a partir de la definición conceptual y que estará completamente controlado por ella. Así, según esto, cuando se plantea a un estudiante una tarea cognitiva se activan las células del esquema conceptual y de la definición conceptual. Pero, de nuevo, parece que muchos profesores creen que el proceso intelectual implicado en una tarea intelectual debería esquematizarse por alguna de las siguientes figuras[9].

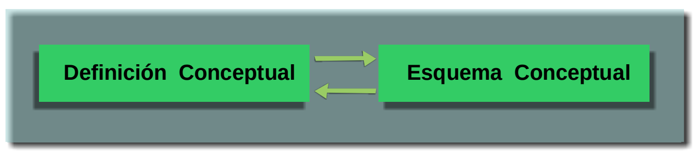


Fig. 1: Relación entre esquema conceptual y definición conceptual

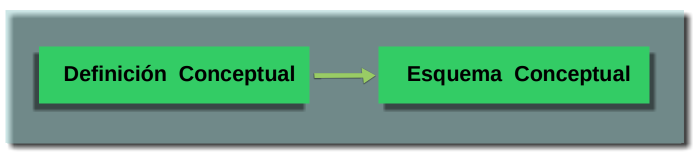


Fig. 2: Crecimiento cognitivo de un concepto formal

La característica común de todos los procesos ilustrados en las figuras 3, 4 y 5 es que no importa cómo reaccione el sistema de asociación cuando se plantea un problema en un contexto técnico; no se formula la solución antes de consultar la definición conceptual. Esto, por supuesto, sería el proceso deseable, pero desgraciadamente, la práctica es diferente. Es difícil entrenar un sistema cognitivo para actuar contra su naturaleza y forzarle a consultar las definiciones cuando se está formando un esquema conceptual o cuando se trabaja con una tarea cognitiva. Por lo tanto,

9. Las flechas en las figuras representan diferentes maneras en las que puede funcionar un sistema cognitivo un modelo más apropiado para lo que ocurre realmente en la práctica sería el de la figura 6. En este caso, la célula de la definición conceptual, incluso aunque no esté vacía, no es consultada durante el proceso de resolución del problema. El pensamiento cotidiano habitúa a asumirlo y el individuo es inconsciente de la necesidad de consultar la definición formal. No es necesario decir que en la mayoría de los casos, el recurrir a la célula del esquema conceptual es bastante exitoso, lo que a su vez no anima al sujeto a recurrir a la célula de la definición conceptual. Sólo en problemas no rutinarios, en los que un esquema conceptual incompleto podría resultar engañoso, es posible que se recurra a la definición conceptual. El uso impropio de definiciones no nos sorprende; en el caso extremo, pero familiar, las definiciones no se usan en absoluto. En un curso de matemáticas avanzadas se puede observar que los alumnos siguen habitualmente el esquema de la figura 6. Vinner lo denomina *respuesta intuitiva*. La mayoría de los profesores de matemáticas supone que tal respuesta tiene lugar cuando el alumno no conoce o no comprende

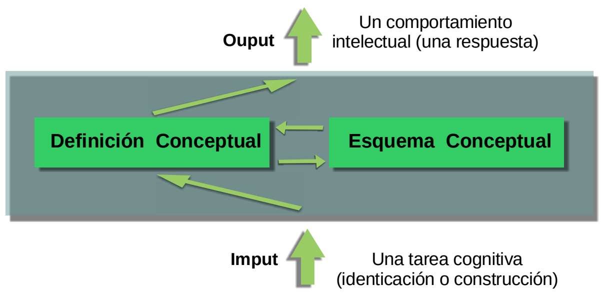


Fig. 3: Relación entre definición y esquema

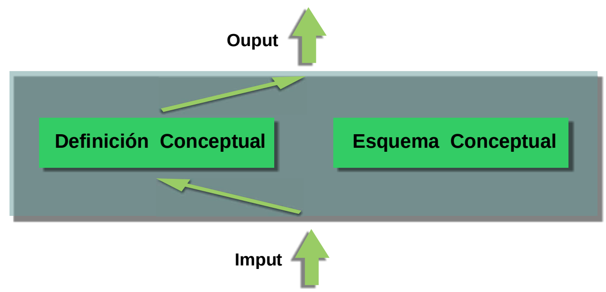


Fig. 4: Deducción puramente formal

la definición y que si un alumno es capaz de enunciar y explicar con precisión una definición, el éxito está en sus manos y las respuestas intuitivas se desvanecerán así como otras definiciones erróneas. Pero los datos sugieren lo contrario, lo que no deja de ser una sorpresa[10]. Cuando la definición conceptual entra en conflicto con su esquema conceptual, éste último gana. Para Vinner adquirir un concepto significa "significa crear el *esquema conceptual* del mismo, pero en el momento en que el esquema se ha creado, la definición se hace dispensable".

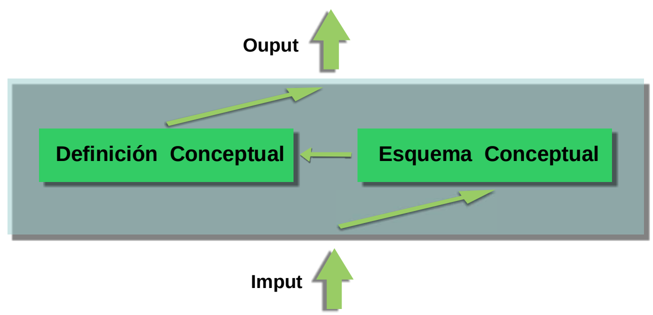


Fig. 5: Deducción siguiendo un pensamiento intuitivo

Cornu (1981) apunta que el esquema conceptual se convierte en un obstáculo cuando el estudiante se enfrenta con una situación en la que, debido a su incompletitud, el esquema conceptual es insuficiente. Es decir, el estudiante tiene un punto de vista que es demasiado estrecho,

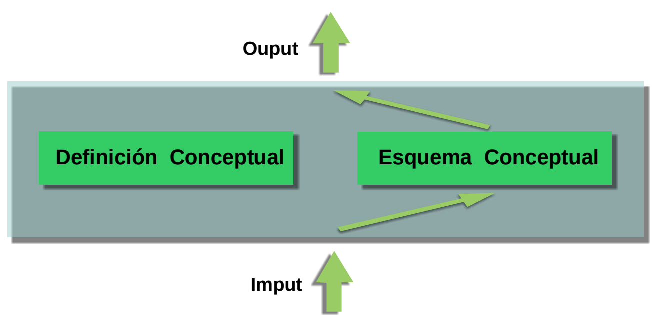


Fig. 6: Respuesta intuitiva

10. Por ejemplo, en Edwards y Ward (2004) una estudiante fue capaz de explicar la definición de decimal infinito dado en su curso de análisis real. Podía utilizar la definición para explicar porqué 0.3333.... = 1/3. Sin embargo, ignoraba la definición cuando justificaba que 0.9999... no era igual a uno. En su lugar, ella utilizaba su imagen conceptual, que se basaba en una larga división. Uno puede obtener 0.3333.... dividiendo 1 entre 3, argumentaba, pero no se puede conseguir 0.9999... dividiendo 1 entre 1. La definición que poseía fue ignorada. [La definición dada era: Sea $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ una sucesión de enteros con 0 # c_i # 9. El número Sup {$0.c_1c_2 \cdots c_n$ * n = 1, 2, 3,...} se denota por $0.c_1c_2 \cdots c_n \cdots$ y se denomina decimal infinito.

demasiado exclusivo y, por lo tanto, inapropiado para abordar una situación dada o para resolver un problema dado.

Para Azcárate (1998) y Azcárate y Camacho (*Ibíd.*), adquirir un concepto matemático consiste en construir un esquema conceptual del mismo. Saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado; en realidad, comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones. Sin embargo, como hemos visto anteriormente, la presentación y la organización de la mayoría de los libros de texto y de buena parte de las clases de matemáticas parecen basarse en la presunción de que los conceptos se adquieren mediante su definición y de que los estudiantes utilizarán las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas. Existe aquí un conflicto que Vinner (1991) expresa diciendo:

> Las definiciones crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas; representa, quizá más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos.

En cambio, Ouvrier-Buffet (2002) considera que el esquema conceptual y la definición conceptual son necesarios para analizar una actividad de definición-construcción, de hecho comparte la idea de Vergnaud: “un concepto no se puede reducir a su definición; es a través de situaciones y resolución de problemas como un concepto adquiere su sentido”. Es posible conseguir que los estudiantes construyan una definición de un objeto que sea accesible mediante sus representaciones, y es a través de ejemplos, contraejemplos y la definición obtenida como los estudiantes son capaces de construir sus esquemas conceptuales. Para Ouvrier-Buffet una definición no es un producto acabado, de ahí la necesidad del ejercicio; la actividad de definición-construcción podría formar parte del proceso de adquisición de un concepto pero las concepciones de los estudiantes sobre las definiciones matemáticas podrían ser un obstáculo para la formación del concepto.

Describiendo el esquema conceptual de un estudiante, es posible ayudarle a reorganizarlo en una estructura más coherente en consonancia con la definición conceptual. Para Dreyfus (1990) es posible, en general, utilizar la visualización como complemento para obtener una gestalt global de un concepto matemático, para mostrar sus partes fuertes y sus debilidades, sus propiedades y no propiedades, de manera que lo convierta en una necesidad lógica para formular claramente la teoría. La visualización, desde el punto de vista de la educación matemática, implica dos sentidos: la interpretación y comprensión de modelos visuales y la habilidad para traducir en imágenes visuales información que se de en forma simbólica. Así, parece pertinente preguntarse cuál es el efecto de una representación visual frente a una simbólica sobre los esquemas conceptuales que construye el estudiante; y más importante aún, si el uso de las representaciones visuales ayuda o dificulta la abstracción.

Para Tall (2001) el esquema conceptual crece y cambia con la experiencia y la reflexión. Tal entidad biológica no puede ser totalmente coherente entre las diversas partes del esquema conceptual desarrolladas en momentos diferentes y de maneras diferentes. Nuestros esquemas conceptuales están llenos de experiencias parciales que se centran en unos pocos aspectos de una situación vinculados todos ellos mediante diversas asociaciones.

Por último, es conveniente referirse ahora a la noción de *marco conceptual* que se introduce en el ámbito de la ciencia cognitiva por la similitud que encontramos con lo estudiado hasta aquí. Los marcos constituyen estructuras mentales que conforman el modo de interpretar nuestro entorno. Gracias a la ciencia cognitiva sabemos que la gente piensa mediante marcos. La neurociencia nos dice que cada uno de nuestros conceptos –los conceptos que estructuran nuestro modo de pensar a largo plazo- están incrustados en las sinapsis de nuestro cerebro. Los conceptos no son cosas que puedan cambiarse simplemente porque alguien nos cuente un hecho. Los hechos se nos pueden mostrar, pero para que nosotros podamos darles sentido, tienen que encajar con lo que está ya en las sinapsis del cerebro; de lo contrario, si los hechos no encajan en un determinado marco, el marco tiende a mantenerse y los hechos rebotan o bien entran y salen inmediatamente. Para Lakoff (2004), los marcos no pueden verse ni oírse; forman parte de lo que los científicos cognitivos llaman el "inconsciente cognitivo"; esto es, estructuras de nuestro cerebro a las que no podemos acceder conscientemente, pero que conocemos por sus consecuencias: nuestro modo de razonar. También conocemos los marcos a través del lenguaje; todas las palabras se definen en relación a marcos conceptuales y, de esta manera, cuando se oye una palabra, según Lakoff, se activa en el cerebro su marco o su colección de marcos. Cambiar un marco es cambiar el modo que tiene un sujeto de entender el mundo. Puesto que el lenguaje activa los marcos, los nuevos marcos requieren un nuevo lenguaje; pensar de modo diferente requiere hablar de modo diferente.

2.3. SOBRE LA ABSTRACCIÓN.

Para Tall (1991b) la *abstracción* se puede definir, en un primer intento, como la sustitución de un fenómeno concreto por conceptos cuya existencia se halla confinada en la mente humana. Los procesos de formalizar, definir y probar, aunque a veces son marginales en los niveles inferiores, tienen una importancia central en cursos de análisis avanzado. Los términos "generalización" y "abstracción" se utilizan en matemáticas tanto para denotar *procesos* en los que los conceptos se interpretan en un contexto más amplio como los *productos* de dichos procesos. Tall denomina *generalización expansiva* a aquella que amplía la estructura cognitiva existente del estudiante sin necesidad de cambios en sus ideas habituales. Por otra parte, una generalización que requiere una reconstrucción de la estructura cognitiva existente la llama *generalización reconstructiva*[11]. Una *generalización disyuntiva* es aquella en la que el estudiante puede ser capaz de operar sobre un rango más amplio de ejemplos, pero es probable que sea de poca duración como si simplemente se añadiese al número de fragmentos desconectados de información en la mente del estudiante sin mejorar la comprensión de implicaciones abstractas más amplias.

Según Piaget un estudiante puede progresar de un nivel de comprensión a otro nivel más elevado a través de la abstracción reflexiva y es posible observar fases de pensamiento intra-, inter- y trans-operacionales. La etapa intraoperacional se caracteriza porque el estudiante centra su atención en los objetos de una transformación aislada de otros objetos y acciones. El pensamiento

11. Por ejemplo el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es, para la mayoría de los estudiantes, una generalización expansiva, mientras que el espacio vectorial abstracto es tanto una abstracción como una generalización reconstructiva.

interoperacional se da cuando el estudiante construye relaciones entre estas acciones mediante la abstracción reflexiva; y, por último, en la etapa transoperacional, el estudiante reflexiona sobre estas interrelaciones y es capaz de transformarlas en objetos de un sistema más amplio. Piaget distinguía tres tipos fundamentales de abstracción. La *abstracción empírica* deriva conocimiento a partir de las propiedades de los objetos. El sujeto trata con experiencias externas, pero el conocimiento de estas experiencias es el resultado de construcciones que realiza internamente. La *abstracción pseudo-empírica* es intermedia entre la abstracción empírica y la reflexiva y separa las acciones que el sujeto ha realizado sobre los objetos. La *abstracción reflexiva* se define a partir de lo que Piaget denomina *coordinaciones generales* de las acciones y, como tal, su fuente es el sujeto y es completamente interna. Estos tipos de abstracción no son completamente independientes. Así, la abstracción reflexiva difiere de la abstracción empírica en que trata acciones en lugar de objetos y difiere de la abstracción pseudo-empírica en que está relacionada, no tanto con las acciones propiamente dichas, sino con las relaciones entre dichas acciones.

En relación con los métodos de construcción de la abstracción reflexiva, podemos distinguir cuatro tipos diferentes que serán importantes para el pensamiento matemático avanzado.

- La habilidad para utilizar símbolos, lenguaje, figuras e imágenes mentales, supone la realización de abstracciones reflexivas para representar, es decir, para construir procesos internos como una forma de dar sentido a los fenómenos percibidos. Piaget lo denominó *interiorización*.
- La composición o coordinación de dos o más procesos para construir uno nuevo, Piaget la denominó *coordinaciones generales* de las acciones.
- La *encapsulación* o conversión de un proceso -dinámico- en un objeto -estático-.
- Cuando un sujeto aprende a aplicar un esquema existente a una colección amplia de fenómenos, entonces decimos que el esquema ha sido *generalizado*.

Dubinsky y su grupo añaden un quinto a los considerados por Piaget:

- Una vez que el proceso existe internamente, es posible para el sujeto pensar en su inverso, no necesariamente en el sentido de deshacer o anular, sino como un medio de construir un nuevo proceso que consista en invertir el proceso original.

Asimismo, consideran que la abstracción reflexiva es la construcción de objetos mentales y acciones mentales sobre dichos objetos. Con el fin de elaborar su teoría y relacionarla con conceptos específicos de las matemáticas utilizan, como ya se ha señalado anteriormente, la noción de *esquema*.

El estudio de la abstracción reflexiva es complementario a la investigación de nociones tales como *obstáculos epistemológicos* estudiados por Cornu (1983) y Sierpinska (1985) o el conflicto, ya considerado, entre *esquema conceptual* y *definición conceptual* investigadas por Schwarzenberger, Tall y Vinner.

En la figura 7 se representa la estructura de un esquema. No se trata de una lista lineal de ítems, sino más bien un sistema de feedback circular. Los objetos abarcan todos los tipos de objetos matemáticos: números, variables, funciones, grupos, vectores, espacios, etc. Los procesos se construyen interiorizando las acciones o bien a partir de procesos ya existentes, por ejemplo invirtiendo aquellos. La teoría está relacionada con la forma en que los procesos son *interiorizados* para ser convertidos en rutina, *encapsulados* para ser considerados como conceptos, *coordinados* con el fin de seguir un procedimiento u otro, *invertidos* para realizarlos en el sentido opuesto y *generalizados*, para ser situados en contextos más amplios.

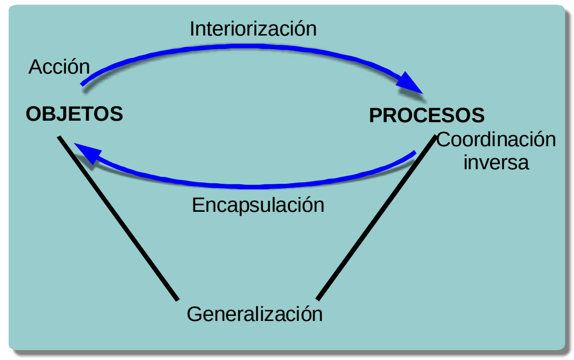


Fig. 7: Abstracción reflexiva

Por otra parte, Dubinsky y sus colegas sugieren que trabajar con ejemplos puede no ayudar mucho a la *construcción* de conceptos. La comprensión de las ideas matemáticas procede de fuentes diferentes a las de examinar muchos ejemplos y "abstraer sus características comunes", que es lo que ocurre si sólo existe abstracción empírica; no está claro que unos pocos ejemplos basten para construir un concepto. Es necesario algo más e indican que son precisamente los aspectos de la construcción de la abstracción reflexiva. Decir que el estudiante no ha entendido podría significar que el estudiante no tiene o no ha construido un esquema apropiado del concepto introducido. Pero si hablamos de que algo está construido, entonces se trataría de un esquema inapropiado. Eisenberg (1991) por su parte mantiene que si, como establece Dubinsky, no es posible observar directamente ninguno de los esquemas del sujeto ni sus objetos y procesos, entonces es muy difícil de representar con detalle cómo se aprende; tan sólo es posible en términos generales. Los estados del conocimiento pueden ser observados, pero no el tránsito desde un estado a otro. Debido a su complejidad es imposible observar un desarrollo continuo. Y sólo es posible inferir la estructura cognitiva de las conceptualizaciones del estudiante a través de los esquemas conceptuales que se infieren de sus comunicaciones escritas y verbales.

Para Cottrill (2003) las teorías que entienden la construcción de nuevos objetos mentales como acciones sobre objetos familiares tienen un inconveniente potencial. Si los objetos sólo se pueden construir a partir de acciones cognitivas sobre objetos ya establecidos, ¿de dónde vienen los objetos iniciales? La teoría de Piaget resuelve este problema indicando que las actividades preliminares del niño implican la percepción y la acción sobre el mundo físico. Una vez que el niño ha dado sus pasos iniciales en la abstracción empírica o seudo-empírica para construir entidades mentales, puede actuar para crear una jerarquía teórica de construcciones mentales. Dubinsky sugiere que un "objeto permanente" se construye "encapsulando el proceso de transformaciones del espacio sin destruir el objeto físico". Esta teoría sigue, por lo tanto, a Piaget partiendo de objetos físicos iniciales que no forman parte de la estructura cognitiva del niño y teoriza sobre la construcción de un objeto cognitivo en la mente del niño; es decir, formula la abstracción empírica como otra forma de encapsulación proceso-objeto.

2.4. INTUICIÓN Y MODELOS TÁCITOS.

2.4.1. SOBRE LA IDEA DE INTUICIÓN.

La intuición ha sido y sigue siendo un concepto difícil de atrapar mediante una definición unánimemente aceptada; se mueve entre los prejuicios de unos y los intentos de descripción de otros, entre su exclusión de los procesos de adquisición del conocimiento matemático y su reconocimiento e integración en los mismos. Para muchos matemáticos, la palabra intuición comporta una pesada carga de ambigüedad y misterio y consideran que los términos “intuición” y “rigor” son mutuamente excluyentes. En otros contextos parece denotar un acceso a la inspiración mediante el cual unos pocos afortunados logran en pocos instantes un conocimiento matemático que otros sólo pueden alcanzar tras largos esfuerzos. Pero la oposición entre ambos conceptos es una dicotomía falsa. La conclusión es ineludible: la intuición es el producto de los esquemas conceptuales del individuo y a medida que el individuo crezca en el pensamiento lógico, tales esquemas darán lugar, con más probabilidad, a respuestas lógicas, lo que resulta evidente al observar cómo los estudiantes pasan desde una intuición inicial basada en sus matemáticas preformales a intuiciones formales más refinadas según crece su experiencia (Ben-Zeev y Star, 2002).

En su ensayo *Hacia una intuición disciplinada*, Bruner (1972) caracteriza dos aproximaciones alternativas para resolver el problema en cualquier campo de la actividad intelectual:

> Una es intuitiva, la otra analítica [⋯]; en general la intuición es menos rigurosa que la demostración, más orientada al problema global que a las partes concretas, menos verbalizada con respecto a la justificación y basada en la confianza de operar con datos insuficientes.

Abundando en el concepto de intuición matemática, Bruner (1966) recoge dos sentidos muy diferentes para este término. Por una parte, lo asocia al surgir repentino de una solución tras largo tiempo de trabajar un problema y, por otra, a la capacidad de responder rápidamente con conjeturas y enfoques fructíferos a preguntas y problemas.

Para Falk (1994), la clave del pensamiento abstracto es su separación, no sólo de la percepción sensorial, sino incluso de las imágenes. La disociación de los aspectos familiares de la realidad y de las creencias fuertemente arraigadas puede capacitar la comprensión humana para superar la intuición. Podemos visualizar las estructuras mesocósmicas; esta habilidad se puede extender a otras estructuras que se puedan transformar en mesocósmicas mediante ampliación o proyección[12]. Pero, a pesar de tales extensiones, nuestro rango de visualización está limitado y así, en otras dimensiones, las estructuras pueden ser muy diferentes de las mesocósmicas. Por lo tanto, nuestras habilidades de visualización pueden fallar y nuestra intuición puede no ser adecuada. Pero el hecho de que ciertas teorías abstractas no puedan ser visualizadas no significa que no puedan ser comprendidas.

12. Vollmer (1984), citado por Falk (ibid.), mantiene que el conocimiento científico puede trascender nuestro mesocosmos. Con “mesocosmos” se refiere, grosso modo, al mundo de *dimensiones medias*, donde “media” se interpreta en un sentido amplio como perteneciente, no necesariamente a magnitudes espaciales, sino a la sección del mundo con la que interactúan nuestro sistema sensorial y motor. De acuerdo con Vollmer, la parte de nuestro conocimiento genéticamente condicionado se basa en la percepción y experiencia inmediatas. Este aparato cognitivo supone una herramienta para la supervivencia. Fue seleccionado para un entorno especial y se adaptó a nuestro mesocosmos. El nivel superior de conocimiento, el conocimiento científico, no está genéticamente determinado. No se encuentra acotado por los límites de nuestro mesocosmos.

La existencia de diferentes modos de pensamiento sugiere una distinción entre los procesos de pensamiento intuitivo y el pensamiento lógico que demandan los matemáticos. La intuición implica procesos muy diferentes de los procesos secuenciales paso a paso requeridos en la deducción rigurosa. Una intuición llega de manera completa a la mente y puede resultar difícil el separar los componentes en un orden deductivo lógico. Dreyfus (1991) mantiene que

> Para la mayoría de los conceptos matemáticos, la enseñanza no comienza en un territorio virgen. En el caso de los límites, antes de cualquier enseñanza sobre el asunto, el estudiante ya tiene un cierto número de ideas, intuiciones, imágenes, conocimientos, que proceden de la experiencia diaria, tales como el significado coloquial de los términos utilizados. Describimos estas concepciones de una idea, que tiene lugar previamente a la enseñanza formal, como *concepciones espontáneas* (Cornu, 1981 y 1983). Cuando un estudiante participa en una lección de matemáticas, estas ideas no desaparecen -contrariamente a lo que pueda pensar la mayoría de los profesores- Estas ideas espontáneas se mezclan con el nuevo conocimiento adquirido, modificado y adaptado para formar las concepciones personales de los estudiantes. Las ideas espontáneas viven durante mucho tiempo; las investigaciones muestran que pueden permanecer en los estudiantes hasta un estado muy avanzado del aprendizaje.

En general, cuando introducimos nuevos conceptos científicos o matemáticos, especialmente durante los primeros años de enseñanza, utilizamos modelos intuitivos. Tales interpretaciones intuitivas se corresponden con las propiedades del periodo de operaciones concretas y permiten que las nociones sean más accesibles a los estudiantes. Se supone que después se introducirán definiciones y significados más generales, más abstractos. Pero el efecto de primacía sugiere, y las investigaciones lo confirman, que estas interpretaciones iniciales se convierten en una ligadura muy fuerte de los conceptos respectivos y, en consecuencia, se hace muy difícil el escapar a su impacto.

Recientemente, la teoría de representación borrosa, *fuzzy-trace*[13], invierte el orden que sostenía Piaget de que al principio de nuestra vida somos niños intuitivos que nos convertimos, de adultos, en individuos analíticos. Por el contrario, esta teoría propone que es el razonamiento *verbatim*, rutinario y literalista, el que impera durante la infancia y la adolescencia. Después, con la madurez, es el pensamiento intuitivo, *quid*, el que se impone para tomar decisiones, despreciando los detalles que apartan del meollo del problema, que son filtrados y eliminados por nuestra experiencia, nuestras emociones, concepción del mundo, educación y otros factores. Al decidir, el proceder intuitivo, que capta la esencia del problema, tiende a producir respuestas “simplistas”, del tipo “blanco o negro”, “bueno o malo”, etc. A pesar de ello, esta forma de razonar es la más avanzada porque la tendencia a producir decisiones por este procedimiento aumenta con la edad, la experiencia y la pericia, según se demuestra en las investigaciones sobre niños y adultos.

---

13. La teoría “fuzzy-trace” pertenece a la clase de las teorías de “dualidad de procesos”; postulan que las personas, para llegar a conclusiones sobre las situaciones que se les plantean, se fundan en dos modos de razonamiento bastante diferentes: *verbatim* y *quid*. El primero de ellos consiste en un enfoque analítico, deliberativo, que se basa en conocimiento de detalle, como los ya recopilados mediante ejercicios rutinarios y la memorización de hechos. El razonamiento *verbatim* es “de repetición literal”. Por su parte, el segundo estilo de razonamiento, el *quid*, lejos de ser analítico, es “borroso”: se produce de forma inconsciente, y depende, sobre todo, de la intuición, lo que permite penetrar rápidamente hasta el núcleo, el *quid*, de la cuestión de que se trate. La palabra “trace” en la teoría fuzzy-trace hace referencia a las representaciones mentales, o trazas, que colectivamente constituyen la memoria. Los diferentes modos de razonamiento en la teoría de representación borrosa, verbatim y quid, no son mutuamente exclusivos; en realidad, pueden operar al mismo tiempo en una misma persona. Pero cada uno de ellos es predominante en diferentes etapas de la vida del desarrollo humano normal (Reyna y Farley, 2007).

Fischbein (1987) mantiene que es posible constatar una profunda contradicción entre la *naturaleza de las matemáticas* y la *naturaleza del razonamiento matemático*

> La dinámica del razonamiento matemático, y en general de todo tipo de razonamiento científico, incluye diversas componentes sicológicas como creencias y expectativas, imágenes inmediatas, analogías y paradigmas. No son meros residuos de formas más primitivas de razonamiento. Son ingredientes activos, genuinamente productivos de todo tipo de razonamiento. Los factores intuitivos han influido profundamente en el desarrollo histórico del concepto de número, de diversas geometrías, del cálculo infinitesimal, del concepto de infinito, etc. Fenómenos semejantes pueden ser detectados durante el proceso de instrucción. Esto apoya la hipótesis de que las formas intuitivas de razonamiento no son un mero estado transitorio en el desarrollo de la inteligencia; por el contrario, influyen en nuestra manera de resolver e interpretar a cualquier edad. Debemos tener presente que los conceptos basados en intuiciones no pueden ser eliminados simplemente con explicaciones verbales. Las intuiciones son siempre un producto de la experiencia personal, de la implicación personal del individuo en determinada actividad teórica o práctica.

Las cogniciones intuitivas pueden estar a veces de acuerdo con verdades lógicamente justificables, pero otras veces pueden hallarse en contradicción con ellas. En consecuencia, las intuiciones pueden facilitar los procesos de instrucción, pero, con frecuencia, pueden dar lugar a contradicciones convertirtiéndose en obstáculos epistemológicos en los procesos de aprendizaje, resolución o invención[14].

Tanto para Descartes como para Spinoza, en un mundo de apariencias engañosas y banales interpretaciones, la intuición se mantiene como la última fuente fidedigna de verdades absolutamente ciertas. Kant utiliza los términos *intuición intelectual* e *intuición sensible*. En la terminología de Kant la intuición se halla relacionada con el conocimiento sensorial, es decir, con la facultad para captar los objetos, mientras que la intuición intelectual simplemente no existe. Kant creyó que las matemáticas están fundadas sobre la pura intuición, no sobre el pensamiento. Para Bergson la intuición es además un método, un tipo de estrategia mental que puede permitir alcanzar la esencia de un fenómeno. Piaget también utiliza el término para indicar una cierta categoría de cogniciones y hace uso del término francés “autoevidencia” en un sentido muy parecido a la acepción intuitiva. En cambio, para Bunge (1962), las intuiciones pueden jugar un papel positivo en la ciencia sólo en una etapa pre-sistemática; la transformación experimentada por una intuición con el fin de convertirse en una componente útil de un razonamiento científico es tan profunda que cesa, de hecho, de ser una intuición. Por el contrario, DiSessa cree que las intuiciones no desaparecen del pensamiento de un científico. Por su parte, Bruner (1966) contrapone la intuición al pensamiento analítico, Poincaré a la lógica y Skemp (1971) pone frente

14. Algunos ejemplos históricos pueden ayudar a clarificar estas afirmaciones. ¿Cómo podemos explicar que la geometría euclidea -verdaderas matemáticas a pesar de todas sus imperfecciones- haya sido desarrollada en la antigüedad, mientras que las geometrías no euclideas apareciesen sólo en el siglo XIX, después de 2000 años? La geometría euclidea se basa afirmaciones intuitivamente aceptadas, incluyendo el famoso quinto postulado, y “nociones comunes”. Todas ellas son intuitivamente aceptables. Aristóteles distinguió entre axiomas, o nociones comunes, y postulados (Boyer, 1994). Construyendo deductivamente, uno tiene que comenzar a partir de algunas bases que pueden ser aceptadas sin demostración. Jugar con axiomas que contradijesen nuestra intuición significaría aceptar afirmaciones sin demostración y sin el sentimiento directo de su certeza. Las geometrías no euclideas no atentan contra la lógica pero son contraintuitivas. Una situación similar se da con el infinito. Recordemos en primer lugar la diferencia entre infinito potencial y actual. Se dice que un proceso es potencialmente infinito si suponemos que puede continuar siempre sin detenerse. El infinito actual se refiere a los conjuntos infinitos de elementos considerados en su totalidad. El proceso de división de un segmento es potencialmente infinito, mientras que la totalidad de los números naturales, racionales o reales constituye un ejemplo de infinito actual. Se ha mostrado que ya a los 11 ó 12 años se es capaz de aceptar intuitivamente la extensión potencialmente infinita de una línea o su división potencialmente infinita. Por el contrario, el infinito actual es contraintuitivo, es un concepto abstracto. Nuestra inteligencia está adaptada a magnitudes finitas y, en consecuencia, razonar con magnitudes infinitas conduce a aparentes paradojas.

al pensamiento intuitivo el reflexivo. Para Poincaré la lógica y la intuición juegan papeles complementarios en matemáticas; la lógica proporciona rigor y certidumbre sustituyendo nociones vagas y ambiguas por otras precisas, pero no perciben los objetivos ni captan aquello que motiva y organiza nuestra actividad matemática. Podemos seguir la estela lógica a través de un argumento aunque no "veamos" la idea que hay en él, pero para ello se precisa de la intuición que proporciona penetración, intención y dirección. No obstante, la intuición es a veces ambigua y a veces incluso engañosa, por lo que, en última instancia, sólo la combinación de la lógica y la intuición permiten ir avanzando.

Hahn (1956) argumenta contra la intuición en matemáticas en su ensayo *La crisis de la intuición*, en el que afirmaba su completa falta de fiabilidad. Considera que la propuesta de Kant de que las formas intuitivas de espacio y tiempo constituyen estructuras a priori a las que ajustamos todos los acontecimientos físicos que la experiencia nos presenta, ha sido sacudida por el curso que ha tomado la ciencia desde entonces. Hahn mantiene incluso que en geometría también cayó en descrédito la intuición hasta ser eliminada[15] y que incluso en cuestiones geométricas simples y elementales, la intuición es una guía totalmente informal:

> El hecho es que toda geometría -tanto tridimensional como multidimensional, euclidea como no euclidea- es una construcción lógica. Este hábito de usar la geometría ordinaria para la ordenación de nuestra experiencia, explica por qué consideramos esta geometría como intuitiva, y todo alejamiento de ella contraintuitivo, contrario a la intuición, intuitivamente imposible. Porque no es cierto, como Kant pretendía, que la intuición sea un medio de conocimiento puro *a priori*, sino más bien una fuerza de la costumbre enraizada en la inercia psicológica.

Por su parte, Davis y Hersh (1988) recogen algunos significados y giros que se dan en matemáticas a la palabra intuición:

- Intuitivo es opuesto a riguroso, si bien el significado de "riguroso" nunca está dado con precisión.
- Intuitivo significa visual, con lo que tiene una cualidad de la que carece la versión rigurosa. Pero, por otra parte, la visualización puede llevarnos a considerar como evidentes o verdaderos por sí mismos enunciados de dudosa validez, cuando no puramente falsos.
- Intuitivo significa plausible, o convincente aun sin demostración
- Intuitivo significa incompleto, con lo que la forma de reconocer la existencia de una laguna lógica es declarar que se trata de un razonamiento intuitivo.
- Intuitivo significa inspirado en un modelo físico, o en algunos ejemplos importantes. En esta acepción, intuitivo significa casi lo mismo que heurístico.
- Intuitivo significa holístico o integrador, entendido como contrario a detallado o analítico.

A veces la gente utiliza el término "perspicacia" para indicar una repentina reordenación de datos en el campo cognitivo. Los términos "revelación", en contextos religiosos, e inspiración, en

15. Uno de los principales acontecimientos en este desarrollo fue el descubrimiento de que, en contradicción aparente con lo que se había aceptado antes como intuitivamente cierto, hay curvas que no tienen tangente en ningún punto.

el terreno artístico, son utilizados como sinónimos de intuición. Con frecuencia, "sentido común", "razonamiento ingenuo" e "interpretación empírica" se suelen utilizar en relación con formas de conocimiento que pueden considerarse equivalentes al conocimiento intuitivo. Por lo tanto, no resulta ocioso preguntarse ¿cómo es posible que término tan confuso reaparezca insistentemente una y otra vez con un papel preeminente en muchos dominios importantes tales como la filosofía, la ciencia, las matemáticas, la ética, el arte, la religión? La dificultad en ver qué es la intuición está provocada por la exigencia de que las matemáticas sean infalibles. Para Davis y Hersh (1982)

> Tal vez sea absurdo y contraproducente, pero un profesor puede enseñar matemáticas y un investigador puede escribir artículos sin atender al problema de la intuición. Sin embargo, cuando uno no está haciendo matemáticas, sino está más bien observando a personas que hacen matemáticas y desea entender qué están haciendo, el problema de la intuición adquiere un carácter central e inevitable [⋯] El examen de la intuición tal como es experimentada en la realidad conduce a una noción difícil y compleja, pero no inexplicable ni imposible de analizar. El análisis realista de la intuición matemática es una meta razonable, y debería llegar a ser uno de los rasgos fundamentales de una adecuada filosofía de las matemáticas.

La intuición no es una percepción directa de algo existente externa y eternamente. Es el efecto que provoca en la mente la experiencia de ciertas actividades de manipulación de objetos concretos. Como fruto de esta experiencia, hay algo en la "pupila" de la mente -un residuo, un efecto- que constituye *su* representación. Una representación que es equivalente a la mía, en el sentido de que ambos obtenemos la misma respuesta a cualquier pregunta que se nos haga; o si nuestras respuestas son distintas, comparamos nuestras notas y averiguamos cuál es la respuesta correcta, garantizando cierta congruencia entre representaciones. Y lo hacemos, no porque se nos haya enseñado un conjunto de reglas algebraicas, sino porque nuestras imágenes mentales concuerdan una con otra. Janvier (1987) subraya el hecho de que la comprensión de conceptos matemáticos supone la automatización de acciones mediante la reflexión y que tales conceptos no comienzan a construirse desde el momento en que se introducen en clase por el profesor. Según Davis y Hersh (ibid.)

> Tenemos intuición porque tenemos representaciones mentales de los objetos matemáticos. Adquirimos estas representaciones no por memorización de fórmulas verbales, sino a través de experiencias repetidas. Ignoramos, desde luego, de qué modo alberga la mente estas representaciones y sabemos igual de poco acerca de cómo guarda la mente cualesquiera otros pensamientos o conocimientos. El punto clave es que en tanto que conceptos compartidos, en tanto que representaciones mentales mutuamente congruentes, son objetos reales cuya existencia es igual de "objetiva" que el amor materno o los prejuicios raciales, que el precio del té o el temor de Dios.

Un legado básico que nos ha dejado Fischbein es su original enfoque de los problemas educacionales centrado en la compleja noción de intuición. Pasaremos a considerar detenidamente su planteamiento que recoge buena parte de la tradición sobre el tema y que pretende conferirle cierto rigor a su tratamiento. Buena parte del presente trabajo se basará en los conceptos fundamentales relacionados con el conocimiento intuitivo que introdujo en su obra.

Para Fischbein (1987), la intuición se presenta en principio como un fenómeno primario describible pero reducible a componentes más elementales. De hecho, intuitivamente, la intuición tiene la apariencia de conocimiento *autoevidente* y *autoconsistente,* como la percepción de un color o la experiencia de una emoción. La intuición tiene sus raíces en el pensamiento sincrético del niño y de los seres humanos en los primeros estados de la civilización y expresa una profunda necesidad de nuestro comportamiento mental. No podemos dudar de todo continuamente; esto nos paralizaría. Algunas representaciones, algunas concepciones deben ser consideradas indudables. Una intuición es, por lo tanto, una concepción en la que la incompletitud o vaguedad de información está enmascarada por un mecanismo especial que produce la sensación de inmediatez, coherencia y confianza. Debido a la necesidad imperiosa de una certidumbre implícita como una componente absoluta de una actividad normal, práctica o mental, y debido a que la autoevidencia es conductistamente el último criterio para la certidumbre, continuamos y continuaremos siempre fabricando representaciones e interpretaciones aparentemente autoevidentes. Y esta es la *función de la intuición*, la de ofrecernos representaciones significativas, internamente estructuradas o intrínsecamente creíbles, incluso aunque tales cualidades no existan, de hecho, en la situación dada. Por su parte, Chiu (1996) ha mostrado que si una percepción particular o sucesión de percepciones es recurrente, la gente las organiza en nociones conceptuales autoevidentes, robustas y holísticas denominadas intuiciones, lo que correspondería a las intuiciones primarias de Fischbein que se consideran más adelante.

Es preciso distinguir ahora entre percepción e intuición. Una intuición es una teoría que implica una extrapolación más allá de la información directamente accesible, si bien es necesario precisar que no toda cognición directa es una intuición. Las percepciones son captadas directamente por los sentidos pero no son intuiciones. Las intuiciones son cogniciones intelectuales que expresan un concepto general -una noción, un principio, una interpretación, una predicción, una solución- mientras que las percepciones son cogniciones sensoriales; por ejemplo, veo una silla, un triángulo, etc. Así, las intuiciones se refieren a afirmaciones autoevidentes que sobrepasan a los hechos observables.

Para Fischbein, el individuo tiende siempre, casi automáticamente, a producir interpretaciones complementarias de las estructuras conceptuales las cuales, por su naturaleza, serían capaces de dotar a los conceptos utilizados de la credibilidad directa, la consistencia y la necesidad intrínseca requeridas para una conducta normal y productiva. Uno puede no ser consciente de la existencia y del impacto de estas interpretaciones y representaciones implícitas y esto es lo que hace que su control sea tan difícil. Las representaciones intuitivas no desaparecen del quehacer matemático sólo porque uno decida que perjudican el rigor de los procesos de razonamiento formal. Por el contrario, permanecerán debido a que son una parte integral de cualquier actividad intelectualmente productiva. Una intuición es, en consecuencia, una idea que posee las dos propiedades fundamentales de una realidad concreta y objetiva: *inmediatez*, es decir *evidencia* intrínseca, y *certidumbre*, no la certidumbre convencional y formal, sino la certidumbre inmanente, significativa prácticamente. Este carácter directo y autoevidente supone que las intuiciones son aceptadas como cogniciones sin que el individuo tenga la necesidad de probarlas o demostrarlas; así la afirmación “la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta” cumple esta propiedad.

La visualización es el principal factor que contribuye a la producción del efecto de inmediatez. Su papel es tan importante que, con frecuencia, se identifica el conocimiento intuitivo con la representación visual. El proceso de estructurar las representaciones visuales está gobernado por sus propias leyes, como describe la psicología Gestalt que pueden afectar al mismo proceso de intuición. Debemos tener presente que las representaciones visuales no son por sí mismas conocimiento intuitivo. Las imágenes visuales son un factor muy importante de inmediatez, pero la inmediatez no es una condición suficiente para producir la estructura específica de una cognición intuitiva. Más aún, las imágenes como modelos pueden introducir en el proceso conceptual propiedades y relaciones que no pertenecen propiamente a la estructura conceptual, puntos como marcas, líneas como bandas, etc., y esto puede perturbar el propio proceso de razonamiento.

En las intuiciones juega un papel esencial el exceso de confianza, lo cual no significa que sean siempre incorrectas sino que nos inclinamos a admitir, con un sentimiento absoluto, afirmaciones que objetivamente presentan un apoyo débil de datos empíricos o argumentos lógicos. El principal criterio para seleccionar nuevos datos está determinado por su contribución a aumentar la consistencia y la credibilidad de la interpretación intuitiva inicial, más que por la novedad objetiva y la riqueza de estos datos. El individuo tiende a pasar por alto la escasez de información con el fin de aumentar su credibilidad inmediata y el grado de confianza más allá de lo que está justificado por el conocimiento genuino que se posee. En tal caso se dice que el sujeto ha alcanzado lo que comúnmente se denomina *conocimiento intuitivo*. Consideremos con más detalle el mecanismo del exceso de confianza. El sujeto no es consciente, generalmente, de que la memoria está basada en un proceso de reconstrucción más que en uno de simple ampliación. En primer lugar, el exceso de confianza parece representar un fenómeno muy general; uno tiende de forma natural, casi instintivamente, a recurrir a soluciones, concepciones o interpretaciones que presenten un mayor grado de credibilidad aparente o intrínseca. Si una noción carece de este ingrediente, a los ojos del sujeto, es muy probable que la olvide o que no la utilice corrientemente. Pero, ¿qué produce dicha credibilidad intrínseca?; el mecanismo general es el de establecer una *estructura coherente*, una gestalt. El exceso de confianza compensaría así la ausencia virtual de confianza que habría sido, necesariamente, generada por una evaluación adecuada de nuestra ignorancia. Pero el exceso de confianza es un obstáculo para el autocontrol y, en consecuencia, puede bloquear la mejora significativa de un razonamiento. Es de gran importancia, por lo tanto, que el estudiante aprenda a identificar aquellas intuiciones que pueden distorsionar sus representaciones y confundir sus reacciones en relación con ciertas áreas del conocimiento.

Algunas cogniciones intuitivas, como efecto de su relevancia constante en la actividad de razonar, pueden alcanzar el statu de axiomas, postulados, principios o simplemente ideas preconcebidas. Representan la parte dura, la componente más resistente y estable de nuestro sistema cognitivo. La clara existencia de esta fortaleza intuitiva de nuestra conducta mental crea un dilema educativo fundamental. El profesor tiene que corregir los errores de sus alumnos, pero con frecuencia esto implica, más que un cambio en el nivel conceptual, una profunda reorganización de los grupos de creencias cognitivas. El alumno debe renunciar a varias de sus creencias fundamentales con respecto a la realidad y aceptar, y este es el más terrible de los descubrimientos, que mientras estaba absolutamente convencido sobre la verdad de cierta idea, tal idea era, en realidad, errónea.

Por otra parte, Fischbein distingue las siguientes situaciones referidas a las relaciones entre el conocimiento intuitivo y el conocimiento formal:

- Afirmaciones que son aceptadas sin demostración, sólo sobre la base de su evidencia intuitiva. En la geometría euclidea tales afirmaciones proporcionan los axiomas.
- Afirmaciones que parecen ser ciertas intuitivamente pero que, a pesar de ello, pueden y deber ser demostradas; por ejemplo, en un triángulo, la suma de dos lados es siempre mayor que el tercer lado
- Afirmaciones que no son autoevidentes y que deben ser demostradas para ser aceptadas; por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo es de dos ángulos rectos.
- Conflicto entre la reacción intuitiva ante una situación dada y la cognición que se alcanza a través de un análisis lógico; esta es la situación más interesante[16].
- Situaciones en las que dos representaciones diferentes del mismo problema pueden llevar a intuiciones contradictorias[17].
- Situaciones en las que enunciados matemáticos formales no están relacionados con ninguna representación intuitiva[18].
- Otra posibilidad es aquella en la que se trata con operaciones o conceptos matemáticos que son difíciles de aceptar tanto intuitivamente como formalmente. Didácticamente son las situaciones más complejas[19].

En general, para la enseñanza de las matemáticas, es muy importante que el profesor comprenda la interacción entre los aspectos intuitivos, formales y procedimentales en los procesos de comprensión, memoria y resolución de problemas. Si se desprecian las fuerzas intuitivas, continuaran influyendo en la capacidad de comprensión y resolución de los estudiantes, pero desgraciadamente de una manera incontrolada que perturbará normalmente el proceso de pensamiento matemático.

---

16. Puede ocurrir que el estudiante no sea consciente del conflicto. El estudiante no acepta, no comprende, el enunciado o resultado formal o, incluso cuando parece comprenderlo inicialmente tiende a olvidarlo si la interpretación intuitiva es la que decide la respuesta del estudiante.

17. Si consideramos el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6,...} parece intuitivo que el conjunto de los números naturales y el de los números pares no son equivalentes. Pero si consideramos la siguiente representación:

{1, 2, 3, 4, 5, 6,...}
{2, 4, 6, 8, 10, 12,...}

a cada número natural le corresponde un número par. Los dos conjuntos son intuitivamente equivalentes.

18. Muchos enunciados y fórmulas se hallan en esta situación, por ejemplo la fórmula para resolver las ecuaciones cuadráticas no tiene un respaldo intuitivo; los números complejos tampoco lo tienen. Para nociones contraituitivas se puede crear un nuevo contexto intuitivo; por ejemplo, el caso de los números complejos, pero el proceso intelectual para producirlo, comprenderlo y utilizarlo, es tan difícil que es prácticamente imposible transferir su “intuitividad” a los símbolos originales; los símbolos originales, por ejemplo $\sqrt{-1}$, continúan siendo contraintuitivos. Los modelos intuitivos son normalmente útiles, pero no siempre posibles; no es recomendable forzar el invento de modelos intuitivos artificiales para cualquier concepto u operación.

19. Por ejemplo, mientras que la operación 7635-5421 no presenta dificultades, la operación 1702-1368 no funciona intuitivamente y además precisa de convenciones formales para su realización.

2.4.2. CARACTERÍSTICAS DE LAS INTUICIONES.

En este apartado consideraremos algunas de las características propias del conocimiento intuitivo, con el fin de acotar su definición.

La *autoevidencia* es la propiedad fundamental de las intuiciones. Una cognición intuitiva es autoconsistente, autojustificable y autoexplicatoria. Pero, ¿cuáles son los mecanismos de evidencia? ¿Por qué algunos enunciados parecen autoevidentes mientras que otros, incluso más familiares, no lo parecen? Percibir la evidencia significa, de hecho, reconocer un invariante a través de diversas manifestaciones potencialmente diferentes, pero el hecho de que una noción esté ligada a un sistema de invariantes no asegura su autoevidencia. El individuo tiene que percibir el invariante o el sistema de invariantes con el fin de alcanzar el sentimiento de evidencia[20].

La *certeza intrínseca* o certidumbre y la autoevidencia, aunque están muy relacionadas, no son reducibles la una a la otra. La certeza no implica autoevidencia ni tampoco se da la implicación inversa. En general, cuando intentamos identificar la presencia de una cognición intuitiva tenemos que determinar hasta qué punto se presenta al individuo como una creencia intrínseca. La sensación de certeza no es un criterio absoluto de verdad objetiva ni tampoco lo es para el conocimiento intuitivo. La experiencia ha mostrado que las intuiciones más robustas, no importa sin son correctas o no, tienden a sobrevivir incluso cuando son contradichas por la instrucción formal. Una cognición intuitiva se asocia normalmente con un sentimiento de certidumbre, de convicción intrínseca, donde intrínseca significa que no se requiere ningún apoyo externo para mantenerla.

Las intuiciones ejercen un *efecto coercitivo* sobre las formas de razonamiento e imponen su propia subjetividad sobre el individuo como representaciones o interpretaciones únicas y absolutas, excluyendo en general otras alternativas como inaceptables. En la historia de las ciencias y las matemáticas este carácter coercitivo ha contribuido frecuentemente a la perpetuación de interpretaciones erróneas y a cierta reticencia para aceptar las correctas incluso tras haber sido probadas lógicamente. Es preciso hacer una distinción clara entre la coercitividad de un conocimiento intuitivo y la convicción inspirada en una demostración. Si se descubre que una demostración es errónea no es muy difícil, subjetivamente, renunciar a nuestra convicción. Pero una convicción intuitiva, una interpretación intuitiva no puede erradicarse fácilmente. Forma parte integral de nuestro esquema conceptual. El carácter imperativo de las intuiciones puede explicarse por el hecho de que no son, generalmente, concepciones mentales aisladas sino que se encuentran organizadas en estructuras comprehensivas. Así, no podemos renunciar fácilmente a nuestras intuiciones espaciales porque forman parte integral de nuestra forma de vivir y comportarnos.

Una intuición tiene *status de teoría,* nunca es una mera herramienta o la mera percepción de un hecho dado. El carácter teórico de las intuiciones implica ciertas consecuencias. Una intuición nunca se limita a establecer sólo la universalidad de una propiedad ni la percepción de un cierto hecho. En una intuición generalmente se capta la universalidad de un principio, de una relación, de una ley, o un invariante, a través de una realidad particular. Una intuición, por lo tanto, no es una

20. Entendemos por afirmación autoevidente expresiones tales como “el todo es mayor que cualquiera de sus partes”, “por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una y sólo una recta paralela”, “el camino más corto entre dos puntos es la línea recta”.

teoría pura sino una teoría expresada en una representación particular utilizando un modelo: un paradigma, una analogía, un diagrama, etc.

Una intuición siempre excede los datos de que dispone; sin embargo, su carácter *extrapolativo*, no basta para definir una intuición. Como hemos visto, una sensación de certidumbre también es una característica necesaria para una intuición; en cualquier otro caso sería una mera especulación. Esta combinación de información incompleta y certidumbre intrínseca es la que mejor caracteriza una intuición. El aspecto extrapolativo no es siempre evidente porque la aparente obviedad de las intuiciones actúa habitualmente de manera inconsciente. El papel fundamental de las cogniciones intuitivas es dotar de certidumbre a las ideas extrapoladas[21].

La intuición también presenta un carácter sintético y *global*, en oposición al pensamiento analítico que es de naturaleza discursiva. El carácter global de la intuición presenta reminiscencias del concepto de gestalt. La intuición es una cognición estructurada que ofrece un punto de vista unitario y global de una cierta situación. Podríamos pensar que las leyes que gobiernan la cristalización de las intuiciones derivan parcialmente de las leyes de gestalt, o al menos son similares a ellas[22]. Si las intuiciones están más o menos estructuradas o internamente organizadas ganarán estabilidad. La globalización se alcanza bien ignorando simplemente alguno de los componentes, contando con sólo unos pocos de ellos que permitan alcanzar rápidamente una estructura coherente, o bien organizando la mayoría de los componentes disponibles en una especie de síntesis, estructura unitaria y significativa, principalmente a través de procesos de jerarquización. El principal hallazgo en esta línea de investigación es que la mayor parte de los sujetos jóvenes y muchos de los adultos parecen confiar en sus evaluaciones intuitivas basadas en una única componente de la información proporcionada, mientras sus conclusiones son globales. La extrapolación de una parte del todo parece representar uno de los principales mecanismos de la globalización intuitiva. El sujeto cree que evalúa la situación global, pero en realidad sólo tiene en cuenta una parte de la información relevante.

Todas estas características pueden parecer contradictorias o al menos desconectadas. Mientras la inmediatez puede considerarse relacionada con la globalidad, ¿cómo encajan estos dos aspectos con la inferencia extrapolativa? La imagen parece convertirse en significativa y consistente si recurrimos a la metáfora de la percepción sensorial, pero una teoría es algo más que una simple metáfora. La intuición desempeña, a nivel intelectual, la misma función desempeñada por la percepción a nivel sensorial: la intuición es el preludio cognitivo directo a la acción, mental o práctica; organiza la información bajo una estructura intrínsecamente creíble y significativa desde el punto de vista de la conducta. Por otra parte, el carácter tácito de los procesos sobre los que se

---

21. El principio sobre el que descansa la inducción matemática no se alcanza mediante la experiencia. A través de la experiencia uno puede aprender que la inferencia bajo discusión es verdadera para los primeros diez o incluso los primeros cien números pero no para el conjunto infinito de los números naturales. La inducción matemática no se basa en convenciones, como algunos de los axiomas geométricos. Cuando se trata con el infinito, la experiencia y el razonamiento analítico no son capaces de alcanzar, por sí mismos, una base para la confianza absoluta. *La noción de infinito dinámico expresa directamente, en la forma más pura, la capacidad extrapolativa de la intuición misma*. Las cosas cambian radicalmente cuando intentamos pasar al infinito actual. Los teoremas cantorianos son generalmente inaceptables intuitivamente. A partir de este hecho uno puede aprender que la capacidad extrapolativa de la intuición no se aplica al carácter “actual” de conjuntos infinitos. Uno puede suponer que, sicológicamente, la universalidad captada por la intuición a partir de un ejemplo particular dado no se refiere a una universalidad actual sino más bien a una potencial. Un infinito actual dado es lógica pura, una construcción conceptual, no aceptable intuitivamente; no tiene un significado conductista, no es autoevidente ni intrínsecamente coercitivo (Fischbein, *Ibíd*.).

22. Si uno mira una fotografía en blanco y negro de una persona, uno reconoce inmediatamente a la persona, a pesar de que los valores absolutos de los colores y los tamaños son diferentes. Uno identifica la imagen captando la gestalt, no por consideración de los detalles.

basa una intuición complica el trabajo del investigador; no sólo la intuición oculta sus estrategias tácitas, sino que también se opone automáticamente a cualquier análisis ya que esto podría aniquilar su certidumbre intrínseca, su compacidad, su robustez.

2.4.3. CLASIFICACIÓN DE LAS INTUICIONES.

Procederemos ahora a clasificar las intuiciones. Una primera clasificación, bastante compleja, fue dada por Piaget, quien menciona varias dicotomías. En la primera de ellas distingue entre intuiciones *empíricas* y *operacionales*. Una segunda dicotomía, aplicada a las intuiciones operacionales, distingue entre intuiciones que van acompañadas de imágenes, intuiciones geométricas, e intuiciones que no poseen dicha propiedad tales como las operaciones con objetos discretos. Es difícil seguir la clasificación de Piaget debido a la generalidad que confería al término intuición y a que en su terminología la palabra “intuitivo” significa todo aquello que no es formal.

Para Fischbein, otra posibilidad es establecer una *clasificación basada en los roles*, es decir, en el papel jugado por las intuiciones de diferentes tipos en relación con otra actividad cognitiva. Se pueden distinguir cuatro tipos de intuiciones:

- *Afirmativas*: son representaciones o interpretaciones de diversos hechos aceptados como ciertos, autoevidentes y autoconsistentes, como por ejemplo “dos puntos determinan una línea recta”, “el todo el mayor que cada una de sus partes”, etc. En este tipo de intuiciones uno afirma o mantiene algo. Estas, a su vez, pueden ser categorizadas, según un cierto criterio, en *semánticas*, *relacionales* e *inferenciales* con una estructura inductiva o deductiva[23]. Las intuiciones afirmativas también pueden ser clasificas bajo otro criterio diferente en *básicas* que son todas aquellas que se desarrollan de forma natural en una persona -generalmente durante la infancia- y son compartidas por todos los miembros de una cierta cultura tales como representaciones del espacio y del tiempo, intuiciones relacionadas con la causalidad, con propiedades físicas básicas, etc. e *individuales* que son aquellas que uno adquiere en relación con su vida y sus actividades propias.
- *Conjeturales*: son aquellas que expresan una hipótesis sobre eventos futuros, sobre el curso de cierto fenómeno, etc.
- *Anticipatorias*: corresponden a la perspectiva preliminar y global que antecede al desarrollo analítico y completo de un problema.
- *Conclusivas*: resumen bajo un punto de vista global y estructurado las ideas básicas de la solución de un problema previamente elaborado. Estas dos últimas pueden considerarse agrupadas como intuiciones para la resolución de problemas.

Se ha enfatizado varias veces que las soluciones e interpretaciones intuitivas son una componente *sine qua non* de todo proceso de razonamiento productivo. El problema educacional no es eliminar las intuiciones, tanto afirmativas como anticipatorias; esto, parece imposible. El

23. Cuando uno encuentra que un cierto número de elementos tiene determinadas propiedades en común uno tiende intuitivamente a generalizar y a afirmar que el conjunto de todos los elementos posee dicha propiedad. Esto no es una operación lógica. La generalización aparece más o menos repentinamente con una sensación de confianza. Es una de las fuentes fundamentales de hipótesis en la ciencia. También pueden describirse formas deductivas de intuiciones inferenciales. Por ejemplo, a partir de A = B y B = C uno deduce directamente como una conclusión autoevidente que A = C.

problema es desarrollar tantas interpretaciones intuitivas nuevas y adecuadas como sea posible junto con el desarrollo de estructuras formales de razonamiento lógico.

Por último podemos considerar una *clasificación basada en los orígenes*:

- Intuiciones *primarias*. Aquellas que se desarrollan de manera natural sobre la base de la experiencia cotidiana, antes e independientemente de la instrucción sistemática. Las intuiciones no desaparecen en el periodo de operaciones formales. El término "intuiciones primarias" no implica que estas sean innatas o *a priori*.
- Intuiciones *secundarias*. Aquellas que son adquiridas a través de la intervención educativa[24].

Las intuiciones, tanto primarias como secundarias, son en realidad capacidades cognitivas aprendidas en el sentido de que son siempre el producto de una amplia y duradera práctica en algunos campos de actividad. La diferencia entre intuiciones primarias y secundarias no es absoluta. Es muy importante subrayar que intuiciones nuevas y correctas no sustituyen simplemente a otras primitivas e incorrectas. Las intuiciones primarias son, normalmente, tan resistentes que pueden coexistir con las nuevas, científicamente superiores y aceptables.

Consideremos, por último, la relación entre intuición y experiencia. La experiencia es un factor fundamental en la formación de intuiciones; de hecho, diferentes análisis tanto empíricos como teóricos mantienen que la fuente básica de las cogniciones intuitivas es la experiencia acumulada por una persona[25]. La experiencia tiene un papel fundamental en la formación de intuiciones porque en determinadas circunstancias crea expectativas estables; pero la experiencia puede generar intuiciones no sólo mediante patrones generadores estables de reacciones sino también mediante sistemas de creencias organizados, aparentemente autónomos. Se trata de convicciones implícitas que se adquieren a través de la experiencia[26]. Por otra parte, el individuo tiende a atribuir intuitivamente a nociones y operaciones mentales propiedades que pertenecen a realidades concretas, materiales[27]; se trata de una componente *práctica* de la intuición. El estudiante tiene que aprender que en matemáticas no todo es intuitivamente comprensible, visual o representable, que muchas afirmaciones expresan implicaciones lógicas de generalizaciones que van más allá de las limitadas posibilidades ofrecidas por las condiciones empíricas de nuestra vida terrestre. Si hay una intuición que debería crearse, piensa Fischbein, ésta es la intuición de lo no-intuitivo, la comprensión intuitiva del hecho de que muchas concepciones están, por su naturaleza, más allá de nuestras capacidades intuitivas, aunque sean racionalmente válidas.

---

24. Con el mismo significado, Klein utilizó el término *intuición refinada* y Severi escribió sobre el *segundo grado de intuición*.

25. Las representaciones del espacio constituyen un sistema complejo de concepciones que exceden los datos disponibles y el domino de la percepción en general. El espacio subjetivo es una interpretación de la realidad no una reproducción de la realidad. Se genera a partir de la experiencia pero excede a la experiencia. La intuición del espacio constituye un excelente paradigma para analizar varios aspectos de las relaciones entre experiencia e intuición.

26. Cuando afirma que una línea puede extenderse indefinidamente expresa una intuición. Esta intuición está relacionada con su experiencia; ha aprendido que puede extender una línea tanto como quiera y ningún obstáculo le impide continuar la operación; lo que necesita es suficiente papel y siempre se pueden ir añadiendo hojas de papel.

27. Uno es capaz, intuitivamente, de captar objetos, conjuntos o eventos que son o bien finitos o bien indefinidamente extensibles, pero no actualmente infinitos. Nuestros esquemas lógicos, en realidad, representan dispositivos de coordinación de nuestra experiencia -tanto práctica como social- y, por lo tanto, deben corresponder a las características generales de la experiencia. Una de estas características es, evidentemente, la finitud. Los objetos con los que tratamos prácticamente están limitados en el espacio. Los procesos están limitados en el tiempo, aunque en realidad pueden ser imaginados como indefinidamente extensibles. "Indefinidamente extensible" es equivalente a lo que denominamos infinito dinámico. Uno puede aceptar intuitivamente que una línea puede ser extendida indefinidamente pero esto, en realidad implica que, en todo momento, no importa la longitud del proceso tras haber comenzado, siempre tendremos, en la práctica, un segmento finito.

2.4.4. MODELOS MENTALES. MODELOS TÁCITOS.

Cuando una persona tiene que enfrentarse a una noción que es intuitivamente inaceptable o bien a un concepto abstracto o complejo tiende a crear, a veces deliberadamente a veces inconscientemente, sustitutos de dicha noción que sean más familiares, más accesibles o más fácilmente manejables. Tales sustitutos se denominan comúnmente *modelos mentales*. Analogías, paradigmas, metáforas, diagramas, etc. son todos modelos mentales. Son sucedáneos que nos ayudan a resolver diferentes clases de problemas. El concepto de modelo mental se refiere a representaciones mentales que sustituyen, en los procesos de razonamiento, a las entidades originales, normalmente con el fin de estimular y facilitar los esfuerzos de resolución.

En general, un sistema B representa un modelo del sistema A si, sobre la base de un cierto isomorfismo, una descripción o una solución dada en términos de A puede reflejarse consistentemente en términos de B y viceversa (Gentner y Stevens, 1983); es decir, si es posible trasladar las propiedades de A a B para obtener descripciones consistentes de A en términos de B, o bien para resolver problemas -originalmente formulados en términos de A- recurriendo a una traducción en términos de B. Con frecuencia se utiliza el término *metáfora* con el mismo significado que el de modelo, pero Fischbein prefiere este último en términos generales porque considera que con su ayuda se pueden abarcar sistemáticamente un rango mucho más amplio de fenómenos; además una metáfora supone una transferencia de significado de un concepto a otro y, según Fischbein, su incentivo básico es emocional. En muchos ejemplos, el uso del término *modelo mental* es más apropiado que el de metáfora o analogía ya que es, teóricamente, más rico en potencialidades. El nombre de *modelo intuitivo* se les da a aquellos modelos mentales que responden completamente a estímulos intuitivos y son aceptados inmediata y sólidamente. Esto quiere decir que hay una correspondencia directa entre la situación sugerida y el concepto matemático utilizado. Cuando un profesor sugiere persistentemente una imagen convincente y sólida continuamente confirmada por ejemplos y experiencias de un concepto, la imagen se convierte en un *modelo intuitivo*, si bien este modelo podría no corresponder todavía al modelo esperado del concepto. Existe también la categoría de *modelos parásitos*, creados mediante repetición, pero en absoluto deseados (Fischbein, 1985 y 1989 y D'Amore, 1999).

Los modelos presentan algunas restricciones básicas. En primer lugar, el modelo tiene que ser fiel al original sobre la base de un isomorfismo estructural entre ambos; y, en segundo lugar, el modelo debe gozar de una autonomía relativa respecto del original lo que implica que debe estar bien estructurado, ser internamente consistente y estar gobernado por sus propias leyes. Estas condiciones pueden conducir a requisitos conflictivos, siendo el peligro mucho mayor cuando en una actividad de razonamiento participan *modelos tácitos* incontrolados, ya que, normalmente, no somos conscientes de muchas de las propiedades de los modelos utilizados. Incluso cuando el modelo es utilizado conscientemente hay propiedades que actúan como componentes tácitas del mismo, propiedades subterráneas. Los modelos pueden ser abstractos o figurativos, analógicos, paradigmáticos o diagramáticos, tácitos o explícitos. Aquí nos centraremos en la dicotomía modelos tácitos frente a modelos explícitos auque también se revisará el resto de tipos de modelos.

Como ya hemos indicado, los modelos mentales son utilizados intencionadamente, conscientemente, pero otras veces no somos conscientes de su presencia y/o impacto; su consciencia puede haber sido olvidada. Estos son los *modelos tácitos*, que sustituyen algunos de los componentes originales del proceso de razonamiento. Esto tiene un efecto considerable sobre nuestras estrategias de pensamiento. Un modelo es parcialmente diferente del original y, por lo tanto, su relevancia es limitada. El modelo conlleva propiedades que no son relevantes para el original. Los modelos tácitos, al no ser controlados conscientemente continúan actuando e influyendo sobre los procesos de razonamiento sin que el individuo sea consciente de su origen y de su efecto y pueden conducir a interpretaciones y conclusiones distorsionadas. Debemos enfatizar que tanto adolescentes como adultos, aún siendo conscientes de la naturaleza abstracta de los objetos geométricos, continúan pensando en términos de modelos figurativos y dibujando sus conclusiones que pueden ser legítimas en términos de modelos figurativos pero que podrían conducirles a conclusiones incorrectas en lo que se refiere a los objetos geométricos. Es decir, los modelos pueden inspirar y apoyar inferencias matemáticas correctas con respecto a algunas propiedades o teoremas, pero también pueden llevar a conclusiones equivocadas con respecto a otros.

Una primera diferencia distingue, grosso modo, entre *modelos abstractos* y *modelos intuitivos*. Las relaciones matemáticas tales como fórmulas, funciones, etc. son normalmente modelos abstractos de ciertas realidades concretas. Un *modelo intuitivo* es, debido a su naturaleza, de tipo sensorial; puede ser percibido, representado o manipulado como cualquier otra realidad concreta. Para Fischbein, la influencia de los *modelos intuitivos tácitos* a lo largo del razonamiento matemático es más importante de lo que normalmente se reconoce; esta influencia no se limita a estadios preformales del desarrollo intelectual sino que incluso después de que el individuo sea capaz de realizar razonamientos formales, los modelos intuitivos elementales continúan influyendo en sus formas de razonamiento. Las relaciones entre lo concreto y lo formal en los procesos de razonamiento son mucho más complejos de lo que supuso Piaget. De hecho, no parece que atrajese su atención la idea de una influencia tácita de los modelos primitivos, intuitivos, sobre los procesos de razonamiento formal. En realidad, nuestros mecanismos para procesar la información están controlados no sólo por estructuras lógicas sino, a la vez, por un mundo de modelos intuitivos que actúan tácitamente y que imponen sus propias restricciones.

2.4.5. ANALOGÍAS, PARADIGMAS Y MODELOS INTUITIVOS.

Dos objetos o dos *sistemas* se dice que son *analógicos* si, sobre la base de una cierta semejanza parcial, estamos autorizados a suponer que las respectivas entidades también son semejantes en otros aspectos. Analogía implica semejanza de estructura. La esencia del pensamiento analógico es la transferencia de conocimiento de una situación a otra mediante un conjunto de correspondencias uno-a-uno entre aspectos de uno de los cuerpos de información y aspectos del otro. Una analogía intuitiva ayuda a obtener una representación icónica unitaria con un significado de conducta concreto con lo que es posible una comprensión intuitiva. El proceso de razonamiento se convierte entonces en un “objeto”, un sistema representativo con sus cualidades de inmediatez, globalidad, capacidad generativa, consistencia intrínseca y capacidad de extrapolación. Las analogías son una rica fuente de modelos y contribuyen como medio heurístico de generar hipótesis, o bien proporcionando una estructura intuitivamente accesible, facilitando operaciones mentales que podrían resultar difíciles sobre el sistema original. Los productos de estas operaciones mentales pueden ser interpretados y evaluados en términos del sistema original.

Por su parte, un *paradigma* se define por su función más que por sus cualidades intrínsecas; no es un mero ejemplo sino que es un caso particular o una subclase de una clase de objetos, utilizada como modelo. Sin embargo, un modelo no es necesariamente un paradigma; más aún, no todo ejemplo puede jugar el papel de paradigma. La diferencia fundamental entre un paradigma y una analogía es que, en el primer caso, el modelo está proporcionado por un ejemplo de la noción que va a ser interpretada, mientras que en el segundo caso, tenemos dos sistemas diferentes. Por otra parte, si tenemos que definir un concepto, es decir, describir sus propiedades generales o utilizarlo en relación con otros en un proceso de razonamiento, este concepto nunca funciona como una construcción lógica pura. El significado subjetivamente atribuido, sus asociaciones potenciales, implicaciones y diferentes usos están tácitamente inspirados por algún *ejemplar* particular, aceptado como representativo de la clase completa. Los ejemplos particulares, normalmente ligados a un concepto por una persona, juegan un papel activo en la formación de significados, interpretaciones y connotaciones e inspiran hipótesis, estrategias o decisiones. Su impacto tácito sobre los procesos de razonamiento es mucho más importante de lo que generalmente se supone ya que tendemos a ver la clase completa, el concepto íntegro, a través de estos ejemplos especiales.

Los *modelos tácitos paradigmáticos* son un factor esencial en la formación de nuestras aproximaciones intuitivas, interpretaciones y soluciones. Hay una profunda analogía entre el papel de los paradigmas, como lo definió Kuhn, en las revoluciones científicas y el papel de los modelos paradigmáticos en la actividad individual de razonamiento productivo[28]. Kuhn utiliza el término "paradigma" con referencia a un marco histórico-sociológico, mientras que aquí el término paradigma se refiere fundamentalmente a una experiencia personal, subjetiva. En ambos casos, como en su significado lingüístico original, paradigma implica el uso de ejemplos como *ejemplares*, como modelos que apoyan el proceso de universales. Se podría afirmar que el papel fundamental que juegan los paradigmas en las revoluciones científicas tiene sus raíces en este fenómeno psicológico fundamental: uno piensa en universales en términos de ejemplos estructurados, específicos. No somos, en general, conscientes de este doble juego porque normalmente vemos el universal a través del particular lo que, por otra parte, es una de la características fundamentales de las intuiciones. Los paradigmas forman parte de nuestros mecanismos intuitivos y, en realidad, son portadores del significado general. El problema está en que el entorno tácito del concepto sugerido por el paradigma puede diferir de una persona a otra, en función de su experiencia personal y sus informaciones, y que la definición paradigmática de los conceptos es, la mayor parte de las veces, un proceso incontrolado. Por lo tanto, el problema con un modelo paradigmático no es la capacidad de captar un significado general, lo que ocurre automáticamente, sino el identificar aquellas propiedades consideradas como generales en el ámbito de ciertas convenciones.

Según Fischbein los *modelos intuitivos tácitos*, tanto paradigmáticos como analógicos, juegan un papel fundamental en todo proceso de razonamiento productivo. No hay actividad de

28. "Por paradigma entiendo algunos ejemplos aceptados de la práctica científica actual, ejemplos que incluyen leyes, teoría, aplicación e instrumentación y que proporcionan modelos a partir de los cuales, como una fuente particular, el científico investiga" (Kuhn, 1984) razonamiento productivo sin sucesos intuitivos consistentes en globalización, concretización, extrapolación, etc. Un modelo ofrece al sujeto que quiere resolver un problema un sustituto del original que, por sus cualidades, está mejor adaptado a la naturaleza del pensamiento humano que el original. El papel esencial de un *modelo intuitivo* es, entonces, constituir un dispositivo que intervenga entre lo intelectualmente inaccesible y lo intelectualmente aceptable y manipulable[29].

Los procesos de producción y sustitución de intuiciones tienen lugar sólo hasta el establecimiento del periodo de operaciones formales. Fischbein mantiene que si ninguna instrucción externa, adecuada, sistemática y duradera interfiere después de los 12-13 años nuestras adquisiciones intuitivas permanecerán inalteradas. Nuestras intuiciones básicas, como aquellas relacionadas con el espacio, el tiempo, el movimiento, las diferentes conservaciones de Piaget, etc. elaboradas durante las etapas preoperacional y concreta no pueden nunca ser completamente erradicadas. Su carácter coercitivo puede debilitarse, puede llegar a ser menos influyente, pero no puede suprimirse. En consecuencia, pueden aparecer conflictos entre las viejas y fuertes creencias intuitivas y las nuevas de elevada prioridad conceptual. Una contribución importante de DiSessa es haber mostrado que incluso en el pensamiento de los científicos más sofisticados, el apoyo de la comprensión intuitiva de conceptos no pierde su impacto. Los científicos necesitan también, muy a menudo, modelos aparentemente autoexplicatorios, concretos, fuertemente organizados, etc. pero, a diferencia del pensador ingenuo, aquellos son capaces de seleccionar los modelos intuitivos que son científicamente aceptables, analizarlos y controlarlos conceptualmente.

2.4.6. ESTABILIDAD Y RESISTENCIA DE LAS INTUICIONES.

Como ya hemos indicado, una de las principales características de las intuiciones es su resistencia al cambio, su reluctancia a admitir alternativas. Kruglansky y Ajzen (1983) se refieren a este fenómeno como *congelación epistémica*. Pero, ¿cuáles son los mecanismos mediante los cuales se alcanza la perseverancia de intuiciones? Un factor básico, ya mencionado, es el de la experiencia, sobre todo para las intuiciones básicas; la experiencia implica un cierto grupo de restricciones y requerimientos, pero a la vez ofrece numerosas oportunidades para confirmar y reforzar las creencias correspondientes. Un segundo factor relacionado con el anterior se refiere a la naturaleza de nuestros esquemas mentales. Cada periodo del desarrollo intelectual está caracterizado por la emergencia de un cierto número de esquemas intelectuales fundamentales.

La estabilidad de las intuiciones está relacionada con la estabilidad y coherencia interna de los esquemas mentales. Su especificidad consiste en su carácter implícito y en su tendencia a alcanzar la apariencia de cogniciones cerradas y autoconsistentes. Estas propiedades se consiguen, sobre todo, a través de un tipo de automatización y condensación de mecanismos subyacentes. La resistencia de las intuiciones a alteraciones expresa la tendencia de los respectivos sistemas de esquemas a conservar su unidad, su jerarquía y su papel conductista. Puede suponerse que, al menos en ciertas condiciones, las concepciones iniciales sobreviven durante mucho tiempo no sólo

29. La fórmula $s = \frac{1}{2} g t^2$ es el modelo abstracto de la relación entre espacio y tiempo en la caída libre. La representación de Bohr del átomo está basada en una analogía con el sistema planetario. Una parábola es un modelo paradigmático o prototipo de una cónica. Utilizando un modelo vectorial podemos obtener la magnitud y dirección de la fuerza resultante de varias fuerzas con un mismo punto de aplicación. Pero en los procesos de razonamiento también pueden intervenir modelos de los que no se es consciente y que sustituyen tácitamente alguno de los componentes originales del proceso de razonamiento. Tales modelos pudieron ser inicialmente conscientes pero después, su consciencia original pudo ser olvidada. Estos modelos continúan actuando e influyendo en los procesos de razonamiento sin que el individuo sea consciente de su origen ni de sus efectos.

porque representan una primera experiencia sino porque fueron elegidas desde el principio de manera que su estabilidad estuviese garantizada.

El *cierre* prematuro es uno de los mecanismos básicos de las intuiciones; pero hemos de observar dos aspectos en este contexto. Nos referiremos al primero como el concepto de cierre propiamente, un concepto importante de la psicología Gestalt. Uno tiende, de manera natural, en el nivel perceptivo a "cerrar" una figura percibida, a completar los saltos, si los hay, con el fin de obtener una imagen que encaje en nuestros esquemas familiares, que sea aparentemente autoconsistente, que sea manipulable como un objeto, como un todo. Pero como es difícil condensar en un conglomerado sintético, global, una información discontinua, tendemos automáticamente a rellenar, intuitivamente, los huecos para "cerrar" la figura y reducir la incertidumbre.

La principal razón de la resistencia al cambio de las intuiciones, como ya hemos visto, es que las intuiciones están relacionadas con sistemas bien estructurados de nuestra actividad adaptativa y nuestro comportamiento cognitivo. Por esta razón, una intuición no se puede cambiar mediante un dispositivo mental aislado. Fischbein considera que las intuiciones cambian junto con el sistema adaptativo completo al que pertenecen. Con el fin de comprender esta afirmación, recurre al concepto de *esquema*. Los sistemas adaptativos mencionados anteriormente se refieren, en realidad, a lo que en la literatura cognitiva se conoce como *esquema*. Hay dos interpretaciones posibles de este término. De acuerdo con una interpretación usual y amplia, el término esquema indica un tipo de representación simplificada o condesada de una clase de objetos o eventos como el esquema de un rostro, la sucesión de acciones para resolver una cierta clase de problemas, etc. Una segunda interpretación del término esquema expresa el punto de vista piagetiano respecto al comportamiento adaptativo de un organismo. Para Piaget el comportamiento adaptativo se alcanza a través de dos aspectos constitutivos básicos: asimilación y acomodación; su significado es el mismo en biología y psicología. La diferencia principal entre la primera interpretación y la segunda es que en la primera un esquema es un dispositivo ejecutivo limitado y específico, mientras que en la segunda interpretación un esquema juega un papel adaptativo general en nuestro comportamiento cognitivo. En esta segunda interpretación un esquema representa una precondición que depende de la capacidad de una persona para procesar e integrar una cierta cantidad de información y responder adecuadamente a una clase de estímulos. En este caso el esquema depende tanto de la maduración intelectual del individuo como de un entrenamiento suficiente. Así, un esquema es un *programa*, en el sentido informático, que capacita al individuo para almacenar, procesar, controlar e integrar mentalmente información y para reaccionar significativa y eficientemente frente a estímulos del entorno.

2.5. CORPOREIZACIÓN Y PENSAMIENTO METAFÓRICO.

Desde hace algunos años está siendo aceptado de manera amplia que el aprendizaje y práctica de las matemáticas no son actividades puramente intelectuales, aisladas de factores sociales, culturales y contextuales. En lugar de ello, se ha reconocido que aprender y enseñar tiene lugar, y siempre ha tenido lugar, en contextos sociales que no sólo influyen sino que esencialmente determinan los tipos de conocimientos prácticos que se construyen. Investigaciones recientes en Educación Matemática han enfatizado la naturaleza intuitiva y perceptiva de las ideas y los símbolos matemáticos. Tales investigaciones tienen como objetivo de estudio los fundamentos cognitivos y las estructuras conceptuales de las matemáticas. Sugieren conexiones con estudios sobre el comportamiento y la estructura del cerebro, en particular en términos de cómo elabora y administra las percepciones. Este enfoque supone la implicación de otros campos como la biología, la psicología, la lingüística y la neurociencia y aporta razones por las que el conocimiento matemático parece estar profundamente enraizado en mecanismos biológicos, neurológicos y cognitivos y sometido a restricciones emocionales, históricas y culturales, todas ellas vinculadas a la experiencia cotidiana (Berthoz, 1997; Dehaene, 1997, Lakoff y Núñez, 2000).

Las dos mayores teorías sobre el desarrollo cognitivo son la del conocimiento corporeizado de Lakoff y otros autores y el desarrollo de las matemáticas simbólicas a través de la encapsulación proceso-objeto de Dubinsky, Tall y otros. En este apartado consideraremos los elementos de una teoría que se centra en cómo la cognición humana tiene fundamentos corporales, es decir, es *corporeizada* con un contexto biológico y físico compartido y examinaremos las maneras en que este *corporeización* ayuda a determinar la naturaleza del pensamiento y comprensión matemáticos. La hipótesis fundamental es que la base de esta situación procede de la naturaleza compartida de la acción y experiencia corporales, observadas a través de los procesos cognitivos corporeizados básicos y los sistemas conceptuales.

La ciencia cognitiva surgió en los años 70, si bien sus bases datan de los años 50 en el terreno de la inteligencia artificial, apoyándose en nuevos resultados en los ámbitos de la neurociencia, la psicología, la antropología y la lingüística. El término ciencia cognitiva fue acuñado por Christopher Longuet-Higgins en 1973 en una investigación sobre Inteligencia Artificial. Los principales investigadores en ciencia cognitiva de esa época estuvieron de acuerdo en que para explicar la cognición humana era necesario, y suficiente, postular un nivel de análisis separando completamente lo biológico y neurológico por una parte y lo sociológico y cultural por otra. Este nivel de separación del análisis se centraba en el individuo como un procesador de información y caracterizaba el razonamiento como la manipulación de símbolos arbitrarios. Esta escuela de ciencia cognitiva -cognitivismo- mantuvo el dualismo cartesiano según el cual la mente es una entidad abstracta, separada del cuerpo y que transciende a éste. El cognitivismo está así basado en el objetivismo, la doctrina que supone que existen verdades ontológicas transcendentales que son independientes del la comprensión humana. En los años 80 surgen un cierto número de perspectivas alternativas en la ciencia cognitiva. Mas que postular a un observador que participa de una realidad predeterminada, este paradigma establece que la realidad es construida por el observador, basada en formas no arbitrarias culturalmente determinadas que en última instancia se basan en experiencias corporales.

2.5.1. EL SIGNIFICADO DE *CORPOREIZACIÓN*.

En lenguaje coloquial *corporeización* –literalmente "poner el cuerpo en la mente"- significa "dar cuerpo, o bien un aspecto físico, a un concepto abstracto"[30]. En la ciencia cognitiva, al tratar

30. En inglés se refiere a una entidad física que tipifica una abstracción; encarnación, manifestación, materialización, objetificación, personalización, personificación, sustanciación, etc. Algunos otros significados en inglés: una nueva personificación de una idea familiar, una representación concreta de un concepto nebuloso, dar forma concreta a un concepto abstracto, representación, manifestación. Por otra parte, el término objetificación tiene dos significados; por una parte se refiere al acto de representar una abstracción como algo físico y, por otra, a la representación concreta de una idea o principio abstractos; en cierto sentido es un sinónimo de reificación.

los procesos del pensamiento humano, la idea de *corporeización* opera habitualmente en sentido inverso; esto es, el cerebro humano al trabajar con las sensaciones corporales de la percepción y la acción, da lugar a conceptos teóricos que se basan necesariamente en la experiencia corporal. Y así es como ha proliferado el uso del término en ciencia cognitiva. El conocimiento corporeizado niega el desdoblamiento mente-cuerpo y mantiene la dependencia entre ellos; grosso modo, la actividad de la mente hunde sus raíces en la actividad del cuerpo. En nuestro caso, nos interesa principalmente la forma en que el cuerpo humano afecta nuestras conceptualizaciones de las matemáticas. Para algunos autores, *corporeización* se refiere a los aspectos fenomenológicos de la experiencia corporal humana y las manifestaciones psicológicas resultantes. Otros se centran en la organización de las acciones corporales bajo principios de sistemas dinámicos no lineales. Y aún otros enfatizan la definición biológico-estructural que existe entre los organismos y el medio en el que existen[31]. Desde la perspectiva de Núñez, *corporeización* no consiste simplemente en la experiencia consciente de los individuos de algunos aspectos corporales de ser o actuar en el mundo; tampoco implica necesariamente comportamientos conscientes de su influencia ni se refiere a la manipulación física de objetos tangibles, como jugar con las regletas Cuisinaire o con bloques, ni a la manipulación virtual de imágenes gráficas y objetos inmediatos a través de la tecnología. Desde este punto de vista, la noción de unas matemáticas objetivas e inmateriales, *descorporeizadas*, independientes de la comprensión humana no tiene ningún sentido. Por lo tanto, será preciso dar cuenta de unas matemáticas basadas en la mente, justificando su estabilidad y eficacia en términos de las características corporales y los sistemas conceptuales de las que surgen. La comprensión inconsciente y las primeras experiencias corporeizadas influyen en el lenguaje que usamos para describir el mundo y comunicarnos con otros. La corporeización, tanto si se expresa mediante estructuras conceptuales fundamentales, mediante lenguaje verbal o bien mediante gestos físicos, ayuda a proporcionar un puente entre el mundo y cómo aprendemos y pensamos sobre él (Edwards, 2004). Para Lakoff (1987)

> Un concepto es *corporeizado* cuando su contenido u otras propiedades están motivadas por experiencias corporales o sociales [⋯] La corporeización proporciona así un vínculo no arbitrario entre cognición y experiencia.

Lakoff realiza un esfuerzo por establecer la *corporeización* del pensamiento mediante la combinación de lingüística y ciencia cognitiva. En 1980, con Mark Johnson, publicó *Metáforas de la vida cotidiana* en el que revelan la forma en que las expresiones lingüísticas se sustentan en percepciones y acciones *corporeizadas*. Estas se aplican, en particular, a las ideas sobre las que se apoyan las matemáticas. En Lakoff (1987) se describen dos formas diferentes de corporeización:

> *Corporeización Conceptual:* la idea de que las propiedades de ciertas categorías son una consecuencia de la naturaleza de las capacidades biológicas humanas y de la experiencia de funcionamiento en un entorno físico y social.
>
> *Corporeización Funcional:* la idea de que ciertos conceptos no son comprendidos intelectualmente, sino que más bien son utilizados automáticamente, inconscientemente y sin un esfuerzo apreciable como parte del funcionamiento normal. Los conceptos utilizados

31. El concepto de corporeización ha sido ampliamente utilizado desde mediados de los años 80 en la ciencia cognitiva y la IA con términos tales como "Mente corporeizada" (Varela et al., 1991; Lakoff y Johnson, 1999), "Inteligencia corporeizada" (Brooks, 1991), "Acción corporeizada" (Varela et al., 1991), "Cognición corporeizada" (Clark, 1997), "Ciencia cognitiva corporeizada" (Pfeifer y Scheier, 1999; Clark, 1999).

> de esta manera presentan un statu sicológico diferente y más importante que el de aquellos que son pensados conscientemente.

La noción del *corporeización conceptual* está más próxima al significado habitual del término que utiliza Tall para el *mundo corporeizado*. La *corporeización funcional,* en el sentido expresado por Lakoff, está siempre presente en los tres mundos matemáticos de Tall como veremos más adelante. La mano que escribe símbolos o dibuja imágenes, el ojo que se fija en esos símbolos o imágenes se comportan como una parte inconsciente, automática, del funcionamiento normal. Al hablar del mundo corporeizado, Tall se refiere a los experimentos mentales que relacionan nuestras percepciones y acciones. En sucesivos trabajos, los requisitos de Lakoff para la corporeización se hicieron más específicos. Lakoff y Johnson (1999) mantienen que los conceptos corporeizados se relacionan directamente con nuestra percepción del mundo:

> Un concepto corporeizado es una estructura neurológica que, en realidad, forma parte del, o bien hace uso del, sistema sensomotor de nuestros cerebros. Muchas de las inferencias conceptuales son, por lo tanto, inferencias sensomotoras.

En su libro *Where Mathematics Comes from*, con Núñez, publicado en 2000, se da un paso más allá al establecer que toda matemática es corporeizada, rechazando la posibilidad de que podamos "conocer" matemáticas mediante un sistema externo independiente del pensamiento humano. Puesto que el conocimiento matemático es concebido en el cerebro humano, este argumento es intachable; el crecimiento del niño comienza con la actividad sensomotora y esta es la raíz de nuestro desarrollo. Sin embargo, algo ocurre tras el periodo sensomotor que Piaget identificó como una de las etapas sucesivas de desarrollo. La naturaleza de este desarrollo y sus vínculos con la experiencia sensorial son los que tienen una importancia fundamental en el crecimiento matemático. Tal crecimiento comienza con operaciones sensomotoras y continúa con los vínculos consiguientes a las áreas sensomotoras del cerebro. Sin embargo, la afirmación de que todas las ideas matemáticas continúan basándose en vínculos con el sistema sensomotor es cuestionable desde el punto de vista de Tall y otros autores, e incluso si es así aún queda la cuestión más importante de si los vínculos sensomotores ocupan un lugar más central que los nuevos vínculos con otras áreas. Los vínculos entre neuronas no son sólo rutinas del subconsciente sino que también pueden cesar en su actividad y atrofiarse. Edelmann y Tononi (2000), por ejemplo, escriben:

> Mientras se aprende una tarea se practica y su realización se hace más y más automática; mientras esto ocurre va desapareciendo de la consciencia y el número de regiones del cerebro involucradas en la tarea se va haciendo cada vez menor.

La construcción y pérdida de conexiones es una parte importante del desarrollo del cerebro. Mientras nuestro elevado funcionamiento va haciendo un mayor uso del córtex, los centros de atención de estas áreas van acompañados por la inhibición de vínculos anteriores, además de convertir en rutinas otras tareas. En consecuencia, se requieren bastantes más investigaciones para averiguar hasta qué punto está relacionado nuestro pensamiento formal con las regiones sensomotoras.

Los estudiantes pueden utilizar corporeizaciones inapropiadas para dotar de significado a ciertos aspectos de la teoría formal que suponen imágenes conceptuales coercitivas que impedirán ver con generalidad los argumentos formales. Un argumento formal funcionará para toda corporeización que satisfaga los axiomas, no sólo para una corporeización particular que el individuo pueda tener in mente en un momento determinado. Los matemáticos han sabido durante muchas generaciones que las imágenes conceptuales intuitivas sensomotoras pueden conducir a caminos inapropiados en matemáticas. Los pensadores formales han luchado contra la *corporeización* que llevaba a conclusiones erróneas y han buscado métodos lógicos que les liberaran de las cadenas de su herencia biológica; las matemáticas axiomáticas son el resultado de esta batalla, es el intento de formularlas utilizando solamente axiomas simbólicos explícitos y deducción lógica, liberándolas de la influencia coercitiva de la percepción. Es en este sentido, el de las matemáticas formales, en el que Tall establece la distinción entre mundo corporeizado y mundo formal, donde este último desarrolla métodos axiomáticos de operación. Las definiciones formales pueden ser inspiradas por ideas corporeizadas, de hecho lo son con frecuencia, pero la deducción lógica del mundo formal debería intentar separarse de las indicaciones perceptivas implícitas del corporeización.

Regresemos ahora al significado del término *corporeizado* en el sentido de estar “relacionado con el cuerpo” aportado por Tall y semejante a la noción de *corporeización conceptual* sugerida por Lakoff. Dicho término incluye tanto la percepción sensorial a través de la visión como de la sensación de los objetos, pero también incorpora el pensamiento reflexivo que utilizan “los ojos de la mente” para desarrollar pensamientos más refinados sobres las ideas perceptivas. Aunque el cerebro intenta separar la idea de “percepción” por una parte y “concepción” por otra, en realidad funciona de una manera integral, en un sentido gestalt. Nuestra percepción del mundo exterior depende, por lo tanto, de nuestros órganos sensoriales biológicos y, aunque como científicos podamos imaginar experimentos para intentar distinguir entre realidad y percepción, debemos interpretar nuestros resultados con nuestros “cerebros corporales”. Al crecer, el sujeto utiliza sus sentidos biológicos para percibir y también para concebir. Así, la distinción entre percepción -la información que recibimos a través de nuestros sentidos- y concepción -cómo pensamos sobre lo que percibimos- es poco nítida y sus fronteras no están muy claras. Por esta razón, el mundo corporeizado crece constantemente en sofisticación, incrementándose su capacidad para discriminar y categorizar como resultado de su experiencia y reflexión previas. Crece con el individuo, desde de la percepción sensomotora del niño, a través de una consciencia creciente del mundo hasta concepciones altamente sofisticadas de forma y espacio, incluyendo la geometría euclidea y las demostraciones, los fundamentos de la aritmética y otros tópicos más avanzados como la sensación dinámica del movimiento de un punto en un gráfico en el contexto del Análisis. Sin embargo, según Tall, mientras nuestro cerebro construye módulos cada vez más especializados para manipular símbolos y deducciones lógicas, los vínculos mentales con la *corporeización* se evocan en menor grado y se incrementan los vínculos relacionados con la manipulación de símbolos y la necesidad de la deducción lógica. Aunque los vínculos con el mundo *corporeizado* se encuentran en las profundidades del cerebro, el desarrollo de la mente matemática cambia su centro de atención al mundo proceptual de los símbolos y al mundo formal de la deducción lógica.

Tall asocia la noción de *objeto corporeizado* con la concepción mental de un objeto físico en el mundo tal y como es percibido por los sentidos. Por otra parte, nuestras percepciones pueden convertirse en abstracciones que no se refieran conscientemente a objetos del mundo real[32]. De esta manera observamos una sofisticación creciente en la noción de *objeto corporeizado* que comienza con la percepción sensorial y se refina mentalmente mediante el uso del lenguaje para dotarle de mayor precisión y jerarquías de significado. Esto supone una concepción cada vez más refinada de los objetos corporeizados de una manera general que ha sido específicamente descrita por Van Hiele (1986) refiriéndose a los objetos geométricos. Para Gray y Tall (2001), esto no significa que no podamos considerar un número como un “objeto” manipulable, simplemente significa que no es un objeto corporeizado. Por lo tanto, vemos que llega un punto en que las posiciones teóricas comienzan a divergir entre la teoría del objeto corporeizado y la teoría del proceso-objeto. La primera plantea que todos los conceptos matemáticos son objetos corporeizados, pero según Gray y Tall tal punto de vista falla porque el concepto de número no es un objeto corporeizado, aunque el concepto “cinco cosas” sí lo es. Así, Tall y Gray mantienen que donde Lakoff y sus colegas dicen que todo *pensamiento* es corporeizado deberían decir que *todo lo que pensamos* es corporeizado.

Sfard, por su parte, plantea dos enfoques para el desarrollo de un concepto, uno *operacional* centrado en el proceso y el otro *estructural*, centrado en los objetos:

> Se puede identificar un patrón de tres pasos en la transición desde las concepciones operacionales a las estructurales: primero se debe dar un proceso de manipulación con objetos familiares, después la idea de transformar este proceso en otro más compacto y, finalmente, una habilidad para entender esta nueva entidad como un objeto permanente con sus propios derechos adquiridos. Estas tres componentes del desarrollo conceptual se denominarán interiorización, condensación y reificación, respectivamente [···] El hecho de que un concepto haya sido interiorizado y condensado en una entidad compacta y autosostenida, no significa, en si mismo, que una persona haya adquirido la habilidad para pensar sobre ella de una manera estructurada. Sin reificación, su enfoque permanecerá puramente operacional.

Voorhees (2004) cita a Gödel, un platónico reconocido, que mantenía que la cuestión de la realidad de los objetos matemáticos no es diferente de la cuestión de la realidad de los objetos sensoriales. Las percepciones de los objetos sensoriales se construyen en la mente mediante operaciones cognitivas sobre las intuiciones sensoriales. Las percepciones de los objetos matemáticos se construyen en la mente a partir de operaciones cognitivas sobre las intuiciones matemáticas. No hay razón, en principio, para privilegiar un conjunto de percepciones sobre el otro asignándole una realidad “verdadera” aunque parezca que la percepción de los objetos sensoriales son más objetivos porque hay una historia causal ya que se supone que tales objetos existen y tiene unas propiedades que causan su percepción. La idea fundamental del crecimiento cognitivo es la compresión de ideas en conceptos pensables que pueden conectarse entre sí de manera cada vez más flexible. Esto viene facilitado por un importante paralelismo entre la compresión en los mundos de la corporeización y del simbolismo identificada por Poynter (2004).

32. Un ejemplo de esto es la idea de “línea recta” entendida inicialmente como una línea dibujada con una herramienta tal como una regla que le da “apariencia recta”. Hablando sobre la idea consideramos un concepto mental que es “perfectamente recto”, “no tiene anchura”, “es arbitrariamente extensible en cada dirección”. Ninguna de estas propiedades corresponde a una línea real en el mundo real, pero se basa en una percepción sobre el mundo real y sólo puede ser construida mentalmente sobre actos humanos de percepción y reflexión.

Finalmente, Tall (2006) se refiere a la relación entre aprendizaje y "verdad":

> El aprendizaje natural crece explícitamente desde las percepciones, acciones y reflexiones individuales y crece en rigor mediante la transformación de los pensamientos corporeizados en otros matemáticos formalmente presentados, a menudo íntimamente relacionados con su fuente natural.

Así, en el mundo corporeizado, el más simple, algo es verdad cuando podemos "ver" que es verdad y a medida que aumenta la sofisticación, buscamos dar un argumento verbal a la manera de una prueba euclidea; la verdad se basa primero en nuestras intuiciones fundamentales y después en experimentos mentales más elaborados.

2.5.2. PENSAMIENTO METAFÓRICO.

En los últimos años, diversos autores (Johnson, 1991; Lakoff y Núñez, 2000; Leino y Drakenber, 1993; Núñez, 2000; Presmeg, 1992, 1997; Sfard, 1994, 1997 y Font y Acevedo 2003) han apuntado la importancia que juegan las metáforas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Frant et al. (2006) consideran una metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro y, puesto que las metáforas vinculan diferentes sentidos, nos resultan esenciales en la construcción de los significados de los conceptos matemáticos. Lakoff, Núñez y Sfard coinciden en que la metáfora es central para la estructura de las matemáticas y para nuestro razonamiento con ideas matemáticas. Para English (1997) el uso de metáforas es especialmente útil en el desarrollo de la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos abstractos que son difíciles de representar con analogías concretas. Para Lakof y Núñez "un gran número de las ideas matemáticas más básicas, así como de las más sofisticadas, son de naturaleza metafórica". Conceptos abstractos tales como "el equilibrio" de colores en una pintura, "el equilibrio" de comprobación de una operación o de un sistema de ecuaciones simultáneas son extensiones conceptuales de la imagen esquemática implicada por la experiencia corporal del "equilibrio". Estas extensiones tienen lugar mediante correspondencias conceptuales que incluyen un importante mecanismo conocido como *metáfora conceptual*.

En el mismo sentido, Davis (1984) mantiene que las matemáticas no son menos dependientes de las metáforas que la literatura. La proyección metafórica es la base para la creación de todos nuestros sistemas conceptuales. Desde el día que nacemos utilizamos proyecciones metafóricas para construir intrincados sistemas conceptuales; en este proceso, nuestra experiencia perceptiva, el principal material de construcción, y sus trazas son aún visibles incluso en la mayor parte de nuestros conceptos más abstractos. Aprender es fundamentalmente metafórico; construimos representaciones de nuevas ideas a partir de representaciones de ideas familiares y las modificamos según sea necesario; el origen de las ideas con las que comenzamos se halla, con frecuencia, en los primeros años de nuestras vidas.

Por otra parte, para Frant et al. (2006) no todas las correspondencias conceptuales proceden de experiencias físicas o están relacionadas con la manipulación de objetos físicos; estos autores son conscientes de que sólo algunos aspectos del dominio origen se revelan mediante metáforas y, en general, no se sabe qué aspectos del dominio origen son transformados por los estudiantes. En cambio, Auslander (2001) considera que las metáforas no juegan un papel central en la formulación de los conceptos de matemáticas avanzadas, pero si lo jugasen deberían ser de una naturaleza diferente a la de aquellas que se utilizan en las matemáticas más elementales. Para este autor, los conceptos matemáticos, una vez que se han desarrollado, adquieren una vida propia y se trata con ellos directamente; así, parece difícil concebir una metáfora de un número real elevado a una potencia compleja.

Lakoff y Núñez (2000) presentan la hipótesis metafórica en el marco de una teoría general del conocimiento o ciencia cognitiva. Junto con la idea de que los conceptos más abstractos son metafóricos, esta teoría establece otros dos principios básicos. Uno es que el pensamiento es fundamentalmente inconsciente y la mayor parte de las veces supone una comprensión "automática, inmediata e implícita más que explícita"; las metáforas conceptuales mantienen nuestro pensamiento e influyen en él sin que seamos necesariamente conscientes de ellas. El otro principio es que las estructuras conceptuales humanas están profundamente influidas por lo particular de nuestro ser físico y concreto; razonamos con los mismos instrumentos con los que observamos nuestro entorno más próximo, nos movemos por él e interaccionamos con él. Si se analiza con detenimiento, la mayoría de los conceptos abstractos muestra las huellas de su origen en, y su dependencia de, los esquemas motores y perceptivos básicos. En resumen, todos los conceptos, y en particular los matemáticos, son metafóricos y descansan en una comprensión inconsciente que se origina en la experiencia corporal.

Para Chiu (1996) una representación se refiere a estímulos accesibles perceptivamente tales como dibujos, gestos o expresiones habladas que una audiencia puede interpretar; muchas representaciones matemáticas tales como diagramas de Venn, rectas numéricas y gráficos se relacionan mediante inferencias metafóricas a partir de una fuente de comprensión del espacio de la que dispone cada persona. Así, las percepciones, simulaciones mentales, intuiciones y esquemas neurológicos innatos de la gente proporcionan las entidades, relaciones y acciones familiares que constituyen la fuente para una metáfora.

La cuestión de la naturaleza, origen y significado de las ideas matemáticas permanece abierta: ¿cuáles son las capacidades cognitivas corporeizadas que permiten pasar desde unas habilidades numéricas básicas innatas a una comprensión más profunda y rica a nivel, digamos, de educación secundaria? Parece que tal avance en las habilidades matemáticas no es independiente del aparato cognitivo utilizado fuera de las matemáticas. Es más, parece que la estructura cognitiva de las matemáticas avanzadas hace uso del tipo de aparato conceptual que es común en el pensamiento cotidiano ordinario tal como los esquemas de imagen, esquemas aspectuales, mezclas conceptuales y metáforas conceptuales. Para Lakoff y Núñez (2000), la metáfora conceptual constituye la verdadera fábrica de las matemáticas y está presente en todos los campos de las matemáticas, tanto cuando conceptualizamos funciones como conjuntos de puntos o sumas infinitas que tienen un estado resultante final único. Estos autores han encontrado que un gran número de mecanismos cognitivos que no son específicamente matemáticos se utilizan para caracterizar las ideas matemáticas. Estos incluyen mecanismos ordinarios como aquellos que se utilizan para relaciones espaciales básicas, agrupamientos, cantidades pequeñas, movimiento, distribución de cosas en el espacio, cambios, orientaciones corporales, manipulaciones básicas de objetos, tales como rotar y dilatar, acciones iteradas, etc.[33] Así, por ejemplo,

- Para conceptualizar el concepto matemático de *clase* se hace uso del concepto habitual de colección de objetos en una *región limitada del espacio*.
- Para conceptualizar el concepto matemático de *recursividad* se hace uso del concepto habitual de *acción repetida*.
- Para conceptualizar el concepto matemático de *aritmética compleja* se hace uso del concepto habitual de *rotación*.
- Para conceptualizar las derivadas en Análisis se requiere el uso de los conceptos habituales de *movimiento*, aproximación a una frontera y así sucesivamente.

Lakoff y Johnson (1980) mantienen que a la hora de hablar de metáforas e imágenes, es importante diferenciar entre *imagen mental* y *esquema de imagen* o *corporeizado*. Los *esquemas de imagen* están estrechamente relacionados con la teoría de las metáforas y constituye, según Johnson (1987), estructuras dinámicas y universales que permiten organizar nuestra experiencia con el fin de que podamos comprenderla, caracterizan las inferencias espaciales y relacionan el lenguaje con la experiencia motórica y visual, con la percepción y el movimiento. Y añade que se trata de

> Estructuras de *una actividad* mediante las cuales organizamos nuestra experiencia de manera que la podamos comprender. No son meros receptáculos pasivos en los que se vierte nuestra experiencia sino que son medios primarios a través de los cuales construimos o creamos orden.

Su estructura inferencial se conserva bajo aplicaciones metafóricas tales como las metáforas básicas, y según Núñez (2000) la característica más importante de los esquemas de imagen es que *tienen una función cognitiva especial: son de naturaleza tanto perceptiva como conceptual y, como tales, proporcionan un puente entre lenguaje y razonamiento por una parte y visión por otra*. Un esquema de imagen se puede apoyar en una imagen mental, pero hay una diferencia crucial entre los dos: mientras una imagen mental es siempre una imagen de algo concreto o la visualización de un objeto específico, y por lo tanto llena de detalles, un esquema de imagen es general y maleable. No es sino un esqueleto con muchas partes variables que, por ser indeterminadas, no pueden visualizarse, es decir algo más que una plantilla para obtener tales imágenes. Como ya hemos visto, para Lakoff y Johnson las ideas abstractas heredan la estructura de la experiencia física, corporal y perceptiva. Mediante el esquema de imagen, la lógica interna y otras propiedades de la nueva construcción abstracta son heredadas a partir de esta primera experiencia. La cuestión de cómo la experiencia corporal se transmite metafóricamente a una esfera de pensamiento más abstracto aún no ha tenido su respuesta: el esquema de imagen,

---

33. Así, por ejemplo, Lakoff y Núñez (1997) llaman esquema de *movimiento ficticio* a aquél esquema caracterizado por un punto de partida, la fuente del movimiento, una trayectoria que representa el camino del movimiento y un punto final que es el objetivo deseado del movimiento. Por ejemplo, el movimiento ficticio es una manifestación metafórica de una línea aunque en términos de movimiento; en Núñez (2004) se puede leer:

> *¿De dónde proceden las ideas de movimiento? ¿Qué mecanismo cognitivo nos permite concebir entidades estáticas en términos dinámicos? La respuesta es el movimiento ficticio. El movimiento ficticio es un mecanismo cognitivo corporeizado fundamental a través del cual conceptualizamos inconscientemente entidades estáticas en términos dinámicos, como cuando decimos "la carretera va a lo largo de la costa". En realidad la carretera no se mueve, no va a ninguna parte. El movimiento ficticio fue estudiado por primera vez por Len Talmy (1996)*

originalmente construido para poner orden en nuestra experiencia física, es "prestado" para dar forma, estructura y significado a nuestra imaginación. Nuestra comprensión se expresa mediante la habilidad de saber qué va a ocurrir sin ser conscientes de la forma en que se realizó la predicción. Con este tipo de comprensión nos dotamos de un método para manejar ideas abstractas con todas las características propias, según Fischbein, del pensamiento intuitivo: autoevidencia, coercitividad, globalidad y carácter extrapolativo.

Para Presmeg (1992) "una imagen acompaña a menudo a una metáfora, pero la imagen por sí sola no es una metáfora". Uno de los aspectos de la relación entre metáforas e imágenes parece muy claro: las primeras acceden a la esfera de las construcciones matemáticas desde el dominio de los objetos perceptivamente asequibles, son cruciales para nuestro sentido de comprender las ideas matemáticas y, por lo tanto, forman parte de las correspondencias metafóricas que permiten la existencia de nuevos conceptos matemáticos. Las imágenes, sin embargo, son más que la habilidad para visualizar cosas que no están realmente presentes; el término imagen acompaña todas las experiencias perceptivas del tipo *como-si,* esto es, visuales, auditivas, cinestésicas, táctiles, etc., todas ellas igualmente importantes para el pensamiento matemático.

Toda lengua tiene un sistema de relaciones espaciales, aunque difiere radicalmente de un idioma a otro. En español hay preposiciones como *en, sobre, a través, encima*, etc. Otros idiomas tienen sistemas que difieren con frecuencia del español, pero las relaciones espaciales en un idioma dado se descomponen en conceptos primitivos, esquemas de imagen, que parecen ser universales[34].

2.5.3. METÁFORAS CONCEPTUALES.

Lakoff y Núñez (2000) estudian los detalles del sistema conceptual del que surgen las matemáticas y a partir del cual son concebidas y entendidas con el fin de describir cómo las matemáticas constituyen un sistema conceptual. Esto, como hemos visto, supone una nueva perspectiva desde la cual las matemáticas son un producto corporeizado de la mente humana, especialmente sus capacidades imaginativas tales como los *esquemas de imagen* y las *metáforas conceptuales* ya mencionadas. Los presupuestos de los que parten Lakoff y Núñez se basan en algunos de los resultados de una rama de la lingüística cognitiva relacionada con la teoría de metáforas:

- Hay un extenso sistema convencional de metáforas conceptuales en todo sistema conceptual humano.

34. Por ejemplo, la palabra "sobre", en el sentido de "El libro está sobre la mesa" se compone de tres esquemas de imagen: El esquema *Encima* -El libro está encima de la mesa- que se refiere a la orientación; el esquema *Contacto* -El libro está en contacto con la mesa- que es un esquema topológico y el esquema *Apoyo* -el libro se apoya en la mesa- que es de naturaleza fuerza-dinámica. Por otra parte, un esquema de imagen común que es de gran importancia en matemáticas es el *Esquema Contenedor*, que juega un papel central en el significado cotidiano de palabras como *dentro* y *fuera*. El Esquema Contenedor tiene tres partes: una Interior, una Frontera y una Exterior. Esta estructura forma una gestalt, en el sentido de que las partes no tienen sentido sin el todo. No hay Interior sin Frontera y Exterior y tampoco hay Exterior sin Frontera e Interior. Esta estructura es topológica en el sentido de que la frontera puede dilatarse, contraerse o distorsionarse manteniéndose la frontera del Esquema Contenedor. Las clases se conceptualizan normalmente en términos de Esquemas Contenedores. Por ejemplo, pensamos, y hablamos, de elementos que están dentro y fuera de una clase. Los Diagramas de Venn son instantáneas visuales de Esquemas Contenedores. La razón de que un diagrama de Venn funcione como símbolo de una clase es que las clases se utilizan metafóricamente conceptualizadas como contenedores. Esta es nuestra metáfora conceptual inconsciente, cotidiana y natural de lo que es una clase. Es una metáfora básica. Fundamenta nuestro concepto de clase en nuestro concepto de región limitada del espacio, vía el aparato conceptual del esquema de imagen de contención. Esta es la manera de conceptualizar las clases en la vida cotidiana. La consecuencia de todo esto es que estas leyes tradicionales de la lógica son, en realidad, entidades cognitivas y, como tales, se asientan en las estructuras neuronales que caracterizan los *esquemas contenedores* (Container Schemas).

- Las metáforas son correspondencias conceptuales entre dominios. Es decir, *proyectan* la estructura de un dominio origen sobre un domino final.
- Las correspondencias metafóricas no son arbitrarias sino que están motivadas por nuestra experiencia cotidiana, especialmente la experiencia corporal.
- Las metáforas no residen en las palabras; es una cuestión del pensamiento. Las expresiones lingüísticas metafóricas son manifestaciones superficiales del pensamiento metafórico.

A partir de esto, las *metáforas conceptuales* se definen como "correspondencias" que conservan la estructura de inferencias de un dominio origen al proyectarse en un dominio final. El dominio origen, o fuente, es aquel sobre el que establecemos las expresiones metafóricas y el dominio final, u objetivo, corresponde a aquel que intentamos comprender. El tamaño de una pila de ladrillos, por ejemplo, sugiere un número. Esta correspondencia también conserva las inferencias: nuestra idea de que de la combinación de dos pilas de ladrillos siempre resulta otra pila fundamenta nuestra comprensión de la noción de cierre aritmético. El dominio origen -la pila de ladrillos- es una colección de objetos y el dominio final es la aritmética (Paulos, 2001). Conocer una metáfora conceptual es conocer el conjunto de correspondencias que se aplican a un par determinado origen-final. Quine y otros influyentes filósofos de las matemáticas mantienen que cada lenguaje humano natural refleja una ontología asumida que hace más fácil el empleo de ciertas metáforas conceptuales y más difícil el de otras y, por lo tanto, menos convincentes. Si esto es así, cada lenguaje natural se convierte en una "correspondencia" entre la experiencia concreta de los primeros años de vida y un dominio final más abstracto y socialmente prescrito por la cultura.

Según Núñez et al. (1999) las "proyecciones" o "correspondencias" implicadas en las metáforas conceptuales no son arbitrarias y pueden estudiarse empíricamente y establecerse con precisión. No son arbitrarias porque tienen su origen en nuestra experiencia cotidiana, especialmente la experiencia corporal, la cual está biológicamente condicionada. Se ha encontrado que las aplicaciones metafóricas no se encuentran aisladas, sino que forman parte de sistemas altamente organizados y combinados de manera compleja. Los mecanismos de la imaginación, tales como el pensamiento metafórico, la imaginación esquemática mental y las formas narrativas forman parte de la dotación mental general de todos los seres humanos, y esto surge regularmente de nuestros cuerpos, cerebros y experiencias interactivas en el mundo físico y social. La estabilidad de las ideas matemáticas básicas a lo largo de cientos, o miles, de años implica que las estructuras neuronales utilizadas deben ser comunes y fácilmente configurables; esto requiere, como ya se ha comentado, que las ideas matemáticas utilicen la mayor parte de las experiencias cotidianas, conceptos e ideas tales como movimiento, relaciones espaciales, manipulación de objetos, espacio, tiempo, etc. Para Sfard (1997) un concepto nuevo es el producto del cruce de varias metáforas más que el de una sola metáfora.

La función primaria de las metáforas conceptuales es permitirnos razonar sobre dominios relativamente abstractos utilizando la estructura de inferencias de dominios relativamente concretos. La estructura de los esquemas imagen se conserva bajo las correspondencias metafóricas. En la metáfora, la correspondencia entre dominios conceptuales es primaria, mientras que el lenguaje metafórico es secundario y deriva de la correspondencia conceptual. Por otra parte, las metáforas conceptuales no sólo hacen corresponder elementos preexistentes del dominio original con otros también preexistentes del dominio final, sino que también introducen nuevos elementos en el dominio final. Las metáforas dotan de una enorme riqueza a las matemáticas y son una parte esencial del pensamiento matemático no sólo mecanismos auxiliares utilizados para visualizar o facilitar la comprensión[35], pero Núñez (2000) advierte que también llevan asociadas cierta confusión y aparentes paradojas si no están claramente definidas o se interpretan de manera literal; las matemáticas son una capa de metáforas sobre otra. Se define *mezcla conceptual* como la combinación conceptual de dos estructuras cognitivas distintas con correspondencias fijadas entre ellas[36]. Cuando las correspondencias fijadas en una mezcla conceptual están dadas por una metáfora la denominaremos *mezcla metafórica*.

En lo que se refiere a los conceptos matemáticos, Lakoff y Núñez (2000) distinguen tres importantes tipos de metáforas conceptuales[37]:

- *Metáforas básicas*. Estas fundamentan nuestras ideas matemáticas en términos de la experiencia cotidiana. En estos casos, el dominio objetivo de la metáfora es matemático, pero el dominio fuente se halla fuera de las matemáticas. Estas metáforas nos permiten proyectar una estructura de esquema de imagen abstracto de la experiencia cotidiana que conocemos y entendemos íntimamente en el dominio de las matemáticas.
- *Metáforas de redefinición*. Estas imponen una comprensión técnica que sustituye a conceptos ordinarios.
- *Metáforas vinculatorias*. Son metáforas dentro de las propias matemáticas que nos permiten conceptualizar ciertos dominios matemáticos en función de otros dominios también matemáticos. Estas metáforas son las más interesantes ya que son parte de la fábrica de las propias matemáticas. Se dan cuando una rama de las matemáticas se utiliza para modelizar otra, como ocurre frecuentemente[38].

Las metáforas básicas o rudimentarias producen ideas básicas: la suma como la adición de objetos a una colección, la resta como la sustracción de objetos de una colección, los conjuntos como contenedores, los miembros de un conjunto como objetos en un contenedor. Todo esto requiere muy poca instrucción. Las metáforas vinculatorias producen ideas sofisticadas, a veces denominadas ideas abstractas. Por ejemplo, números como puntos sobre una línea, figuras

35. Consideremos la metáfora *LOS NÚMEROS SON PUNTOS SOBRE UNA LÍNEA*. Los números no tienen porqué ser conceptualizados como puntos sobre una línea; hay concepciones de los números que no son geométricas. Pero la recta numérica es uno de los conceptos centrales en todas las matemáticas. La geometría analítica no existiría sin ella, ni siquiera la trigonometría. O bien, tomemos la metáfora *LOS NÚMEROS SON CONJUNTOS*, que es central en los fundamentos de las matemáticas de principios del siglo XX. No tenemos porqué conceptualizar los números como conjuntos. La aritmética existe desde hace dos mil años sin esta metáfora, es decir, sin que el cero conceptualice al conjunto vacío, el 1 al conjunto que contiene al conjunto vacío, el 2 al que contiene al 0 y al 1, etc. Pero si utilizamos esta metáfora, las formas de razonamiento sobre conjuntos pueden también aplicarse a los números.

36. En matemáticas, un caso simple es el círculo unidad en el que un círculo está superpuesto en el plano cartesiano con la siguiente correspondencia: *a)* el centro del círculo es el origen (0, 0) y *b)* el radio del círculo es 1. Esta mezcla tiene vinculaciones que se siguen de estas correspondencias junto con la estructura inferencial de ambos dominios. Por ejemplo, el círculo unidad corta al eje x en (1, 0) y (-1, 0) y al eje y en (0, 1) y (0, -1). El resultado es más que un mero círculo. Es un círculo que tiene una posición fija en el plano y cuya circunferencia es una longitud que corresponde a los números sobre el eje x y el eje y. Un círculo en el plano euclideo sin ejes ni números no tendría estas propiedades.

37. Las traducciones siguientes corresponden a *grounding metaphors, redefinitional metaphors* y *linking metaphors*, respectivamente.

38. Por ejemplo, cuando entendemos metafóricamente los números como puntos sobre una línea, estamos relacionando la aritmética con la geometría. Tales metáforas nos permiten proyectar un campo del conocimiento matemático sobre otro. En este caso, proyectamos nuestro conocimiento de la geometría en el de la aritmética de una manera muy precisa mediante una metáfora.

geométricas como ecuaciones algebraicas, operaciones sobre clases como operaciones algebraicas. Todas estas requieren una cantidad significativa de instrucción explícita.

Schiralli y Sinclair (2003) critican a Lakoff y Núñez (2000) el hecho de no diferenciar el término "matemáticas" en su texto y no indicar si las metáforas funcionan de manera diferente según se esté *aprendiendo*, *haciendo* o *utilizando* las matemáticas. Schiralli y Sinclair apuntan que, por ejemplo, el desarrollo histórico de los números complejos pone de manifiesto que la metáfora utilizada para explicar una idea no siempre es la misma que la que se utiliza para efectuar una abstracción. Los autores denominan *matemáticas conceptuales* (MC) a la interpretación que se hace de las matemáticas en el texto de Lakoff y Núñez. En tal caso las matemáticas se consideran una disciplina en el sentido de una actividad pública, un juego en permanente evolución cuyas reglas son negociadas y compartidas por los participantes. En este sentido, un concepto matemático es una herramienta públicamente accesible que pretende representar, explorar y manipular patrones numéricos, geométricos, etc. Los conceptos MC son representaciones públicas que existen fuera de un espacio público de significados compartidos; es conveniente, por lo tanto, distinguirlos de las interpretaciones internas que el individuo se forme de ellos. A estas, Schiralli y Sinclair las denominan *matemáticas ideacionales* (MI) y, probablemente, están influenciadas por numerosos factores ambientales y genéticos[39]. La diferencia entre MI y MC explica por qué algunos matemáticos encuentran extrañas o forzadas algunas de las metáforas utilizadas en el texto de Lakoff y Núñez. Éstos proporcionan caminos metafóricos a los *conceptos* de MC a través de metáforas vinculatorias y básicas, pero estos no son necesariamente los mismos caminos que un individuo seguiría para crear sus *concepciones* en MI. Lakoff y Núñez no distinguen entre MI y MC. De hecho mantienen que ambas son isomórficas basándose en que las metáforas en las que se basan las matemáticas no son, en absoluto, arbitrarias sino que las metáforas básicas vienen marcadas por nuestra naturaleza física y las correspondencias metafóricas, las mezclas metafóricas y los casos especiales tienen una estructura precisa y estable. Por el contrario, Schiralli y Sinclair proponen que al menos dos factores entran en juego durante la evolución de las ideas matemáticas que hacen insostenible la implicación de Lakoff y Núñez. En primer lugar, la metáfora no es el único medio de dotar de significado a un objeto en matemáticas y, en segundo lugar, las correspondencias metafóricas también puede obtenerse a partir de experiencias, incluyendo las no matemáticas, del matemático. Estas son las que Lakoff y Núñez denominan metáforas *extrañas*. Son metáforas, a veces idiosincrásicas, que los matemáticos o estudiantes pueden construir a partir de sus experiencias de aprendizaje. Estas metáforas pueden proporcionar vínculos de un tipo diferente al designado como metáforas vinculatorias. En el contexto de las anteriores distinciones, para Schiralli y Sinclair las *matemáticas corporeizadas* (ME) pueden entenderse como la corporeización de principios y categorías de ordenación que el organismo humano tiene o adquiere por debajo del nivel de consciencia pero que están involucrados en todos los sentidos

39. Los autores ilustran la diferencia entre MI y MC utilizando el concepto de derivada. Lakoff y Núñez proponen que el concepto de derivada depende de la metáfora de límite, donde una línea tangente se conceptualiza metafóricamente como el límite de una sucesión de líneas secantes que se van haciendo cada vez más pequeñas pero teniendo siempre una longitud real. Pero la metáfora del límite se basa en la metáfora conceptual de que los procesos continuos sin fin son procesos iterativos infinitos, es decir, el proceso de saltar una y otra vez –un proceso continuo- es iterativo y en él hay puntos finales intermedios y resultados intermedios. Estas metáforas dan lugar a una definición lógica de la derivada que puede expresarse de una manera simbólica en los libros de texto de matemáticas. Sin embargo, los matemáticos entienden las derivadas de múltiples maneras diferentes. Lakoff y Núñez mantienen que los conceptos abstractos siempre tienen sus raíces, mediante alguna combinación de metáforas básicas y vinculatorias, en experiencias sensomotoras. Así que, afirman, no podemos pensar en la derivada sin conceptualizarla en términos de algo más concreto.

identificados. Por lo tanto, ME es una fuente subyacente o "infraestructura cognitiva corporeizada" de CM e IM.

El conjunto de metáforas que ofrece el texto de Lakoff y Núñez para explicar "de dónde vienen las matemáticas" deriva de una metodología simple de *análisis de las ideas matemáticas*. Se trata de una técnica lingüística de revelar las fuentes matemáticas de las ideas matemáticas. El análisis de las ideas matemáticas supone que las expresiones lingüísticas pueden interpretarse literalmente, independientemente de las numerosas interpretaciones posibles. En consecuencia, como apunta Dubinsky, la estructura de metáforas identificada para cada idea parece, frecuentemente, una creación lógica al servicio de una metodología consistente.

2.5.4. METÁFORA BÁSICA DEL INFINITO.

Dentro del paradigma establecido por Lakoff y Núñez (2000) para comprender la creación del conocimiento matemático y el acceso al mismo en torno a los conceptos de corporeización y de metáfora conceptual destaca el tratamiento que realizan del concepto de infinito. Para ello parten de uno de los sistemas conceptuales humanos más comunes: aquel que los lingüistas denominan *sistema aspectual* y que caracteriza la estructura suceso-concepto-suceso tal como la conceptualizamos. El *aspecto* expresa mediante variación morfológica o perifrástica de un mismo verbo distintos momentos de una misma acción o estado, como imperfectividad (acción no acabada) o perfectividad (acción acabada), iteratividad o progresión, terminación, comienzo. No todas las lenguas tienen aspecto (Conti, 2005)[40]. Es decir, el carácter aspectual del verbo indica el tipo de acción que se desea representar o bien las cualidades temporales propias de la situación designada por el verbo; en función de este criterio se pueden distinguir las siguientes situaciones:

- *Verbos imperfectivos*: designan acciones o procesos que no requieren una culminación o acabamiento para que la acción o proceso tenga lugar. Se trata de acciones continuas y/o iterativas tales como *andar, leer, seguir, continuar*, etc. En este caso se conceptualizan sucesos que no tienen fin, es decir, no completos y a dicha conceptualización se le denomina aspecto imperfectivo, siendo éste la fuente fundamental del concepto de infinito.
- *Verbos perfectivos*: designan acciones o procesos que requieren alcanzar su culminación para producirse como tales. Ej.: saltar, disparar, concluir, terminar, llegar, abrir, cerrar (Lakoff y Núñez, 2000)[41].

40. Por Aktionsart ("modo de acción, "cualidad de la acción verbal", "clase aspectual", "aspecto léxico") se entienden las cualidades temporales propias de la situación designada por un verbo o una predicación. Vendler (1967) clasificó los verbos aspectualmente en cuatro tipos de Aktionsart: *estados* (situaciones no dinámicas, sin movimiento; los estados son imperfectivos: saber, conocer, tener, amar, ser alto); *actividades* o *procesos* (situaciones dinámicas durativas atélicas: sin referencia a un punto final de la eventualidad; evento dinámico que no alcanza un fin; andar, correr, escribir, comer, reír, nadar, etc.), *realizaciones* (situaciones dinámicas durativas télicas; expresan una actividad que desemboca o culmina en un estado resultante: correr la maratón, escribir una carta, pintar, construir, etc.) y *logros* (situaciones dinámicas puntuales, sin duración; expresan la culminación en un estado resultante: alcanzar la cima, reconocer, morir, llegar, etc.). Una situación es *télica* si existe un término inherente a la misma que debe ser alcanzado para que podamos decir que tal situación ha tenido lugar; una situación *atélica* no posee un término inherente, tiene lugar desde el momento que comienza y a partir de ahí puede prolongarse indefinidamente. Los verbos que expresan una duración inherente son continuar, durar, seguir. Los verbos dinámicos y duraratívos dotados de límite fueron denominados por Vendler *realizaciones* o *cumplimientos*; entre ellos se incluyen los verbos de movimiento que implican un cambio de lugar y lo mencionan de forma explícita mediante un complemento locativo, como "acercarse a la pizarra", "alejarse de la ciudad", etc. Los verbos dinámicos delimitados y de escasa duración fueron denominados por Vendler *logros* y son los que describen un evento que tiene lugar en un instante temporal único y definido, sin fases: alcanzar, llegar a,...; también se pueden encontrar verbos de escasa duración entre los verbos de movimiento: llegar, partir, salir, aterrizar,... Verbos de movimiento: ir, venir, llegar, salir,....

41. El *modo de acción* es una categoría semántica propia del verbo que caracteriza el proceso verbal desde el punto de vista de su manera de acontecer. Se relaciona estrechamente con la categoría del *aspecto* pero, a diferencia de éste, no se basa en la consideración subjetiva del hablante como sucede en el aspecto, sino que se fundamenta en el significado léxico, objetivo, del verbo. Consideremos la acción de *leer*.

- El hablante puede considerarla subjetivamente en su duración: *Juan leía*; en su comienzo: *Juan se pone a leer*...; en su acabamiento: *Juan ha leído*... etc. Esta categoría es el *aspecto* que puede ser imperfectivo, incoativo y perfectivo respectivamente.

Desde el punto de vista sintáctico, la característica más destacada de los verbos aspectuales es su capacidad para combinarse con verbos en forma no personal, infinitivo o gerundio, que designan el proceso del que se perfila una fase (García-Miguel, 2005).

Algunas acciones son inherentemente iterativas, como *respirar*; otras son inherentemente continuas, como *moverse*; algunas tienen un principio y un fin, como *saltar*; algunas sólo un final, como *llegar*; otras sólo comienzo, como *embarcarse* en un viaje. Aquellas que tienen un punto final también tienen un estado resultante. En resumen, algunas acciones tienen su compleción como parte de la acción, por ejemplo *descender* es parte de saltar, mientras que otras tienen su compleción como algo externo a las acciones, por ejemplo no se suele conceptualizar el aterrizaje como parte del vuelo. Desde luego que en la vida difícilmente algo dura siempre. Así, conceptualizamos respirar o desplazarse como sucesos no completos; esta conceptualización es lo que se denomina *aspecto imperfectivo*[42]. Ya que el sistema aspectual es corporeizado de esta manera se puede considerar como la fuente fundamental del concepto de infinito. Fuera de las matemáticas, un proceso se considera infinito si es continuo, o iterativo, indefinidamente sin detenerse. Es decir tiene un aspecto imperfectivo -esto es, que “no es perfecto”, que no se ha completado-, continúa indefinidamente, sin punto final. Este es el *concepto literal de infinito*. Dos subtipos de procesos imperfectivos son los *continuativos*, aquellos que son continuos, y los *iterativos*, aquellos que se repiten y tienen un punto intermedio y un resultado intermedio. En el lenguaje común, los procesos continuos se conceptualizan como si fueran procesos iterativos. La sintaxis habitual es la de la *conjunción*. Así, una frase como *Juan salta y salta de nuevo y salta de nuevo* supone una iteración de tres saltos, pero *Juan salta y salta y salta* se interpreta normalmente no como tres saltos sino como algo abierto sin fin, un número indefinido. Pero “saltar” es un verbo inherentemente perfectivo: cada salto tiene un punto final y un resultado. En cambio, verbos como nadar, volar y rodar son imperfectivos, sin un punto final definido. Por ejemplo, la estructura de frase *el águila volaba y volaba y volaba* que normalmente indicaría una iteración indefinida con un verbo perfectivo, aquí indica un proceso continuo de volar. Así, la idea de acción iterativa se utiliza de varias formas sintácticas para expresar la idea de acción continua. Esto puede caracterizarse en términos cognitivos mediante la metáfora *Procesos Continuos Indefinidos* son *Procesos Iterativos*. Hay una razón cognitiva por la que existe esta metáfora: los procesos en general se conceptualizan metafóricamente en términos de movimiento mediante una estructura metafórica en la que los procesos son una extensión de los movimientos. El movimiento continuo indefinido es difícil de visualizar y para periodos extremadamente largos es imposible; en su lugar, visualizamos movimientos cortos y repetidos.

Según Núñez y Lakoff esta metáfora es fundamental para conceptualizar el infinito ya que normalmente la aplicamos a procesos infinitamente continuos como si fueran procesos iterativos infinitos, procesos en los que se itera sin fin pero en los que cada iteración tiene un punto final y

---

En cambio, si consideramos en sí mismo el verbo *leer*, observamos que la acción que este verbo expresa posee objetivamente una duración determinada y no necesita terminar de efectuarse para poder decir que se ha producido: este carácter imperfectivo y durativo intrínseco a la acción de leer es el *modo de acción* de este verbo. Según el modo de acción, puede distinguirse entre

- Verbos incoativos o ingresivos. Señalan el comienzo de un proceso o la entrada en un estado. Ej.: amanecer, inflamarse, alborear, etc.
- Verbos iterativos o reiterativos. Indican acciones compuestas de varios actos iguales. Ej.: picotear, tintinear, golpear, etc. (Bosque, 1999)

Desde el punto de vista del tiempo que necesita para realizarse el proceso, se distingue asimismo entre verbos cuyo modo de acción es puntual o momentáneo y verbos durativos. En los primeros, la duración de la acción es despreciable (disparar, estallar, encender, etc.). Los segundos se realizan empleando un tiempo determinado (leer, escribir, andar, preparar,...). Los durativos tienden a ser imperfectivos y los puntuales son necesariamente perfectivos.

42. El concepto de *aspecto* parece ser corporeizado en el sistema sensomotor del cerebro (Narayanan, 1997).

un resultado. Mediante esta metáfora se descomponen procesos continuos en procesos paso a paso iterando infinitamente, en los que cada paso es discreto y mínimo. Por ejemplo, el proceso indefinidamente continuo de alcanzar un límite se conceptualiza mediante esta metáfora como una sucesión infinita de pasos bien definidos; esta es una perspectiva potencial de infinito, pero los casos más interesantes de infinito en las matemáticas modernas son los casos de infinito actual, que incluyen, como sabemos, a los conjuntos infinitos. La hipótesis central de Lakoff y Núñez es que la idea de infinito actual en matemáticas es metafórica, que los diversos ejemplos de infinito actual hacen uso del *último* resultado metafórico de un proceso sin fin. Literalmente no existe tal cosa como el resultado de un proceso sin fin: si un proceso no tiene fin, no puede haber "último resultado". Pero el mecanismo de metáforas nos permite conceptualizar el "resultado" de un proceso infinito de la única manera que tenemos, es decir en términos de un proceso que tenga fin. Así, los autores establecen la hipótesis de que *todos los casos de infinito actual, tales como conjuntos infinitos, puntos en el infinito, límites de series infinitas, etc., son casos especiales de una única metáfora conceptual general en la que los procesos que continúan indefinidamente se conceptualizan como si tuvieran fin y un resultado final*. Denominan a esta metáfora como *Metáfora Básica del Infinito* (MBI). El dominio final de la MBI es el dominio de los procesos sin fin, de los procesos imperfectivos, y su efecto es añadir una compleción metafórica a los procesos que continúan. El dominio origen de la MBI consiste en un proceso iterativo ordinario con un número indefinido, aunque finito, de iteraciones con una compleción y un estado resultante. Los dominios origen y final son semejantes en cierto modo: ambos tienen un estado inicial, en ambos existe un proceso iterativo con un número de iteraciones no especificado y ambos tienen un estado resultante tras cada iteración. En la metáfora, el estado inicial, el proceso iterativo y el resultado tras cada iteración son proyectados sobre los elementos correspondientes del dominio final. Pero el efecto crucial de la metáfora es *añadir al dominio final la compleción del proceso y su estado resultante* y así obtener el concepto de infinito actual:

Dominio origen **PROCESOS ITERATIVOS COMPLETOS**		Domino final **PROCESOS ITERATIVOS QUE CONTINÚAN**
El estado inicial	Y	El estado inicial
Estado resultante a partir del estado inicial del proceso	Y	Estado resultante a partir del estado inicial del proceso
El proceso: a partir de un estado intermedio dado se produce el siguiente estado	Y	El proceso: a partir de un estado intermedio dado se produce el siguiente estado
El resultado intermedio tras esta iteración del proceso	Y	El resultado intermedio tras esta iteración del proceso
El estado resultante final	Y	**"El estado resultante final"** (infinito actual)
Condición: El estado resultante final es único y sigue a cualquier estado que no sea final	Y	**Condición: El estado resultante final es único y sigue a cualquier estado que no sea final**

La metáfora básica del infinito

Podemos observar en la tabla anterior que la correspondencia impone un "estado resultante final" a un proceso sin fin: hay una condición crucial que surge en el dominio origen y se impone sobre el dominio final mediante la metáfora. La unicidad del estado final de un proceso completo es un producto del conocimiento humano, no un hecho del mundo externo. La MBI aplica esta propiedad de unicidad para el estado resultante final del proceso sobre el infinito actual. El infinito actual, caracterizado como cualquier aplicación dada de la MBI, es único[43]. Lo que resulta de la MBI es una creación metafórica que no ocurre literalmente: un proceso que continúa

43. La existencia de grados de infinito, como los números transfinitos, requiere aplicaciones múltiples de la MBI.

indefinidamente y que tiene un único estado resultante final, un estado "en el infinito". Esta metáfora nos permite conceptualizar el infinito "potencial", que no tiene ni fin ni resultado, en términos de un tipo familiar de procesos cuyo resultado es único. Mediante la MBI, el infinito se transforma de un proceso con un final abierto en una entidad específica, única. Esta metáfora se formula en términos de un simple proceso iterativo paso a paso, es decir, a partir de un estado dado se produce el estado siguiente; a partir de un estado inicial, el proceso produce estados intermedios. El proceso metafórico tiene una infinidad de tales estados intermedios y un estado metafórico resultante final y único.

La hipótesis de la MBI implica ciertas hipótesis subsidiarias recogidas anteriormente:

- La MBI es parte de nuestro sistema conceptual *inconsciente*. En general, no somos conscientes de los mecanismos conceptuales mientras los utilizamos.
- El concepto de infinito actual, tal como lo caracteriza la MBI, hace uso de una metáfora basada en el concepto de aspecto: aspecto imperfectivo (para sucesos sucesivos o continuos) y aspecto perfectivo (para sucesos completos).

Observamos que la naturaleza del proceso no se especifica en la metáfora. La MBI es un mecanismo cognitivo general y cubre cualquier tipo de proceso y, por lo tanto, podemos aplicarla a casos especiales. Esta formulación de la metáfora es lo suficientemente precisa y general como para tratar una amplia variedad de diferentes tipos de infinito en diferentes dominios matemáticos.

Los procesos se conceptualizan normalmente como si fueran cosas estáticas, a menudo como contenedores, o trayectorias de movimiento u objetos físicos. Así, hablamos de que estamos *en la mitad de un proceso* o en su *parte final*. Interpretamos un proceso como si tuviera longitud, corto o largo, susceptible de ser ampliada o reducida y hablamos de las partes de un proceso, como si fuese un objeto con partes y tamaño. Los procesos, como ordinariamente los entendemos, se extienden a lo largo del tiempo. Pero en matemáticas, los procesos se conceptualizan como atemporales; baste para ello considerar las sucesiones de Fibonnacci en las que cada término es la suma de los dos anteriores. Por lo tanto, una sucesión se puede conceptualizar bien como un proceso infinito que no para de producir términos o bien como una cosa, una sucesión infinita atemporal; esta dualidad no es especial de las matemáticas sino que forma parte del conocimiento habitual. En consecuencia, la respuesta a la pregunta "¿cómo podemos conceptualizar el infinito?" debe ser, en primer lugar, plausible biológica y cognitivamente; es decir, debemos hacer uso de mecanismos neurológicos y cognitivos. En segundo lugar, la respuesta debería cubrir todos los casos en matemáticas que, superficialmente, son muy diferentes unos de otros: inducción matemática, puntos que se encuentran en el infinito, el conjunto de los números naturales, números transfinitos, límites, cantidades infinitamente pequeñas, etc. Y, en tercer lugar, la respuesta debería ser suficientemente precisa de manera que se pueda demostrar que estos y otros conceptos del infinito en matemáticas pueden, en efecto, ser caracterizados como casos especiales de un mecanismo cognitivo general que Lakoff y Núñez denominan, como se ha indicado más arriba, Metáfora Básica del Infinito. Veremos a continuación algunas aplicaciones de la misma.

El "número" 4. La gente tiende a pensar en el infinito como un número según parece indicar el lenguaje elegido por los matemáticos al decir "tiende a infinito" o "se aproxima a infinito". Se considera que es un error pensar en el infinito como un número, un error que comete mucha gente;

en tal caso, el trabajo de la ciencia cognitiva es caracterizar el mecanismo cognitivo que lleva a cometer este “error”. Y si la MBI es un mecanismo válido para todas las concepciones del infinito, se debería probar que la MBI permite conceptualizar el infinito como un número tanto si es un “error” como si no lo es. La ciencia cognitiva es, después de todo, descriptiva, no prescriptiva y debe explicar porqué la gente piensa así. El “error” de pensar en el infinito como un número no es aleatorio; el símbolo 4 se utiliza normalmente con un significado preciso, como un número en una enumeración, no como un número en un cálculo. En “1, 2, 3,..., 4” 4 se toma como un punto final de la enumeración, mayor que cualquier número finito y más allá que cualquiera de ellos. Pero 4 no se usa como un número en los cálculos: no vemos ningún caso de “17 veces 4 menos 473”. La conclusión es que hay, cognitivamente, diferentes usos para los números: enumeración, comparación y cálculo. Como número, 4 se utiliza en la enumeración y comparación pero no en el cálculo. La idea de 4 como número puede considerarse como un caso especial de la MBI. Supongamos que aplicamos la MBI a los enteros positivos utilizados como indicadores del orden de enumeración. La estructura inherente del dominio final, independiente de la metáfora, es la de un infinito potencial, una sucesión sin fin de enteros ordenados. El efecto de la MBI para la enumeación es convertir esto en un infinito actual con el “número más grande” 4.

Dominio origen **PROCESOS ITERATIVOS QUE CONTINÚAN**		Caso especial **LA SUCESIÓN ILIMITADA DE ENTEROS UTILIZADA PARA LA ENUMERACIÓN**
El estado inicial	Y	Ningún entero
Estado resultante a partir del estado inicial del proceso	Y	El entero 1
El proceso: a partir de un estado intermedio dado se produce el siguiente estado	Y	Dado el entero n -1, formar el siguiente entero mayor, n
El resultado intermedio tras esta iteración del proceso	Y	n < n –1
“El estado resultante final” (infinito actual)	Y	**El “entero”** 4
Condición: El estado resultante final es único y sigue a cualquier estado que no sea final	Y	**Condición: El “entero” 4 es único y mayor que cualquier otro entero**

La MBI no tiene números; sin embargo, la sucesión ilimitada de enteros utilizada para la enumeración, que no para el cálculo, puede ser un caso especial del dominio final de la MBI. Como tal, la MBI produce 4 como el entero más grande utilizado para la enumeración. Así es como la mayoría entiende 4 como un número. No puede utilizarse para los cálculos, sus funciones son consideradas exclusivamente como un *extremo*, como el *número natural extremo* que comúnmente se utiliza implícita o explícitamente en la sucesión “1, 2, 3,..., 4” para caracterizar procesos infinitos.

El conjunto infinito de los números naturales. En la aritmética formal, los números naturales son normalmente caracterizados mediante la operación “ser sucesor de”: comenzar con 1, añadir 1 para producir un resultado, añadir 1 al resultado para obtener otro resultado, y así sucesivamente. Este es un proceso ilimitado, un proceso infinito que produce los números naturales, de uno en uno. El *conjunto infinito* no contiene *todos* los números naturales, sólo los números naturales propiamente, cada uno de los cuales es finito. Puesto que no se puede utilizar en los cálculos, 4 no es un miembro legítimo del conjunto infinito de los números naturales y aquí yace el problema de caracterizar este conjunto. El conjunto debe ser infinito ya que contiene a *todos* los números pero no puede contener a 4 como un número. El conjunto continúa creciendo sin fin y para obtener el conjunto *completo* de los números naturales, aunque el conjunto nunca acaba de crecer, se necesita algo más. En la teoría axiomática de conjuntos, se añade un axioma que simplemente estipula que el conjunto existe. Desde una perspectiva cognitiva, este conjunto se puede construir conceptualmente mediante una versión de la MBI que impone una compleción metafórica al proceso ilimitado de construir el conjunto de los números naturales. El resultado es la *colección completa*, el conjunto de *todos* los números naturales:

Dominio origen **PROCESOS ITERATIVOS QUE CONTINÚAN**		Caso especial **CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES**
El estado inicial (0)	Y	Conjunto de números naturales y una operación sucesor que añade 1 al último número y forma un nuevo conjunto
Estado (1) resultante a partir del estado inicial del proceso	Y	El conjunto vacío, conjunto de los números naturales menores que 1
El proceso: a partir de un estado intermedio dado (n-1) se produce el siguiente estado (n)	Y	Dado S_{n-1}, el conjunto de los números naturales menores que n-1, formamos S_{n-1}c{n-1} = S_n
El resultado intermedio tras esta iteración del proceso (relación entre n y n-1)	Y	En el estado n, tenemos S_n , el conjunto de los números naturales menores que n
“El estado resultante final” (infinito actual 4)	Y	**S_4, el conjunto de todos los números naturales menores que 4, es decir, el conjunto de todos los números naturales** (que no incluyen a 4 como un número)
Condición: El estado resultante final (“4”) es único y sigue a cualquier estado que no sea final	Y	**Condición: El conjunto de todos los números naturales es único e incluye a cada número natural (ni más ni menos)**

Numerales para los números naturales. Para construir los decimales infinitos tenemos que comenzar con los numerales para los números naturales en notación decimal; es decir, utilizando los dígitos 0, 1,..., 9. Para obtener el conjunto de *todos* los numerales para los números naturales no es suficiente situar un dígito tras otro sin fin. Esto nos daría una clase permanentemente creciente, un infinito potencial, pero no los numerales de todos los números naturales, un infinito actual. Necesitamos entonces un caso especial de la MBI. Comenzaremos con el estado inicial N_1, el conjunto vacío. En el primer paso del proceso añadiremos las representaciones del primer lugar decimal para formar el conjunto N_2 = {1,..., 9}; en el segundo crearemos N_3, el conjunto de decimales que ocupan el segundo lugar, a partir de N_2 como sigue: si *s* es un miembro de N_2, es un miembro de N_3. También, *s* seguido por uno de los numerales 0, 1, 2,..., 9 será un miembro de N_3. Por ejemplo, sea *s* el 5. Entonces las cadenas de dígitos 50, 51,...., 59 son también miembros de N_3. De esta manera se obtiene N_3 = {1,..., 9, 10, 11,..., 99} que es el conjunto de todos los numerales del primer y segundo lugar. Generalizaremos este proceso y lo utilizaremos como proceso iterativo en la MBI como sigue:

Dominio origen **PROCESOS ITERATIVOS QUE CONTINÚAN**		Caso especial **CONJUNTO INFINITO DE NUMERALES PARA EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES**
El estado inicial (0)	Y	N_1: el conjunto vacío
Estado (1) resultante a partir del estado inicial del proceso	Y	El conjunto de los numerales N_2 = {1, ..., 9}
El proceso: a partir de un estado intermedio dado (n-1) se produce el siguiente estado (n)	Y	Sea N_{n-1}, el conjunto de los numerales cuyo número de dígitos es menor que n-1. Sea *s* una cadena de dígitos en S_{n-1}. Los miembros de N_n toman una de las siguientes formas: *s*, o *s0*, o *s1*,..., o *s9*.
El resultado intermedio tras esta iteración del proceso (relación entre n y n-1)	Y	El conjunto de numerales N_n , donde cada uno de sus miembros tiene menos de n dígitos.
“El estado resultante final” (infinito actual 4)	Y	**N_4: el conjunto que contiene todos los numerales para todos los números naturales**
Condición: El estado resultante final (“4”) es único y sigue a cualquier estado que no sea final	Y	**Condición: N_4 es único y contiene todos los numerales para todos los números naturales**

En cada estado *n*, alcanzamos todos los numerales con menos de *n* dígitos. En el "estado final", donde *n* es el "número" metafórico 4, alcanzamos la *totalidad infinita* de los numerales de longitud finita cuyo número de dígitos es menor que 4, esto es todos los numerales de longitud finita.

Decimales infinitos. Consideremos B = 3.14159265...; B es un número preciso caracterizado por una cadena infinitamente larga de dígitos particulares a la derecha de la coma. No es sólo una sucesión que es cada vez más larga, sino una sucesión infinitamente larga, es un objeto; es una sucesión infinita particular, no un proceso que continúa indefinidamente; se trata de un caso de infinito actual. Y lo mismo es cierto para cualquier decimal infinito. Así, cada decimal infinito se puede considerar que está formado por dos partes: por una parte, una sucesión finita de dígitos a la izquierda de la coma decimal que es un numeral que representa un número natural y, por otra, una sucesión infinitamente larga de dígitos a la derecha de la coma decimal que representa a un número real entre cero y uno. Ya hemos visto que la MBI caracteriza la primera parte; ahora necesitamos mostrar cómo un uso especial de la MBI caracteriza a ambas partes.

Dominio origen **PROCESOS ITERATIVOS QUE CONTINÚAN**		Caso especial **NUMERALES PARA NÚMEROS REALES**
El estado inicial (0)	Y	R_0: el conjunto de los miembros de N_4 cada uno seguido por una coma decimal
Estado (1) resultante a partir del estado inicial del proceso	Y	R_1: para cada cadena de dígitos *s* en R_0, *s0*, *s1*, *s2*, ..., *s9* están en R_1
El proceso: a partir de un estado intermedio dado (n-1) se produce el siguiente estado (n)	Y	Los miembros de R_n tiene una de las siguientes formas: o bien *s0*, o bien *s1*, ..., o bien *s9*, donde la cadena de dígitos *s* es un miembro de R_{n-1}
El resultado intermedio tras esta iteración del proceso (relación entre n y n-1)	Y	N_n: el conjunto de numerales cuyos miembros tienen n dígitos después de la coma decimal.
"El estado resultante final" (infinito actual 4)	Y	**R_4: el conjunto infinito de numerales cuyos miembros tienen un número infinito de dígitos después de la coma decimal**
Condición: El estado resultante final ("4") es único y sigue a cualquier estado que no sea final	Y	**Condición: R_4 es único y todos sus miembros tienen más dígitos después de la coma decimal que cualquier miembro de cualquier otro R_n**

Es decir, dados los numerales de los números naturales para comenzar, obtenemos el conjunto resultante R_1 añadiendo un dígito (0, 1,..., ó 9) tras la coma decimal. A partir de aquí, obtenemos R_2 mediante el proceso indicado, es decir añadiendo otro dígito a los miembros de R_1, lo que nos da los números con dos decimales al final del estado 2. Al finalizar el estado *n*, tenemos el conjunto de todos los números con *n* decimales. El estado final dado por la MBI es el estado resultante metafórico 4° en el que el número de dígitos tras la coma decimal es infinito. El resultado de este caso especial de la MBI es el conjunto de todos los decimales infinitos. Debemos observar que en esta notación el número 4 se representa mediante el decimal infinito 4,0000.... Y estos son los numerales para todos los números reales. No hay propiamente número reales, sino sólo nombres para ellos; más aún, no se ha especificado cómo asociar cada nombre con el número real correspondiente. No es una cuestión trivial, ya que cada nombre tiene una longitud infinitamente larga y hay un número incontable de números reales. Esto lo resuelven los matemáticos asociando cada uno de estos nombres con un polinomio infinito único y representando cada número real como un polinomio infinito único:

$$a_n \cdot 10^n + \cdots + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \cdots + a_{-m} \cdot 10^{-m}$$

Núñez (2004 y 2005) analiza con cierto detalle un tipo particular de infinito actual, los cardinales transfinitos, así como la denominada Metáfora Básica del infinito (MBI) en términos de una mezcla conceptual que tiene dos espacios de entrada. Uno es un espacio que implica *Procesos Iterativos Completos* (aspecto perfectivo), lo que en matemáticas corresponde a aquellos que se definen en contextos finitos. El otro espacio de entrada implica *Procesos Iterativos Sin Fin* (aspecto imperfectivo) y, por lo tanto, caracterizan procesos que implican al infinito potencial. En el espacio mezcla lo que tenemos es la estructura inferencial emergente para caracterizar los procesos implicados en el infinito actual. La figura 8 muestra las correspondencias entre los espacios de entrada y las proyecciones hacia el espacio mezcla (Fauconnier y Turner, 1998). La correspondencia entre los dos espacios de entrada involucra a todos los elementos con excepción del último, el único elemento que distingue un proceso finito de uno potencialmente infinito. Todos los elementos que se corresponden entre sí se proyectan en el espacio mezcla. Pero lo que hace a esta mezcla verdaderamente interesante es el hecho de que los elementos distintivos de cada uno de los espacios de entrada se proyectan también creando así la estructura inferencial peculiar y específica observada en el infinito actual: *que un proceso sin fin tiene un fin y un estado resultante final*. Con el fin de ilustrar cómo funciona la MBI, Núñez considera la sucesión de polígonos regulares. El primer espacio de entrada supone un proceso finito con aspecto perfectivo; en dicho proceso participa una sucesión de polígonos regulares comenzando por el triángulo, luego el cuadrado, el pentágono, etc. hasta un polígono con un número finito de lados, digamos 127 lados. El segundo espacio de entrada involucra una sucesión interminable de polígonos regulares que tiene un aspecto imperfectivo. En la mezcla, todos los elementos que se corresponden se proyectan, dándonos la secuencia de polígonos regulares triángulo, cuadrado, pentágono, etc., pero ahora la componente "sin fin" de la sucesión, que se proyecta desde el segundo espacio de entrada, se mezcla con la componente "estado resultante final" de la primera entrada para darnos "una sucesión sin fin de polígonos regulares cuyo estado resultante final en el infinito es un círculo". Se trata de un tipo muy peculiar de círculo ya que en realidad es un polígono, pero un polígono con un número infinito de lados.

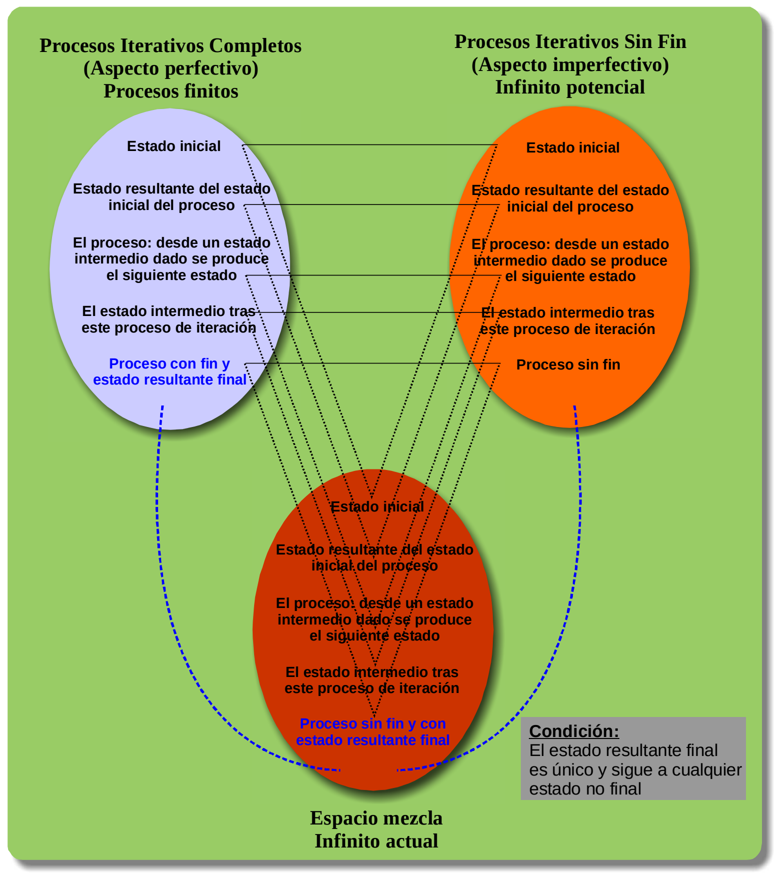


Fig. 8: Espacio Mezcla

Con esta herramienta cognitiva in mente, Núñez aborda el trabajo de Cantor con el fin de estudiar los mecanismos cognitivos que subyacen a los cardinales transfinitos. Para caracterizar su noción de potencia de un conjunto infinito, Cantor hizo uso de una metáfora conceptual: *Mismo Número Que* es *Emparejabilidad*. Esta metáfora le permitió crear el aparato conceptual necesario para dar un significado metafórico preciso a la comparación del número de elementos entre conjuntos infinitos. Las nociones habituales de “Mismo número que” y “Mas que” están basadas en la experiencia que tenemos con colecciones finitas. No hay ninguna controversia en estas nociones; Piaget ya describió con detalle cómo aparecían de manera muy temprana en el desarrollo cognitivo de los niños sin una educación orientada explícita. Podemos enfocar la pregunta *¿hay más números naturales que números pares?* con las nociones ordinarias de “mismo número que” o “más que” y establecer una correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos según se muestra en la figura

1 2 3 4 5 6 · ·

2 4 6 8 10 12 · ·

De esta manera llegamos a la conclusión de que, en efecto, hay más números naturales que pares ya que el primer conjunto también contiene a los impares. Pero también es cierto que ambos conjuntos son emparejables en el sentido de que podemos establecer una correspondencia uno a uno. Ahora bien, señala Núñez, “emparejabilidad” y “mismo número que” son dos ideas muy diferentes. Ambas tienen la misma extensión para colecciones finitas, pero son cognitivamente diferentes y su estructura inferencial difiere notablemente. En sus investigaciones sobre las propiedades de los conjuntos infinitos, Cantor utilizó el concepto de *Emparejabilidad* en lugar de nuestro concepto habitual de *Mismo Número Que*. De esta manera estableció una metáfora conceptual en la que un concepto, “mismo número que”, se conceptualiza en términos de otro, “emparejabilidad”. En el esquema adjunto podemos ver el esquema de esta metáfora conceptual.

Nos recuerda Núñez que podemos leer con frecuencia en libros de matemáticas, artículos y libros de texto que “Cantor demostró que hay tanto números pares positivos como números naturales”. Pero de acuerdo con el enfoque cognitivo, Cantor no probó tal cosa. Lo que Cantor hizo fue simplemente probar que ambos conjuntos eran *emparejables*. Sólo mediante la metáfora de Cantor es posible dotar de sentido a la expresión “demostró que hay tantos números pares como naturales”. Algunos textos matemáticos (Maor, 1991 y Sondheimer y Rogerson, 1981) ignoran, en general, la naturaleza metafórica del nuevo significado que Cantor dio a la idea de emparejabilidad; como consecuencia, concluyen con frecuencia que hay algo fundamentalmente erróneo en la intuición humana cuando trata con el infinito. El análisis cognitivo muestra que no hay nada erróneo en nuestra “intuición”, ni nada erróneo en nuestro “lenguaje cotidiano”. Trabajos extensos en lingüística cognitiva muestran que la metáfora conceptual y la mezcla conceptual no son meros fenómenos lingüísticos, sino que son pensamiento y conocimiento. De acuerdo con nuestra noción ordinaria de “más que” hay, en efecto, más números naturales que pares o cuadrados. Hay una lógica precisa estructurada cognitivamente tras esta inferencia. Esto, por supuesto, no resta brillantez a los resultados de Cantor; la ingeniosa extensión metafórica de Cantor del concepto de emparejabilidad y su aplicación a los conjuntos infinitos constituye un hito conceptual extraordinario en matemáticas. Lo que hizo en el proceso fue crear una nuevo concepto técnico matemático, la emparejabilidad, y con él, nuevas matemáticas. Estas nuevas matemáticas no podrían haberse inventado sólo con nuestras nociones ordinarias habituales de “mismo número que” y “más que”. Pero Cantor también pretendía que la emparejabilidad fuese una extensión literal de nuestra noción ordinaria de “mismo número que” desde los conjuntos finitos a los infinitos. Para Núñez, aquí se equivocó Cantor. Desde una perspectiva cognitiva, es una extensión metafórica en lugar de una extensión literal de nuestro concepto habitual y esto le permite a Núñez afirmar que la naturaleza del infinito potencial y actual puede entenderse no en términos de verdades trascendentales, o platónicas, o en términos de lógica formal, sino en términos de *ideas humanas* y *mecanismos cognitivos humanos* tales como los sistemas aspectuales, las metáforas conceptuales y las mezclas conceptuales. Estos mecanismos no son propiamente matemáticos sino que son mecanismos cognitivos humanos, observados tras millones de años de evolución y limitados por las peculiaridades de los cuerpos y cerebros humanos (ver Fig. 9).

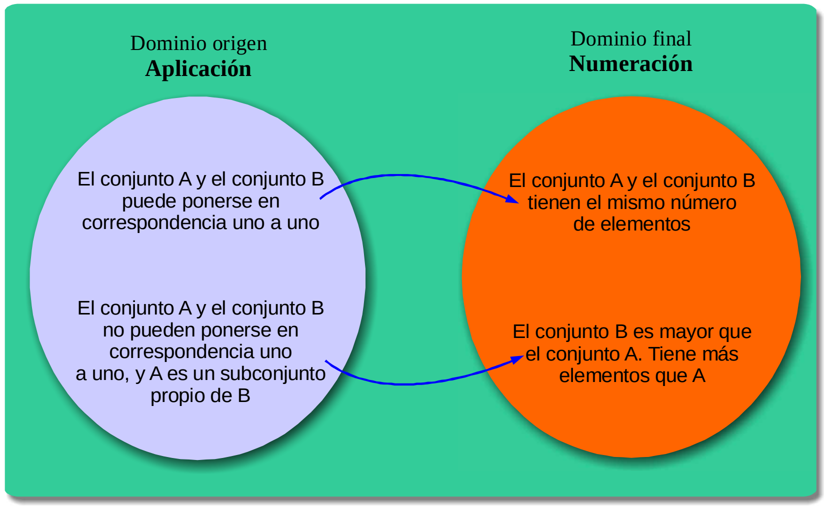


Fig. 9: Relación de emparejabilidad

2.6. CRECIMIENTO MATEMÁTICO.

Es muy importante mostrar cuántas matemáticas construye la biología humana, pero para analizar el crecimiento matemático en toda su riqueza y diversidad es importante centrarse en las diferencias que se dan en la imagen biológica. Esto ha llevado a Tall a categorizar el pensamiento matemático en *tres mundos* distintos lo que le ha supuesto un síntesis ponderada de trabajos clásicos de Piaget, van Hiele, Dienes, Bruner y otros en su esfuerzo por definir las diferentes etapas del crecimiento cognitivo de las matemáticas.

2.6.1. LOS TRES MUNDOS DE LAS MATEMÁTICAS.

Tall en su obra inédita, aún en periodo de revisión, *Three World of Mathematics*, intenta desarrollar una teoría global del crecimiento matemático desde la infancia hasta la formalización académica de los matemáticos profesionales (Tall, 2004). Considera la *compresión mental* una de las claves de la simplicidad del pensamiento matemático y a las ideas centrales que surgen de ella Barnard y Tall las denominan *unidades cognitivas*. La cuestión que se plantean es cómo se forman estas unidades tan perfectamente comprimidas y cómo establecen sus conexiones en un sofisticado tejido de fuertes vínculos[44].

Tall establece como pilares de la teoría el *foco de atención local*, esencial para concentrarse en los detalles, y la *consciencia global*, que permitirá comprimir los detalles en unidades cognitivas potentes y generativas contribuyendo en la resolución de problemas. Así, el éxito del desarrollo del pensamiento matemático requiere el establecimiento de estrechos vínculos entre ideas que son

44. Los conceptos matemáticos se comprimen de diferentes maneras en diferentes dominios de las matemáticas. Por ejemplo, hay una compresión enorme en la aritmética desde los lentos procesos de contar al simple concepto de número o desde los procesos de sumas repetidas hasta el concepto de multiplicación. Así mismo, en las matemáticas formales hay incluso una mayor compresión, donde una simple letra como ú puede representar al conjunto de todos los números reales o el símbolo que representa un número cardinal infinito.

comprimidas de manera que encajen en el foco de atención, mientras se construyen vínculos entre tales entidades en una consciencia global más amplia. Para todo ello se recurre a la representación simbólica de las ideas y a la manipulación de estos símbolos mediante los vínculos disponibles. La mecánica de cómo ocurre esto surge de una propiedad biológica fundamental del cerebro. Los vínculos mentales utilizados se sitúan en máximo estado de alerta y aumenta la probabilidad de que se pongan en funcionamiento y, si son utilizados durante este estado, saldrán reforzados. Con el tiempo, crecen nuevos vínculos entre estructuras cognitivas cada vez más sofisticadas y van desapareciendo los menos utilizados. Este proceso biológico se denomina *potenciación a largo plazo* y gracias a este mecanismo, resultado de la experiencia y la reflexión, la estructura cerebral del niño se desarrolla hasta llegar al pensamiento abstracto. Este mecanismo de potenciación convierte en automáticas a las actividades que se realizan repetidamente. Aquellas cosas sobre las que necesitamos pensar conscientemente son traídas a nuestro foco de atención mientras que aquellas que se han convertido en automáticas quedan en el subconsciente.

A lo largo de nuestro desarrollo nuestras experiencias establecen nuevas estructuras en el cerebro que se utilizarán para dotar de sentido a experiencias posteriores. Un concepto matemático, tal como la numerosidad de conjuntos pequeños, que poseemos al nacer, o poco después, lo denomina Tall (2006) *set-before* ya que está disponible antes de nuestro nacimiento en nuestros genes. Al encontrarse nuevos contextos, los individuos construyen nuevas ideas basadas en estructuras mentales que poseen en ese momento. Una construcción previa a la que se recurre para aplicarla a una situación corriente se denomina *met-before*. Ambos conceptos nos predisponen para pensar en nuevas situaciones. En general, se utilizará el término *met-before* para referirse tanto a un origen genético como experimental. El crecimiento cognitivo se revela como una historia de cada individuo nacido diferente, dotado con una estructura *set-before* subyacente y poseedor de una variedad de experiencias que construyen *met-befores* utilizadas posteriormente para desarrollar capacidades mentales individuales superiores. Muchas *met-before* son muy positivas[45], pero otras pueden causar problemas[46]. Por lo tanto, no sólo se trata de añadir nuevo conocimiento al viejo, también se precisa de la *reconstrucción* del conocimiento, dándole nuevos y *diferentes* significados a los viejos conceptos matemáticos. Por otra parte, también es necesario contar con la coherencia de la consciencia global del niño. El niño tiene *met-before* arraigadas tales como "no puedes tener menos que nada", "diferencia significa quitar el más pequeño al más grande" y otros fragmentos de conocimiento que afectan sutilmente a sus creencias. Estas creencias subyacentes pueden suponer un obstáculo para el aprendizaje al entrar en conflicto con nuevas ideas[47].

45. Por ejemplo, si un niño tiene como *met-before* la idea de contar y ha desarrollado cierta sensibilidad hacia los números contando, y sabe que 3+5 es 8, esta *met-before* puede ser utilizada no sólo para contar objetos sino para añadir longitudes o para hacer una aritmética más sofisticada tal como añadir números con varios dígitos que implican el valor posicional.

46. Por ejemplo, si tengo 8 manzanas y quito 5, me quedan 3. Pero si tengo 5 manzanas, en términos físicos yo no puedo quitar 8 porque no tengo suficientes manzanas para llevar a cabo la tarea. No es posible concebir "-3" manzanas en el sentido en que se conciben 3 manzanas. Para muchos individuos, los números negativos carecen de significado ya que "no puedes tener menos que nada".

47. Encontraremos tales *met-befores* a menudo mientras viajamos a través del desarrollo matemático que se requiere para el crecimiento del niño: la *met-before* "quitar algo siempre da menos" que funciona para números naturales, no funciona para números con signo; la met-before "la multiplicación siempre da un resultado mayor" que funciona con número naturales, no funciona para fracciones menores que la unidad.

En el pensamiento matemático avanzado las definiciones son sutilmente diferentes de las definiciones prescriptivas de las matemáticas elementales; se sitúan en el lenguaje de la teoría de conjuntos y no necesitan mantener vínculos con referencias materiales concretas[48]. Las propiedades en sí constituyen el asunto en cuestión y serán el punto de partida de deducciones que se formularán como *teoremas*. Una vez demostrado, el enunciado del teorema se convierte en un *concepto* que puede utilizarse en la demostración de nuevos teoremas. A partir de un proceso, la demostración se comprime en un concepto -*unidad cognitiva*- que puede utilizarse como un bloque de construcción para probar nuevos teoremas y extender más allá la teoría. De esta manera, llegamos a una nueva forma de compresión de la información en una lista compacta de axiomas generativos; ahora la compresión es enorme. Ya no pensamos en procesos individuales tales como contar o entidades tales como el número siete. Disponemos de un vasto sistema que ha sido *encapsulado* como una simple construcción axiomática[49]. A partir de todo lo anterior, Tall establece una teoría del crecimiento matemático que se basa en tres actividades humanas fundamentales, *percepción, acción* y *reflexión*, sobre las que ya hemos hecho mención en un apartado anterior. Surgen así diferentes tipos de matemáticas, dependiendo de si la atención se centra en los objetos o en las acciones.

- Una *teoría basada en el objeto corporeizado* se fundamenta en las percepciones de los objetos, categorizándolos, analizando sus propiedades y describiéndolas con el lenguaje y, por último, buscando relaciones. Esto se puede dar en una gran variedad de contextos, desde el estudio de figuras geométricas, hasta la observación de representaciones visuales de datos en la forma de gráficos o diagramas. La experiencia y el uso del lenguaje nos capacita para describir las percepciones más precisamente y para pasar de dicha *descripción* a las *definiciones* que prescriben nuestras ideas en un sentido más preciso. Quizás el desarrollo más sofisticado de una teoría basada en el *objeto corporeizado* se da en la geometría, donde el aumento de la sofisticación conduce naturalmente al desarrollo de la demostración euclidea. No obstante, a lo largo de nuestro crecimiento matemático, la *corporeización* subyacente de las ideas permanece como una poderosa fuente de significado.

- Por el contrario, una *teoría basada en la acción simbólica*, como contar, se basa en procesos que se aplican sobre objetos; se requiere pensar más en lo que "hacemos" que en lo que vemos. Al principio, las actividades se materializan mediante operaciones físicas con objetos reales, son *corporeizadas*. Tras un cierto periodo de tiempo, el centro de atención se desplaza de los procesos de contar los objetos a las palabras que representan el número de objetos de una colección dada. Como las acciones transcurren en el tiempo podemos realizarlas, pero es más difícil pensar en ellas como un todo. La solución es introducir *símbolos* que pongan en funcionamiento los *procesos* -contar, sumar, derivar, integrar- y pensar en los símbolos también como *conceptos* que podemos almacenar en nuestra mente -tales como números, sumas, derivadas, integrales-. El uso de los símbolos para los números permite que estos *procesos*, como el de *añadir* 3+2, puedan ser concebidos mentalmente como *conceptos*,

48. Traducción del término *corporeización*: según permita su uso este término se mantendrá en su versión inglesa original, o bien se traducirá como materia/materialización, físico, tangible, encarnación, objetificacion, representacion, manifestación, etc.

49. Así, por ejemplo, $\mathbb{R}$, encapsula todo lo que sabemos sobre los "números reales" en una breve lista de axiomas a partir de la cual se pueden deducir todas las demás propiedades.

como el de *suma* 3+2 que da 5. En consecuencia, la aritmética, y por lo tanto el álgebra, utiliza los símbolos tanto para representar conceptos mentales como para desarrollar procesos matemáticos; estos símbolos, como ya hemos visto, reciben el nombre de *proceptos*, debido a su carácter dual.

En principio, esto es todo lo que necesitamos, *corporeización* que nos proporcione ideas conceptuales y *símbolos matemáticos* que nos permitan enumerar, medir, calcular, manipular, etc. para obtener cálculos precisos en las soluciones de los problemas. Las matemáticas elementales de la educación primaria utilizan estos dos tipos de conceptos a la par, pasando de uno a otro según convenga. Los símbolos de los números comienzan desde actividades *corporeizadas*, tales como contar para dar un número, combinar para dar una suma, repetir la suma para dar una multiplicación, dividir para dar una fracción. Tales símbolos numéricos surgen a partir de *acciones corporeizadas* pero se convierten en símbolos manipulables como proceptos. Para la mayoría de la gente que estudia matemáticas una combinación de conceptos *corporeizados* y simbólicos es más que suficiente para todas sus necesidades matemáticas.

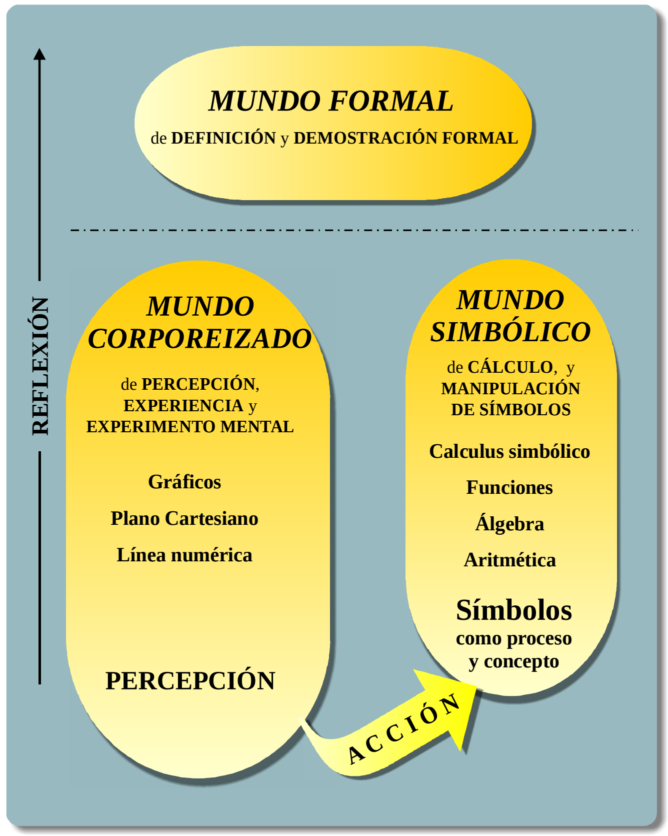


Fig. 10: Los tres mundos matemáticos de Tall

- Una tercera categoría de conceptos matemáticos surge como producto de la reflexión para producir una *teoría basada en propiedades formales*. Los conceptos formales sólo pueden construirse después de un largo aprendizaje de matemáticas elementales, estudiando propiedades y relaciones entre conceptos que surgen a partir de los otros dos tipos de conocimiento. Estos conceptos se especifican mediante definiciones explícitas y sus propiedades se deducen mediante demostraciones formales.

Estos tres tipos de conceptos matemáticos operan de manera tan diferente que se podría hablar de ellos como habitantes de mundos diferentes, con diferentes tipos de objetos que presentan diferentes métodos de construcción y operación. Por ejemplo, los objetos físicos que forman parte de nuestro mundo cotidiano de percepción y acción ya existen “ahí fuera”. Los vemos, los tocamos, hablamos sobre ellos y describimos sus propiedades y relaciones, y construimos imágenes mentales de ellos cada vez más sofisticadas hasta que podemos imaginarlos con tal perfección que ya no dependen de su observación física. Esto nos da un *mundo corporeizado conceptual* o para abreviar *mundo corporeizado*, que se construye inicialmente sobre la percepción pero que muy pronto mediante la imaginación interna de los objetos podemos “verlo” y manipularlo con los ojos de nuestra mente. Mediante la reflexión y el uso de un lenguaje cada vez más sofisticado, podemos centrarnos sobre aspectos de nuestra experiencia sensorial que nos permite concebir conceptos que ya no existen en el mundo exterior, tales como una "línea" que es "perfectamente recta", una geometría que no es euclidea o bien un número complejo como un punto del plano complejo. En el *mundo corporeizado*, el más simple, algo es verdad cuando podemos "ver" que es verdad y a medida que aumenta la sofisticación, buscamos dar un

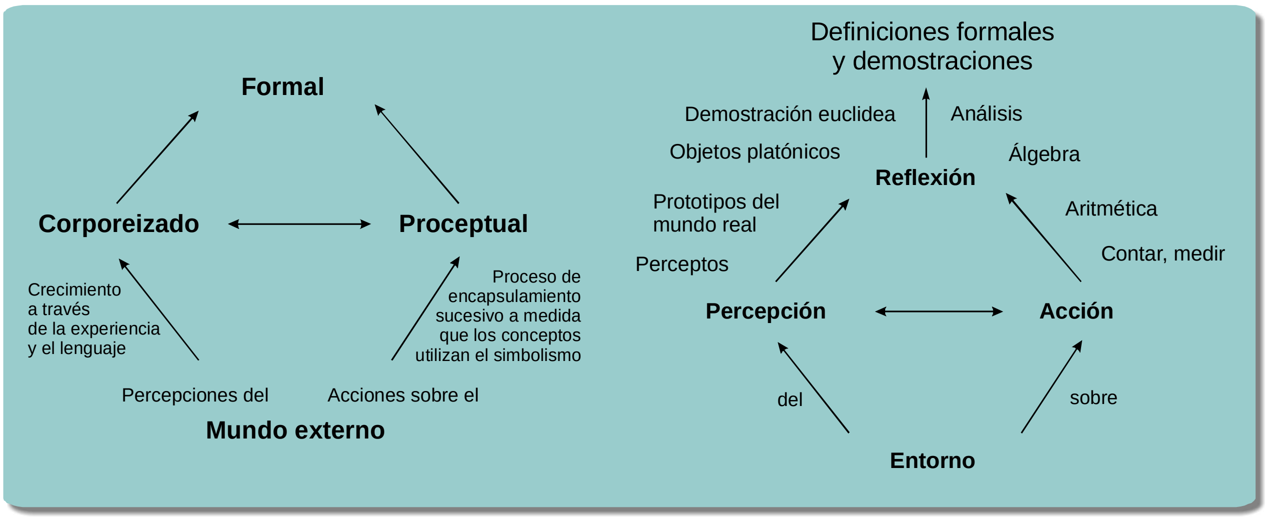


Fig. 11: Crecimiento matemático

argumento verbal a la manera de una prueba euclidea; la verdad se basa primero en nuestras intuiciones fundamentales humanas y después en experimentos mentales más elaborados. La manera en que se desarrolla la prueba –demostración- en el mundo corporeizado comienza en la observación de aspectos globales de los objetos, observando y describiendo propiedades específicas y utilizando estas propiedades para establecer definiciones que podrán utilizarse posteriormente en la deducción de otros resultados. En el mundo simbólico, la prueba también comienza con la observación de regularidades en las operaciones con números. A partir de aquí, los ejemplos genéricos en aritmética pueden conducir a la generalización aritmética mediante el uso de la notación algebraica para obtener una representación simbólica de generalidad. A través de los mundos corporeizado y simbólico, las definiciones y deducciones están basadas en la experiencia de las propiedades de los objetos y de las acciones que están simbolizadas como *proceptos*. El siguiente paso permite que la atención se centre no ya en objetos o en acciones,

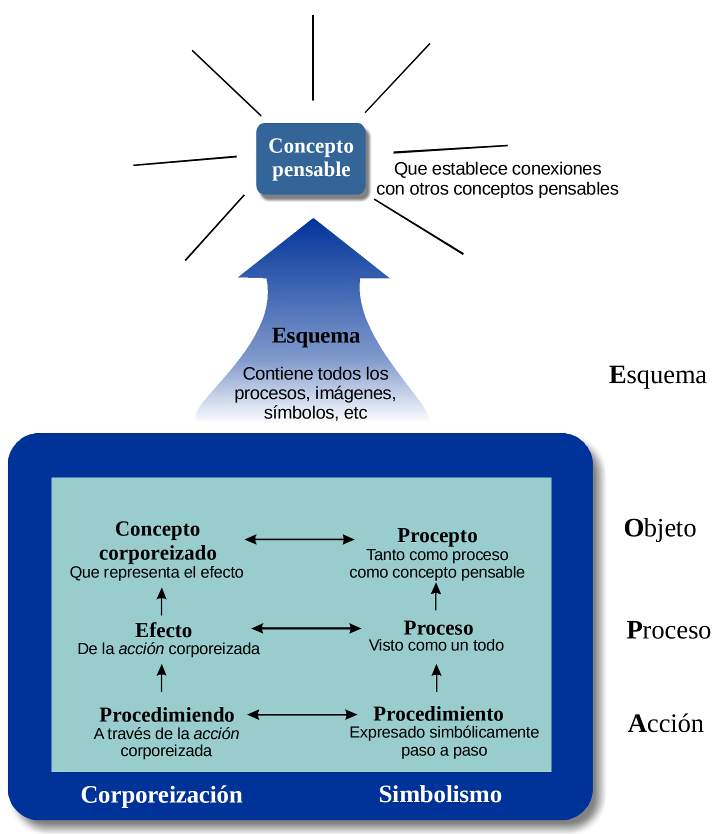


Fig. 12: Compresión de un esquema de conocimiento proceptual en un concepto pensable

sino en propiedades. Esto nos lleva a métodos muy diferentes de argumentar en los tres mundos matemáticos. En el mundo corporeizado, 3+2 es lo mismo que 2+3 porque *lo veo*. En el mundo simbólico 3+2 es lo mismo que 2+3 porque *puedo calcularlo*. Y en el mundo formal, $x + y = y + x$ en una estructura matemática específica porque *es un axioma*.

El *mundo simbólico proceptual* o simplemente *mundo proceptual* de la aritmética y el álgebra es muy diferente. Es el resultado de acciones sobre el mundo *corporeizado* de los estadios iniciales de contar y la aritmética más temprana Se centra inicialmente en las acciones sobre los objetos del mundo real que se simbolizan y tales símbolos se conciben como objetos mentales sobre los que se puede actuar. Se comienza con acciones, tales como reunir y contar, que son encapsuladas como conceptos mediante símbolos que nos permiten cambiar sin esfuerzo de procesos para hacer matemáticas a conceptos para pensar sobre ellas. Está habitado por símbolos que actúan de manera dual como procesos y como conceptos, tales como 3 + 2 que representa tanto el proceso de adición como el concepto de suma[50].

En el *mundo axiomático formal*, o *mundo formal*, los conceptos surgen debido a que les damos definiciones verbales y argumentamos sobre sus propiedades utilizando la deducción formal. Esto nos permite trabajar no con objetos familiares de nuestra experiencia, sino con axiomas que son cuidadosamente formulados para definir estructuras matemáticas en términos de propiedades específicas.

El estudio del crecimiento matemático se centra en las formas en que estos tres mundos distintos se desarrollan e interaccionan. Algunos captarán lo esencial como ricas unidades cognitivas y aprenderán a pensar de una manera matemática, a otros les llevará tiempo reunir ideas y, al hacerlo así, poder manipular conceptos más difusos afectados por met-befores que impidan el progreso. Como vemos, cada uno de los tres mundos de las matemáticas tiene diferentes maneras de conceptualizar las ideas y diferentes formas de garantizar su verdad.

Los nombres corporeizado, proceptual y formal de estos tres mundos tienen diferente significado en otras teorías como ya hemos visto en el apartado anterior. Es por ello por lo que Tall introduce la extensión de estos nombres a *conceptual-corporeizado*, *proceptual-simbólico* y *axiomático-formal* con el fin de indicar el significado particular que se les da a estos términos. Así, por ejemplo, Lakoff y Núñez (2000) establecen que *todas* las ideas matemáticas fundamentales están construidas desde los orígenes humanos utilizando relaciones entre ideas como metáforas. Por ejemplo, consideran los números reales como una “mezcla metafórica” de tres metáforas conceptuales distintas: como espacio naturalmente continuo -una línea-, como decimales y como un conjunto de puntos distintos. Por su parte, el análisis de Tall da esencialmente las mismas categorías desarrolladas sucesivamente por un estudiante típico: un *corporeización* conceptual como una línea -en el *mundo corporeizado*-, una representación simbólica como los números -en el *mundo simbólico*- y una definición como un campo ordenado completo -en el *mundo formal*-.

50. Como se puede apreciar en el desarrollo histórico de los números complejos, la manipulación de símbolos puede conducir a actividades coherentes que pueden estar desprovistas de cualquier vínculo con la imaginación geométrica del individuo. Por tanto, tenemos evidencias de que los símbolos pueden ser manipulados sin referencia alguna al *corporeización* correspondiente. Por otra parte, los conceptos espaciales pueden existir sin representación simbólica alguna. Así pues, ambos mundos, el de corporeización conceptual y el de simbolismo proceptual puede funcionar separadamente. Sin embargo, como en el caso de los números complejos, tras haber sido manipulados simbólicamente durante varias generaciones se les dotó de una *corporeización* significativa como puntos en el plano, con lo que ambos mundos también pueden operar en colaboración.

El pensamiento formal comienza cuando se aíslan propiedades seleccionadas y se utilizan como definiciones conceptuales a partir de la cuales se pueden deducir otras propiedades mediante demostraciones matemáticas. Pinto (1998) identifica dos enfoques fundamentalmente diferentes para construir sistemas axiomáticos. Un *enfoque natural* que construye sobre imágenes conceptuales para dar un significado personal a la definición formal; esto significa construir ejemplos de la definición que son suficientemente generativos como para utilizarlos como base de experimentos mentales con el fin de imaginar posibles teoremas y estrategias para demostrarlos. Y, por otra parte, un *enfoque formal* que se centra esencialmente en las definiciones, utilizando deducciones formales para construir teoremas de manera que se pueda evitar cualquier referencia a la intuición. Los matemáticos utilizan ambos enfoques adaptándolos a un contexto dado. A partir de aquí, Tall (2001) distingue entre *infinitos naturales*, aquellas concepciones personales que surgen de la reflexión de experiencias finitas y que la imaginación extiende hasta el infinito, e *infinito formal* que procede del enfoque formal que se dio en el siglo veinte a las matemáticas para intentar racionalizar las inconsistencias que surgían del enfoque personal, seleccionando una lista de propiedades específicas, o axiomas, a partir de las cuales, mediante deducción formal, se construye dicho infinito. Nos recuerda Tall en este trabajo que para un concepto dado desarrollamos un esquema conceptual completo en el cerebro. Este esquema conceptual crece y cambia con la experiencia y la reflexión. Tal entidad biológica no puede ser totalmente coherente entre las diversas partes del esquema conceptual desarrolladas en momentos diferentes y de maneras diferentes. Nuestros esquemas conceptuales están llenos de experiencias parciales que se centran en unos pocos aspectos de una situación vinculados todos ellos mediante diversas asociaciones. Lo que intentamos hacer en matemáticas es racionalizar las diversas experiencias para construir de manera coherente una posible imagen. Y es mediante un esquema conceptual complejo como el individuo intenta construir un sistema con el que comunicarse mediante gestos, imágenes, palabras y símbolos.

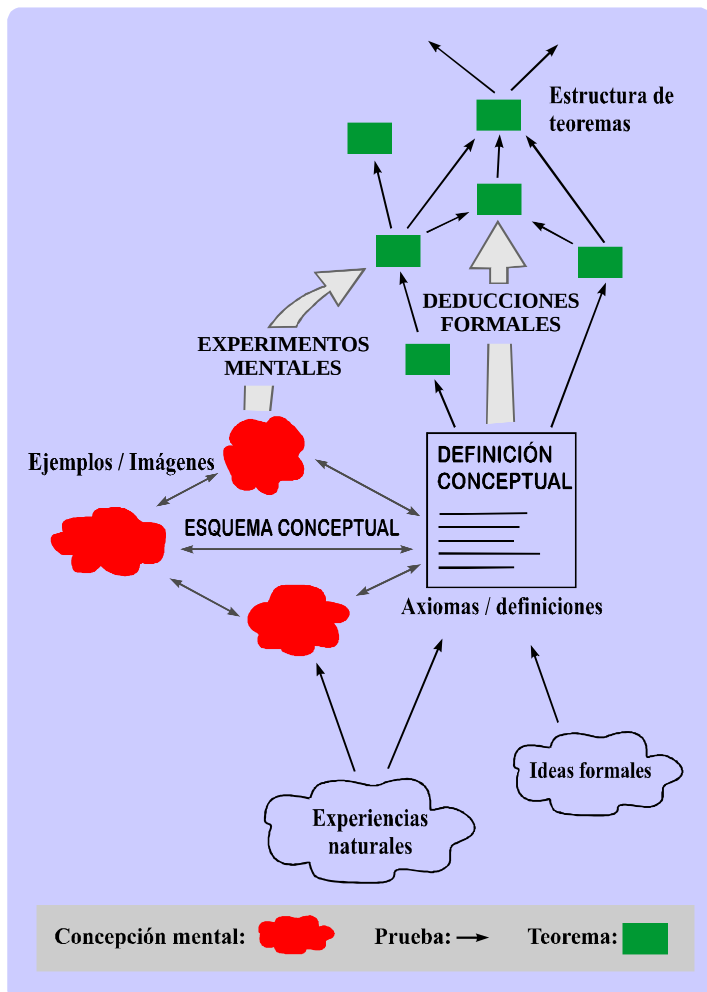


Fig. 13: Corporeización y esquema conceptual

Para Tall el desarrollo del *conocimiento corporeizado* de Lakoff y sus colegas da una idea bastante convincente de "dónde vienen las matemáticas" en términos de la experiencia corporal y la percepción física apoyadas por los sistemas de lenguaje, hallándose más cerca del enfoque natural que introducen Tall y Pinto que del formal. El aprendizaje natural crece explícitamente desde las percepciones, acciones y reflexiones individuales y crece en rigor mediante la transformación de los pensamientos *corporeizados* en otros matemáticos formalmente presentados, a menudo íntimamente relacionados con su fuente natural. Para Tall todos los pensamientos matemáticos ocurren necesariamente en el cerebro, pero esto no significa que todo pensamiento este relacionado con una percepción corpórea. Hay evidencias físicas de que se utilizan diferentes áreas del cerebro para el pensamiento natural y el pensamiento formal produciéndose un cambio físico genuino en los procesos de pensamiento para utilizar áreas del córtex que no están directamente relacionadas con la percepción corpórea (Houdé et al., 2000). Así, considera Tall que no sólo se puede utilizar el pensamiento *corporeizado* para apoyar el pensamiento formal, sino que también el pensamiento formal puede generar teoremas estructurales con una base lógica que conduzcan a un tipo más sofisticado de pensamiento *corporeizado.*

Por último, dada la relevancia que presentan las tesis del modelo APOE conviene establecer algún tipo de equivalencia entre la teoría de los tres mundos y la teoría APOE. Para Juter (2005 y 2006) esta última constituye un modelo jerárquico basado en el pensamiento piagetiano de asimilación y acomodación con cuatro etapas desde la acción al esquema. El modelo de Tall (2004) de los tres mundos de las matemáticas es similar al modelo APOE pero menos rígido. Ambos modelos difieren en el número de estadios y en sus descripciones, aunque cada modelo describe una transición desde la percepción de un concepto matemáticos a través de acciones hasta que dicho concepto se observa como un objeto que puede ponerse en conexión con otros objetos o bien se abstraído formalmente en nuevas situaciones. El estadio "acción" del modelo APOE, similar al mundo corporeizado en el modelo de los tres mundos, comienza con la percepción de fenómenos u objetos mediante la exploración con acciones realizadas sin un claro sentido de la respuesta o la esencia de la acción. El mundo proceptual es una síntesis del segundo y tercer estadios del modelo APOE. Las acciones procedimentales sobre las concepciones mentales del primer mundo son encapsuladas mediante el uso de símbolos. El término precepto denota el símbolo junto con el proceso y el concepto que representa y puede utilizarse dualmente tanto como proceso como objeto dependiendo del contexto. El mundo formal se alcanza cuando el individuo puede utilizar expresiones formales para definir propiedades matemáticas y es capaz de entender conceptos de una manera completamente nueva. El último estadio del modelo APOE establece el vínculo de un concepto con otros conceptos en una red mental o esquema (Dubinsky y McDonald, 2002).

APOE	TRES MUNDOS
Acción	Mundo corporeizado
Proceso Objeto	Mundo proceptual
Esquema	Mundo formal

Fig. 15: Modelos de la formación de conceptos

2.6.2. EL LENGUAJE Y LOS TRES MUNDOS DE LAS MATEMÁTICAS.

Para Wittgenstein "los límites del lenguaje […] significan los límites de mi mundo". Desde mediados de los años 80 del siglo pasado, los investigadores han indicado diferentes maneras en que el lenguaje está implicado en el aprendizaje de las matemáticas. Estos estudios identifican las estructuras lingüísticas que se utilizan en matemáticas de diferentes maneras a partir de cómo se utiliza el lenguaje típicamente en la vida cotidiana, sugiriendo que estas maneras suponen un desafío para muchos estudiantes (Pimm, 1987, Spanos, Rodees, Dale y Crandall, 1988 y Adams, 2003). Más recientemente, los lingüistas que adoptan una perspectiva funcional del lenguaje han profundizado en nuestra comprensión de los desafíos lingüísticos de la educación matemática, describiendo los patrones a través de los cuales se construye el conocimiento matemático (Veel, 1999 y O'Halloran, 2003). Por otra parte, también se observa un incremento en el estudio del lenguaje en relación con el PMA (Watson, Spyrou y Tall, 2003; Tall 2004). Mientras el niño se desarrolla, el lenguaje no opera construyendo a partir de los conceptos más simples y moviéndose de manera jerárquica hacia lo más general; el niño centra su atención primero sobre cosas del mundo que puede reconocer mediante sus sentidos y que son importantes para él. Como ya hemos visto anteriormente, Tall distingue tres "mundos de las matemáticas" que tienen diferentes maneras de utilizar el lenguaje; el primero de ellos es producto de nuestras percepciones del mundo y está compuesto por nuestro pensamiento sobre las cosas que percibimos y sentimos, no sólo en el mundo físico, sino también en nuestro propio mundo mental de significados y

> mediante la reflexión y el uso de un lenguaje cada vez más sofisticado, podemos centrarnos sobre aspectos de nuestra experiencia sensorial que nos permiten concebir conceptos que no existen en el mundo exterior.

También Pimm (1987) mantiene que la metáfora es un elemento tan central en el significado de las expresiones matemáticas como en el significado del lenguaje cotidiano, mientras que Presmeg (1992) enfatiza las maneras en que la metáfora puede ayudar al desarrollo y comprensión de conceptos matemáticos abstractos. Sfard (1994), por su parte, recoge aquellos tipos de metáforas que emanan de las experiencias corporales, sugiriendo que las metáforas pueden jugar un papel crucial en la traducción de experiencias corporales en el ámbito menos concreto de las ideas matemáticas. Núñez (1999) y Lakoff y Núñez (2000) recogen una serie de resultados que avalan la consideración del denominado pensamiento metafórico, como ya hemos recogido. Sin embargo, Schiralli y Sinclair señalan que aún siendo correcta la hipótesis de la base sensomotora de los conceptos abstractos no se pueden reducir todos ellos a dichas raíces.

Para Tall, en cada uno de los tres mundos de las matemáticas, el lenguaje opera de manera muy diferente. En el mundo corporeizado, el uso del lenguaje está muy próximo a la experiencia cotidiana y al crecimiento cognitivo. En la percepción cotidiana, todos nosotros podemos tener una imagen de lo que significa "línea recta"; sin embargo, mientras reflexionamos sobre esta idea, alcanzamos un sentido más sutil de lo que significa. En el mundo real, una línea recta sólo necesita tener un cierto nivel de rectitud. Nos parece que somos capaces de imaginar lo que significa ser *precisamente* recto de una manera tal que nunca lo observaremos en un contexto físico. Esto es un producto natural del proceso de pensamiento de la especie humana cuya percepción se intensifica mediante el uso analítico y descriptivo del lenguaje. Utilizamos el lenguaje como unas "magníficas lentes" metafóricas al hablar de lo que significa rectitud para nosotros, centrándonos sólo en aquellas propiedades que importan y filtrando las que no. Por ejemplo, podemos decir que una línea recta es tal que supone la distancia más corta entre dos puntos en el espacio, o bien que tiene longitud pero no espesor. Mientras el niño se desarrolla, el lenguaje no opera construyendo a partir de los conceptos más simples y moviéndose de manera jerárquica hacia lo más general. El niño centra su atención primero en cosas del mundo que puede reconocer mediante sus sentidos y que son importantes para él.

En el lenguaje utilizado en geometría, las categorías básicas de objetos son inicialmente cosas tales como triángulo, cuadrado, círculo, punto, línea. Son reconocidos fácilmente, como por ejemplo un cuadrado, y considerados como una categoría diferente de otras categorías similares tales como un rectángulo. Sin embargo, a medida que el lenguaje se hace más dominante, puede utilizarse no sólo para *describir* las propiedades de varias categorías de objetos sino también para *prescribir* las propiedades, por adelantado, que debe tener un objeto para ser miembro de una categoría particular. Esto nos capacita para construir una compleja, pero manejable, jerarquía de objetos geométricos, basada en la categorización de sus propiedades[51]. El estudio del desarrollo cognitivo de la especie humana nos permite afirmar que la construcción de objetos idealizados es una consecuencia natural del crecimiento cognitivo del cerebro humano. Con el desarrollo del cerebro ciertos vínculos se desarrollan y otros se atrofian; con el fin de centrarnos en la información importante nos hacemos más conscientes de algunos aspectos y menos de otros.

El uso del lenguaje en la aritmética se construye sobre una base completamente diferente: nuestra habilidad para utilizar las variaciones de las palabras para representar nombres, acciones, propiedades, etc. Hablamos de “una manzana roja” y del color “rojo”. La misma palabra se utiliza primero como un adjetivo para describir una cualidad particular de una manzana y luego como un nombre que destaca la naturaleza del propio color. De la misma manera, un verbo tal como “caminar”, en el sentido de “camino hacia el colegio” puede convertirse en un nombre tal como “caminar” en el sentido de “caminar es la mejor manera de ir allí”. La palabra “caminar” es un infinitivo. Se utiliza con el verbo “ser” o “estar” para indicar acciones en diversos tiempos, tales como el presente “estoy caminando” y el futuro “Iré a caminar mañana”. Esta gran flexibilidad del lenguaje se utiliza cuando los símbolos comienzan a adquirir un rango similar de significados implícitos. Los números, con frecuencia, se utilizan como adjetivos o nombres. Igual que podemos tener “manzanas rojas” podemos decir “siete manzanas”. El análisis gramatical del número como adjetivo, sin embargo, tiene propiedades sutiles que no se aplican a otros adjetivos. Mientras la noción de “manzanas rojas” nos dice que cada una de las manzanas es roja, el término “siete manzanas” no nos dice nada sobre ninguna de las manzanas en particular. Nos habla sobre la *colección* de manzanas, concretamente sobre *cuántas hay*. Pensar en un número como adjetivo nos dice poco sobre el análisis del uso de los números en aritmética. Como hemos visto en apartados anteriores, es más útil pensar en el *proceso* que utilizamos para saber que tenemos siete manzanas, el proceso de *contar*, que en el producto final “siete manzanas”. Considerar la diferencia entre verbo y nombre nos será de ayuda. Pensemos en un *verbo* en el sentido de proceso, como “haciéndose” y en un *nombre* como una cosa, como “siendo”. La compresión del “haciéndose” de *contar* en el “siendo” de *número* es lo que nos da la potencia de la aritmética.

Podríamos pensar que el proceso de compresión tiene lugar en el estado intermedio de “contar silenciosamente”. Esto implica señalar cada objeto por orden y decir los números: “hay uno, dos,

51. Por ejemplo, un cuadrado es un rectángulo y también un paralelogramo que a su vez son cuadriláteros y polígonos. La categoría de mayor orden tal como “cuadrilátero” o “polígono” tarda en desarrollarse así como la clasificación de categorías subordinadas tales como tipos especiales de triángulos, cuadriláteros o polígonos. Sólo la categoría de los cuadriláteros se puede distinguir para un tratamiento especial. Es la categoría más simple de polígonos que tiene una rica colección de subcategorías, tales como cuadrados, rectángulos, rombos, paralelogramos, “cometas”, trapecios, cada uno de ellos con sus propiedades especiales que en principio se pueden entender como una gestalt completa organizada en jerarquías.

tres, cuatro" acentuando el último número para indicar que es el total. Podríamos decir, al adquirir práctica, las palabras en silencio, para nosotros mismos: "Hay [uno, dos, tres] cuatro" y entonces, podríamos hacerlo sin sonido, sino tomándonos un tiempo para contar rápidamente en nuestra cabeza: "hay... cuatro". Finalmente, entendemos el número como una gestalt total y decimos "hay cuatro". Mediante sucesivos actos de compresión, hemos pasado del proceso de contar al concepto de número lo que nos lleva a enfatizar el valor de la noción de procepto Este uso flexible del simbolismo, que hunde sus raíces en el uso flexible del lenguaje, es la clave para el desarrollo del cálculo y la manipulación de los símbolos. El uso flexible del lenguaje para representar tanto el proceso como el concepto, también se utiliza para establecer definiciones, tales como las definiciones en geometría. Sin embargo, las definiciones en aritmética y álgebra se utilizan más en relación con el cálculo y la manipulación simbólica que en el tipo de argumentos *corporeizado* que se dan en geometría. El lenguaje juega un papel ejecutivo en la aritmética donde los algoritmos llevan el peso de los cálculos.

El lenguaje retorna a su posición central en el mundo formal. Esta vez, sin embargo, se utiliza de una manera diferente, en un sentido técnico elevado. Una palabra tal como "conjunto" tiene un significado cotidiano como sinónimo de "colección" o "grupo", todo aquello que contiene "miembros" que forma parte de él. En las matemáticas formales, "conjunto" tiene un significado técnico, se designa por un símbolo tal como A y puede prestarse a una prueba para ver si un elemento "pertenece" o no a él. En la geometría euclidea, las pruebas verbales se aplican a configuraciones geométricas particulares que satisfacen las condiciones del teorema en particular. En el mundo formal, las demostraciones se aplican a cualquier ejemplo que satisfaga los axiomas, sea un sistema conocido o uno que se vaya a construir. Las matemáticas formales se aplican no sólo a un *corporeización* particular, sino a *cualquier corporeización* que satisfaga los axiomas. En realidad, la estructura formal que satisfaga los axiomas no necesita, en absoluto, tener un significado *corporeizado*.

En resumen, cada uno de los tres mundos identificados utiliza una forma muy diferente de compresión de la información. El mundo corporeizado utiliza el lenguaje de la misma forma que el lenguaje cotidiano, comprime la información catalogando categorías con un nombre que recoge un cierto número de propiedades[52]. El mundo proceptual, por otra parte, comprime esquemas-acción paso-a-paso convirtiéndolos en procedimientos rutinarios que se simbolizan y cristalizan en conceptos con los que razonar, utilizando símbolos para su representación. Estas entidades de razonamiento pueden constituirse en estructuras axiomáticas completas y los matemáticos pueden jugar con ellas para crear nuevos vínculos que elevarán su formalización.

2.7. OBSTÁCULOS.

En el campo de la educación matemática se consideran tanto los errores como los obstáculos. Desde una perspectiva tradicional, la noción de error adquiere significado como producto de la propia enseñanza. En cambio, bajo un enfoque constructivista y complejo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, los alumnos, principales protagonistas del proceso, han de participar en

52. El pensamiento geométrico explora las propiedades de un rombo y nos aporta nuevas cosas sobre él. Por ejemplo, podemos demostrar que cualquier rombo tiene diagonales que se cortan en ángulo recto, una propiedad no compartida, en general, por la categoría de los rectángulos o de los paralelogramos. Podemos también demostrar que si un cuadrilátero tiene diagonales que se cortan en ángulo recto entonces se trata de un rombo. Así, la noción de "rombo" se convierte en una unidad cognitiva de pensamiento, con propiedades internas.

la elaboración de decisiones sobre la reconstrucción de sus concepciones, percepciones, actitudes y sentimientos personales y los errores son simplemente pasos intermedios en su elaboración del conocimiento. Errores, que en este proceso de reconstrucción de sus ideas, pueden transformarse a veces en obstáculos. La diferencia entre ambas nociones, error y obstáculo, está más asociada a la perspectiva desde la que nos situemos y, por tanto, al modelo de intervención que desarrolle el profesor durante el proceso de enseñanza.

Las referencias que adopta Brousseau para introducir el concepto de *obstáculo* en matemáticas son la de Bachelard (1938) quien estudió los obstáculos en las ciencias físicas y la de Piaget (1975). Para Bachelard los obstáculos no podían presentarse en matemáticas:

> En realidad, la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidades. Conoce periodos de estar parada, pero no conoce periodos de errores. Ninguna de las tesis que mantenemos en este trabajo afecta al conocimiento matemático; sólo tratan del conocimiento del mundo objetivo.

Pero Brousseau emitió en 1976 la hipótesis de que los *obstáculos epistemológicos* se presentan también en matemáticas, justificándola mediante consideraciones ligadas a la teoría de situaciones didácticas y a la observación del efecto de los “saltos de información” que tienen lugar en el aprendizaje de los estudiantes.

El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar como creen las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus éxitos, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles sino que son reproducibles y persistentes; estos errores se constituyen en obstáculos. Suponemos una interacción constante del alumno con situaciones problemáticas, interacción dialéctica donde relaciona conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los completa o rechaza para establecer nuevas concepciones. Los obstáculos son conocimientos que han sido, en general, satisfactorios durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fijan en la mente de los alumnos como ideas útiles. Por ello, el obstáculo se resistirá a desaparecer, tenderá a estabilizarse, se adaptará localmente en la medida que ha sido útil. El obstáculo, como conocimiento, es fruto de la interacción del alumno con su medio y, precisamente, con una situación que le produce este conocimiento “interesante”. Como tal, un obstáculo tiene significado en un sistema didáctico en que coexisten un alumno, un conocimiento y un medio. Además, estos errores en un mismo sujeto, están relacionados entre ellos por una fuente común: una manera de conocer, una concepción característica, coherente pero no correcta, un “conocimiento” antiguo que ha conseguido un dominio de acciones en todo. Estos errores no son explícitos necesariamente y no desaparecen radicalmente, sino que son resistentes y resurgen; se manifiestan mucho tiempo después de que el sujeto haya rechazado el modelo defectuoso de su sistema cognitivo consciente[53].

53. Un ejemplo. Un estudiante utiliza el “teorema” siguiente: “Si el término general de una serie tiende a cero, la serie converge”. ¿Está distraído?, ¿enuncia incorrectamente el teorema invirtiendo la hipótesis y la conclusión?, ¿no ha comprendido la noción de límite o la de serie?, ¿se trata de un error sobre las condiciones necesarias y suficientes?, etc. Asimilando este error a otros, comprendemos que de manera inconsciente, este estudiante ha realizado un cierto razonamiento viciado por una representación incorrecta de los reales que se remonta a la enseñanza primaria y secundaria. El razonamiento es, aproximadamente, el siguiente: “Si x_i tiende a cero, existe un valor *n* a partir del cual las x_i son despreciables y a partir de dicho *n* no se suma prácticamente nada, en consecuencia la serie converge”.

Tanto en la historia de las ciencias como en el aprendizaje y la enseñanza, la noción de obstáculo aparece como fundamental al plantearse el problema del conocimiento científico. Es preciso referirse a Bachelard (1938) que fue el primero en avanzar esta idea:

> Debemos plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata sólo de considerar los obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos científicos, ni lamentar la debilidad de los sentidos y el espíritu humanos. Debemos saber que es en el acto mismo de adquirir el conocimiento cuando aparece como un resultado inevitable de necesidad funcional, la disminución de la velocidad de aprendizaje y la aparición de dificultades cognitivas. Aquí podemos encontrar las causas del estancamiento e incluso de la regresión, podemos percibir las razones de la inercia, a las que llamaremos *obstáculos epistemológicos*.

Retendremos dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico según Bachelard:

- La aparición de los obstáculos tiene un carácter inevitable. La palabra "necesidad", la más importante, subraya el hecho de que no tiene sentido intentar evitar los obstáculos; se debe tropezar con el obstáculo, tomar consciencia del mismo y a continuación superarlo para progresar en el desarrollo de su saber.
- La repetición de su aparición en la filogénesis y la ontogénesis de los conceptos. Esta idea no está explícita en Bachelard, pero si se puede leer que "la noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación".

Cornu (1983), por su parte, añade alguna característica más:

> Un obstáculo es un fragmento de conocimiento; es parte del conocimiento del estudiante. Este conocimiento ha sido generalmente satisfactorio en algún momento en la resolución de ciertos problemas. Es precisamente este aspecto satisfactorio el que ha anclado el concepto en la mente y lo ha convertido en un obstáculo. Conocimientos posteriores prueban su inadecuación cuando se enfrentan con nuevos problemas y esta inadecuación puede no ser obvia.

La noción de obstáculo epistemológico, tal como se entiende actualmente en las investigaciones en didáctica de las matemáticas es mucho más controvertida y ha dado lugar a diversas interpretaciones (Brousseau 1983, Duroux 1983, Glaeser 1984). Inicialmente el estudio de los obstáculos estuvo ligado a cuestiones de naturaleza ergonómica: ¿cómo podemos en el mínimo tiempo posible distinguir los obstáculos didácticos y/o epistemológicos relacionados con el contenido específico que queremos enseñar? El obstáculo está constituido como un conocimiento, con objetos, relaciones, métodos de aprehensión, previsiones, con evidencias, consecuencias olvidadas, ramificaciones imprevistas, etc. Resistirá el rechazo, intentará como debe ser, adaptarse localmente, modificarse lo imprescindible, optimizarse sobre un campo reducido, siguiendo un proceso de acomodación bien conocido. Por todo ello, es necesario un flujo suficiente de situaciones nuevas que lo desestabilicen, que lo hagan ineficaz, inútil, falso.

Los obstáculos pueden ser debidos a varias causas; es difícil culpar sólo a uno de los sistemas en interacción. Sin embargo, se puede intentar distinguir diversos orígenes teniendo en cuenta los subsistemas del triángulo profesor-alumno-conocimiento, de manera que modificándolos se pueda superar el obstáculo, cuando ninguna modificación de los otros sistemas permita evitarlo. Se encuentran así:

- *Obstáculos ontogénicos* son debidos a las características evolutivas del niño y, en particular, a la madurez en el desarrollo de capacidades. Él desarrolla, a cada edad, conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos. La epistemología genética pone de manifiesto estadios y medios de desarrollo, acomodaciones y asimilaciones que, a la vez, se parecen a las etapas del desarrollo de los conceptos. Se deben valorar los obstáculos que surgen en el desarrollo de capacidades como la generalización, clasificación, planificación o transferencia a otros contextos.
- *Obstáculos epistemológicos* están relacionados con los conceptos. Son aquellos de los que no se puede ni se debe escapar debido a su papel constitutivo en el conocimiento pretendido. Su causa es la naturaleza de los propios conceptos matemáticos. Se pueden encontrar en la historia de los propios conceptos, lo que no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que se deban reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde han sido vencidos. Los conceptos, aunque son imágenes mentales que subyacen bajo las palabras o símbolos con los que se expresan regularidades, suelen tener elementos comunes en todas las personas como producto del proceso de enseñanza y aprendizaje; pero, también pueden poseer matices individuales. Si el obstáculo es epistemológico, aparecerá en casi todos los estudiantes de manera normal y recurrente. Los obstáculos epistemológicos pueden presentar diferentes aspectos. En primer lugar, los obstáculos que manifiestan los alumnos al utilizar el lenguaje cotidiano como lenguaje matemático, la terminología y notación matemáticas. En segundo lugar, el obstáculo que surge al intentar crear estructuras conceptuales acordes con la estructura lógica que guía la construcción del conocimiento matemático. Y, en tercer lugar, los obstáculos que surgen al no poder relacionar un concepto con una estructura conceptual, que impide que el alumno generalice dicha noción. Esta última dificulta también se puede considerar como obstáculo ontogénico.
- O*bstáculos didácticos* son aquellos que parecen no depender más que de una elección o un proyecto del sistema educativo[54]. Es decir, de las elecciones didácticas que se hacen al establecer una situación de enseñanza. Dichas elecciones didácticas se sustentan en las concepciones epistemológicas, positivistas, relativistas o constructivistas del profesor, y las concepciones sobre cómo se aprende. Resultan de una transposición didáctica, reciente o antigua, y son siempre el producto de un aprendizaje.

Una característica del obstáculo es que, con frecuencia, no es percibido como tal más que por aquél que está en condiciones de poder relacionar las preconcepciones con un saber que las refuta. Los conocimientos se convierten en obstáculos respecto a un saber de referencia por lo que son fácilmente visibles por el profesor pero invisibles para el estudiante.

54. Por ejemplo, la presentación actual de los decimales en el nivel elemental es el resultado de una larga evolución en el marco de una elección didáctica hecha por los enciclopedistas después de la Convención (de acuerdo con una concepción que se remonta al mismo Stevin): teniendo en cuenta su utilidad, los decimales debían ser enseñados a todo el mundo lo más rápido posible; asociados a un sistema de medida y refiriéndose a las técnicas de operación con los enteros. Así, hoy, los decimales son, para los alumnos, “enteros naturales con un cambio de unidad”, es decir “naturales” (con una coma) y medidas. Y esta concepción, apoyada por una mecanización del alumno, va a ser un obstáculo hasta la universidad para una buena comprensión de los reales.

El proceso para superar un obstáculo comporta necesariamente una sucesión de interacciones entre el estudiante y el medio. Estas interacciones ponen en juego en el alumno sistemas de representaciones y pueden, a menudo, ser interpretadas como intercambios de mensajes, incluso en algo tan aparentemente "amorfo" como un problema, porque el alumno es capaz de anticipar sus acciones. Si admitimos que un conocimiento se sitúa como oponente a otro sobre el que se apoya y al que remplaza, se comprenderá que podamos decir que los procesos de superación tienen un carácter dialéctico. Organizar la superación de un obstáculo consistirá en crear una situación susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al alumno según una dialéctica conveniente en la que las informaciones que se quieren enseñar sean las únicas satisfactorias u óptimas entre todas aquellas que se opongan para obtener un resultado. Esto no bastará; será necesario que esta situación permita la construcción de una primera solución o de un intento en el que el alumno emplee su conocimiento hasta el momento. La superación de un obstáculo implica muy frecuentemente, a la vez, una reestructuración de los modelos de acción, del lenguaje y de los sistemas de pruebas.

Duroux (1983) precisó las condiciones que debería satisfacer un conocimiento para poder ser declarado como un obstáculo en el sentido de Bachelard. Para satisfacer la primera condición que dice que *un obstáculo es un conocimiento*, el investigador deberá hacer un esfuerzo para reformular la "dificultad" que estudia en términos, no de la falta de conocimiento, sino de conocimiento falso, incompleto, etc. El conocimiento obstáculo tiene un *dominio de validez y de eficacia* y, por lo tanto, también un dominio en el que es a priori pertinente pero donde se revela falso, ineficaz y fuente de errores a posteriori. Sería preciso también, siempre según la definición de Brousseau, como tercera condición, comprobar la *resistencia* de los conocimientos obstáculo y explicarla. La comprobación de esta resistencia es indispensable para establecer su carácter de obstáculo. El conocimiento obstáculo, operativo y bloqueador a la vez, resiste a las explicaciones y continúa movilizando al estudiante aunque tome conciencia del mismo; es por ello que el acceso a un conocimiento "superior" no garantiza jamás la superación de un obstáculo.

Cornu ha puesto en evidencia que, conforme a la hipótesis general de Brousseau, ciertas dificultades de los alumnos pueden concentrarse en torno a obstáculos atestiguados por la historia. Es en el análisis de las resistencias y en los debates de quienes les han vencido donde es preciso buscar los elementos que permiten identificar los obstáculos para los alumnos. La explicación de las resistencias es el núcleo de la investigación de los obstáculos epistemológicos y prácticamente no hay método porque cada explicación es específica del obstáculo en cuestión. Es necesario seguir paso a paso los intentos de rechazo, las remodelaciones y buscar las condiciones presentes para comprender los mecanismos. Esta investigación está siempre facilitada en el caso de un verdadero obstáculo por el hecho de que un obstáculo epistemológico está constituido por conocimiento acabado, en el sentido de que su rechazo debe finalmente ser irreversiblemente explícito y, en consecuencia, *deja trazas*, a veces profundas *en el sistema de conocimientos*, que es la cuarta condición; esto muestra que no es nunca el fruto único de un error pasajero que bastaría reparar.

Los obstáculos que encontró Cornu incluyen los problemas a los que se enfrentan los estudiantes cuando deben calcular límites utilizando técnicas más sutiles que simples operaciones numéricas y algebraicas. Él discute cómo el concepto de infinito se introduce y es "rodeado de misterio" y, a pesar de todo, las nuevas técnicas "funcionan" sin que los estudiantes comprendan porqué. Tall (1986a) sugiere una explicación para este fenómeno denominada *principio de extensión genérica*:

> Si un individuo trabaja en un contexto reducido en el que todos los ejemplos considerados tienen una cierta propiedad, entonces, en ausencia de contraejemplos, la mente asume las propiedades conocidas como implícitas en otros contextos. Por ejemplo, la mayoría de las sucesiones convergentes que se presentan a los estudiantes son de un tipo simple tales como 1/n, que tiende a un límite, en este caso a cero, pero cuyos términos nunca *igualan* al límite. En ausencia de contraejemplos, los estudiantes comienzan a creer que esto es siempre así. La rica experiencia del lenguaje coloquial apoya esta creencia con frases tales como "se acerca cada vez más a" que sugieren que los términos de una sucesión nunca pueden coincidir con el límite. Así, se va formando lentamente la creencia implícita de que una sucesión de términos convergente a un límite está cada vez más cerca, *pero nunca llega allí en realidad* ... Además si todos los términos de una sucesión tienen una cierta propiedad, es natural creer que el límite también la tiene. Así, la sucesión 0,9, 0.99, 0.999,... tiene todos sus términos menores que 1, de manera que el límite "cero coma periodo de nueve" debe también ser menor que uno... lo que conduce a la imagen mental de un objeto limitador denominado *límite genérico*.[55]

Por su parte, Astolfi (1997) ha sintetizado en los siguientes puntos las características que definirían un obstáculo epistemológico:

- La *interioridad*. Los obstáculos se encuentra en cada uno de nosotros, en el profesor y en el alumno, bajo la forma de concepciones o representaciones que recubren lo que acordamos sobre un sujeto.
- La *facilidad*. Los obstáculos dan seguridad; corresponden a una manera intuitiva, o ingenua, de considerar las cosas; es cognitivamente más fácil clasificar las ballenas entre los peces que entre los mamíferos. El obstáculo es una facilidad que el espíritu se otorga.
- La *positividad*. Los obstáculos no proceden, la mayoría de las veces, de un déficit de conocimientos sino más bien de la preexistencia de conocimientos personalmente construidos y de hechos sólidamente anclados. Es más bien un exceso de conocimientos en el estudiante lo que hay que conjeturar.
- La *ambigüedad*. Los obstáculos forman parte integrante de nuestra estructura mental y su presencia -su imposición- impide la apropiación de algo nuevo. Trabajar a partir de esta presencia y efectuar la hipótesis de una posible superación, a lo largo de una situación de aprendizaje, permitirá un nuevo aprendizaje.
- La *recursividad*. Una de las particularidades de los obstáculos es su fuerte relación con un retorno metacognitivo sobre el aprendizaje. No se tiene consciencia de un obstáculo más que después de haberlo superado, y es en ese momento cuando puede ser identificado. Antes de esta mirada retrospectiva no existe tal obstáculo.

Artigue (1990), por su parte, mantiene que a pesar de que un análisis histórico ayude a identificar "aquellos núcleos de resistencia" en el aprendizaje no puede por sí solo ser una prueba de un determinado obstáculo en los alumnos. Incluso aunque se constante el origen histórico de un

---

55. Históricamente, esto se engloba en el *principio de continuidad* de Leibniz: "En cualquier supuesta transición, que finalice en cualquier término, podemos establecer un razonamiento general en el que el término final pueda estar también incluido".

obstáculo podemos percibir muchas veces que se ve reforzado por un obstáculo de otro origen, generalmente didáctico. Artigue llega a la conclusión de que lo que caracteriza a un especialista en matemáticas no es exactamente su capacidad para superar los obstáculos, sino más bien “la posibilidad de funcionar en diferentes registros y, en algunos de tales registros, llegar a controlar el obstáculo”.

Por otra parte, hemos de recordar que la tesis esencial de Vinner sobre el proceso psicológico del desarrollo de los conceptos es que un estudiante medio de enseñanza secundaria no considera la definición matemática como el criterio último para juzgar si cualquier cosa es o no un ejemplo específico de una noción dada, sino más bien como un “andamiaje” que sirve para construir una estructura mental y que inmediatamente se rechaza como inútil. A continuación, los ejemplos de la noción son reconocidos o construidos intuitivamente y no analíticamente por los alumnos. Schwartzenberger, Tall y Vinner se interesan especialmente por aquellos elementos del esquema conceptual que están en contradicción bien con otros elementos de este esquema conceptual bien con la definición formal. Tall y Vinner (1981) consideran los elementos del primer género como menos peligrosos para el desarrollo de los conocimientos del estudiante porque hay una cierta probabilidad de que aparezcan simultáneamente factores contradictorios. Esto provoca un conflicto cognitivo real y la necesidad de acomodación de la estructura para restablecer el equilibrio. Por el contrario, los factores del esquema conceptual que no están en conflicto mas que con la definición formal presentan el riesgo de no provocar nunca un conflicto cognitivo e impedir seriamente el aprendizaje de la teoría formal. Los estudiantes con tales factores en su esquema conceptual pueden sentirse cómodos con sus interpretaciones de las nociones y considerar la teoría formal como no operatoria e incluso inútil. En nuestro enfoque, es entre estos últimos factores en conflicto entre los que buscaremos los obstáculos epistemológicos.

Capítulo 3

INVESTIGACIONES SOBRE EL CONCEPTO DE INFINITO

Los problemas conceptuales en el manejo de conjuntos infinitos y procesos de límites infinitos, con el problema subyacente de la conceptualización del sistema de números reales, marcará la transición más importante entre las matemáticas elementales y avanzadas.

D. Tall

En el presente capítulo revisaremos aquellos trabajos de investigación, textos, tesis y artículos, que se han centrado en alguno de los aspectos cognitivos de este concepto, tanto desde un enfoque experimental como teórico. En el *Apéndice I* se presenta un cronograma de las publicaciones referidas a este tema con el fin de apreciar la evolución que han sufrido en los últimos años. Como fácilmente se puede observar el número de publicaciones ha ido creciendo notablemente teniendo su máxima consideración, en el ámbito de la investigación, en noviembre de 2001 cuando la publicación periódica *Educational Studies in Mathematics* dedica un número especial a la noción de infinito en el que a través de nueve artículos se repasan algunos tópicos relacionados con dicho tema. Antes de esta fecha, D'Amore (1997) recoge una amplía bibliografía, con cerca de trescientos títulos referidos al concepto de infinito, si bien algunos de ellos quedan dentro del ámbito más general del Análisis Matemático y sus aplicaciones. Por otra parte, en el *Apéndice II* se pueden examinar los ítems correspondientes, o bien sus traducciones, a los cuestionarios de aquellos trabajos que los incluyen en su publicación. Así mismo, si ello es posible, se recogerán las características metodológicas principales del trabajo de campo y de las tablas con los resultados aportados por los autores.

Gardiner (1985) enumera algunos de los primeros encuentros que un individuo tiene con los procesos infinitos en matemáticas y su influencia en la intuición de los mismos:

- El proceso de contar: uno, dos, tres, cuatro, cinco,... Lo que el niño "canta" no es un proceso potencialmente infinito ya que no hay una manera automática de generar nuevas palabras para números más grandes como cientos, miles, etc.

- Los niños vislumbran el infinito cuando recitan los números mediante nuestro sistema de numeración: 1, 2, 3, 4, . . . , 9, 10, 11, . . . , 19, 20, 21, . . . , 99, 100, 101, . . . Su construcción pone de manifiesto la ausencia de fin de esta secuencia y no es fácil apreciar el impacto que esta simple disposición tiene en nuestra intuición.
- La experiencia lineal del tiempo -hacerse viejo- y la repetición cíclica -días, semanas, meses, estaciones, años- contribuye a nuestra intuición de ausencia de fin y de comienzo.
- Números finitos cada vez más grandes. Tamaños de estrellas y distancias a las mismas, número de operaciones por segundo de los ordenadores más modernos, población y otras estadísticas, récord deportivos, etc.
- Iteración y recurrencia. Cuadrados o raíces repetidas, números de Fibonacci, etc.
- La recta numérica con los naturales, los enteros, las fracciones, etc. La imagen visual de las fracciones sobre la recta numérica supone la idea de un proceso infinito que aparentemente rellena un intervalo finito de manera densa.
- La paradoja de un proceso infinito acotado está implícita en la idea de los récords de tiempos, de lanzamiento o saltos en atletismo; los récords parecen romperse repetidamente a pesar del hecho de que debe haber límites a las hazañas humanas.
- Escribiendo “decimales sin fin” que generalmente surgen de forma natural como aplicación del proceso de división, identificando números periódicos como racionales e imaginando una aritmética con decimales indefinidos.
- La división por cero que ha sido proscrita; la idea horroriza tan pronto como se comienzan a representar funciones con asíntotas verticales.
- Medida de longitudes, áreas y volúmenes que siempre suponen una acotación inferior y otra superior y un proceso de aproximación.

Monaghan (2001), por su parte, advierte sobre posibles errores a la hora de efectuar una investigación sobre el infinito. Para Monaghan hay, al menos, dos problemas inmediatos al hablar con niños con el fin de descubrir si poseen el concepto de infinito y, si es así, dilucidar qué es ese concepto[1]. El primero es que el mundo real es aparentemente finito y no hay referentes reales para discutir sobre el infinito. Al hablar con niños el investigador proporcionará, probablemente, un contexto que no tendrá, en general, sentido para el sujeto. Es una cuestión sutil el apreciar si son los estudiantes los que indican que no tiene sentido o bien si es el investigador el que lo observa. Para Monaghan, decir “yo no lo entiendo” requiere una cierta confianza, por lo que el peligro real se da cuando el sujeto no lo entiende pero da una respuesta aparentemente con significado, o bien cuando entiende algo diferente de lo deseado por el investigador y este no observa los diferentes significados del sujeto. Tales problemas, por supuesto, no son únicos al investigar sobre las ideas del infinito en personas jóvenes, pero las investigaciones en esta área son particularmente propensas a este problema. El segundo problema está relacionado con el primero pero implica además el lenguaje utilizado cuando se habla con los estudiantes. Consideremos la pregunta

1. ¿Qué significado tiene el decir que alguien ha comprendido o posee el concepto de infinito? En el nivel más bajo de comprensión podría indicar el conocimiento de procesos sin fin tales como la subdivisión continua de una línea, sucesiones sin fin tales como los números naturales o la posibilidad de continuar indefinidamente cualquier operación. Una comprensión del infinito también podría darse mediante el conocimiento de colecciones ilimitadas.

¿puedes sumar 0.1 + 0.01 + 0.001 + ··· y así sucesivamente y dar una respuesta? Fuera del mundo de las matemáticas puras, la respuesta es "no" ya que no se puede estar sumando indefinidamente[2].

Gardiner (*Ibíd.*) relaciona una serie de errores asociados habitualmente al uso del concepto de infinito, como son "infinito es el número más grande", "un decimal infinito es como un decimal finito muy largo", "$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ es en realidad una suma finita muy larga cuyo resultado es un poco menor que 2", "El número positivo más pequeño es $0,\widehat{0}1$ (con ceros en toda la parte decimal excepto el último que es uno)", "El círculo es un polígono regular con un número de lados infinito", "La pendiente de la tangente en A es la pendiente de la cuerda AB cuando $B = A$", etc. Para Gardiner, ningún profesor sensato debería proscribir tales ideas ya que, en realidad, son sencillamente la materia prima sobre la que debemos construir. No obstante, tampoco se debería hacer creer, en absoluto, al estudiante que tales ideas tienen algo que hacer en matemáticas. Su dominio resulta de nuestro propio error al distinguir entre la *psicología* de los procesos infinitos y las *matemáticas* de los procesos infinitos. No es necesaria una introducción estricta a las matemáticas de los procesos infinitos en el nivel escolar, pero los estudiantes deben ser alertados sobre la diferencia entre *historias mágicas* como las del listado anterior y *matemáticas utilizables*. El peor de todos estos errores parece proceder de la idea de que "hay un número más grande, denominado infinito", pero esta idea expresada de esta manera no explica realmente errores más serios como los relativos a la suma infinita, la convergencia de los polígonos regulares a un círculo o de las secantes a la tangente.

3.1. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS.

Se puede considerar que el artículo "The Intuition of Infinity", de E. Fischbein, D. Tirosh y P. Hess, aparecido en *Educational Studies in Mathematics*, en 1979, abre el camino de las futuras investigaciones sobre el análisis de los aspectos cognitivos de esta noción. Su cita será prácticamente ineludible en la mayor parte de ellas[3]. A lo largo de este periodo de tiempo han quedado establecidas algunas líneas de trabajo en torno a ciertos grupos de investigación. La definición de los supuestos teóricos y de los objetivos de cada una de estas líneas así como la consolidación de sus conclusiones aún no son muy precisas dada la brevedad de su existencia y, por lo tanto, del aún reducido número de resultados empíricos, tanto cualitativos como cuantitativos. No obstante, podemos considerar las siguientes: intuición del infinito, contextos e incoherencias en el esquema conceptual, cardinalidad y equivalencia, lenguaje e infinito, corporeización y metáforas del infinito y teoría APOE aplicada al concepto de infinito.

Ni que decir tiene que todos estos casos no son sino la aplicación de la teoría general correspondiente, presentada en el capítulo 2, al concepto particular de infinito. Es preciso indicar también que estas líneas comparten entre sí algunos de sus principios básicos aunque no siempre la terminología, interpretación y aplicación de los mismos y, por supuesto, la finalidad de sus

---

2. Según Monaghan, Núñez (1994) parece caer en esta trampa. Su enunciado puede ser una forma de la paradoja de Zenón para aquellos con un cierto entrenamiento matemático pero la paradoja sólo existe cuando el problema es visto desde dos puntos de vista. No es una paradoja para alguien que no es capaz de captar las complicaciones matemáticas.

3. Ruma Falk cita en (Falk et al., 1986), junto con el trabajo de Fischbein, otro también pionero llevado a cabo por R. Gelman y D. Evans: *Understanding infinity: A beginning inquiry*. No obstante esta investigación corresponde a un manuscrito no publicado de la Universidad de Pennsylvania en 1982. También Tall y Tirosh (2001) citan como trabajo previo el de Taback (1975): The child's concept of limit, en M. Rosskopf (Ed.), *Children's mathematical concepts* (pp. 111-144), New York: Teachers College Press investigaciones que oscila desde la pura descripción del conocimiento de este concepto a indicaciones prescriptivas para su aprendizaje. Así mismo, conviene tener presente la proliferación en los últimos años de publicaciones más o menos independientes que no se alinean claramente con la filosofía de ninguno de estos grupos pero que aportan resultados interesantes que es preciso ir incorporando a un marco general.

3.2. INTUICIÓN DEL INFINITO.

3.2.1 PREÁMBULO PIAGETIANO: DIVISIBILIDAD INDEFINIDA

Autores como Fischbein y Tall reconocen como un precedente de las actuales investigaciones sobre el infinito el trabajo de Piaget e Inhelder (1948) donde se analizan los conceptos de *divisibilidad indefinida* y *continuidad* tanto de un objeto físico como matemático así como la naturaleza del "último elemento" obtenido en un proceso de divisiones sucesivas. La investigación gira en torno a cuatro cuestiones que se plantean a los sujetos. En la primera de ellas se pide que junto a la figura de un cuadrado dado en una página de papel se dibuje el cuadrado más pequeño posible y el más grande. La segunda cuestión plantea la posibilidad de la partición ilimitada de una figura dada tal como un segmento, un cuadrado, un círculo, etc. En tercer lugar se explora la forma del elemento residual de la partición; es decir, se trata de saber si el último término es un punto y qué estructura o ausencia de la misma posee. Por último, la cuarta pregunta trata sobre la recomposición del todo a partir de sus elementos, es decir, ¿se puede concebir una línea o una superficie como constituida por un conjunto de puntos? Tras el análisis de las respuestas, los cuatro estadios de Piaget se reducen a tres ya que el I y el II no difieren prácticamente dada la lenta evolución observada, incluso hasta el nivel del pensamiento formal. Resumiremos en la siguiente tabla los aspectos más reseñables de este estudio:

	Estadios I - II	Estadio III	Estadio IV
Cuestión 1	• Incapacidad de obtener el más pequeño y el más grande. • Ausencia de un esquema operatorio de seriación	• Se resuelve gracias al esquema anticipador del agrupamiento de la operación de partición	• Las operaciones de seriación ya no plantean problemas
Cuestión 2	• Número muy limitado de divisiones.	• Aunque se admite un número mucho mayor de divisiones, aún no son ilimitadas	• La partición ya se concibe como ilimitada
Cuestión 3	• Últimos elementos de magnitudes perceptibles • Naturaleza isomorfa entre los primeros y los últimos elementos	• Aún no se generaliza más allá de lo finito, es decir de lo visible y manipulable • Los últimos elementos dependen del modo de seccionarlos y aún no son en absoluto puntos en número infinito sin superficie	• La estructura de los últimos elementos es independiente del todo y del modo de división • Los puntos o átomos no tienen ni forma ni superficie; son homogéneos bien pertenezcan a una línea o a una superficie
Cuestión 4	• Ausencia de reversibilidad entre división y composición	• Se reconoce la reciprocidad entre división y composición pero sólo a un nivel intuitivo del continuo • Reconocimiento de una contradicción entre el carácter discontinuo de la unión de puntos y la continuidad del todo obtenido de esta manera.	• La composición constituye la inversa de la descomposición ilimitada • No se observa contradicción entre el carácter discontinuo de los elementos y la continuidad del todo • Algunos sujetos llegan a la idea de correspondencia biunívoca entre los puntos de una línea y los números.

Según sus autores, sólo en el periodo de las operaciones formales podrían los sujetos comprender el proceso de la división indefinida de un segmento:

Hasta que no alcanza esta etapa, el niño no puede imaginar los últimos elementos de continuidad. Es decir, como puntos puramente hipotéticos que nunca se pueden ver ni tocar pero que pueden ser mentalmente separados y combinados con los límites del infinito.

Monaghan (2001) mantiene que aunque el trabajo de Piaget fue importante en su día y marcó el desarrollo de temas relacionados con las nociones de límite en los estudiantes, no es particularmente iluminador en lo que respecta a la comprensión del infinito por parte de los mismos. Un problema para los piagetianos, al estudiar las ideas sobre el infinito en los estudiantes, es su deseo de interpretar los conceptos en los niños como jerárquicos y con etapas internamente consistentes cuando, en realidad, muchos de los conceptos de infinito alcanzados por los sujetos son internamente contradictorios. La ruptura para superar la influencia del paradigma piagetiano llegó cuando Fischbein y sus colegas, mientras trabajaban bajo un esquema post-piagetiano, se encontraron con la naturaleza contradictoria de los conceptos de límite e infinito en los estudiantes como resultado fundamental de su análisis. El examen de la intuición, como ya se ha visto en el capítulo 2, jugó un importante papel en el trabajo de Fischbein si bien como muchas otras construcciones sicológicas su definición no resulta fácil.

Tirosh (1996) mantiene que las preguntas sobre divisiones sucesivas tienen algunas características comunes: en cada una de ellas se describe un proceso de división sucesiva y se pide al estudiante que determine si el proceso tendrá fin. Las respuestas dependen de la naturaleza del objeto; cuando éste es matemático se considera que el proceso es infinito y cuando se trata de un objeto físico el proceso es finito[4]. La autora plantea a 282 estudiantes de edades comprendidas entre 12 y 18 años diversas cuestiones, ver *Apéndice II*, relacionadas con la división sucesiva de objetos físicos y matemáticos. El propósito de este trabajo es el de explorar la generalidad y el poder predictivo y explicatorio de las dos reglas intuitivas *todo llega a su fin* y *todo puede dividirse*. La mitad de los estudiantes de cada nivel recibieron en primer lugar los problemas relacionados con objetos matemáticos en una hoja de papel mientras que los problemas relacionados con objetos físicos fueron proporcionados en una hoja diferente. La otra mitad de los participantes recibió los problemas en orden inverso. Se recogieron dos tipos de respuestas dadas por los estudiantes de todos los niveles a todas las cuestiones: el proceso es finito y el proceso es infinito. Los porcentajes de respuestas finitas tanto a los objetos matemáticos como a los objetos materiales decrecen con la edad mientras que los porcentajes de respuestas infinitas crecen. La mayoría de los estudiantes más jóvenes proporcionan respuestas finitas a todas las tareas. Muchos de ellos explican su juicio de acuerdo con la regla intuitiva *todo llega a su fin*. Los estudiantes de mayor edad, que son conscientes de que los procesos de subdivisión pueden continuar indefinidamente, tienden a proporcionar respuestas infinitas tanto a las tareas relacionadas con objetos matemáticos como con objetos físicos en la línea de la otra regla intuitiva, *todo puede dividirse*[5]. En esta línea se hallan también los resultados obtenidos por Turégano (1996) que utiliza la terminología finitistas e infinitistas respectivamente; esta autora destaca que para muchos de los sujetos un segmento se forma punto a punto, colocando uno detrás de otro, de forma que entre ellos no puede haber nada; la idea de "punto siguiente" está presente en todos ellos.

---

4. Es conveniente tener presente ciertas críticas, procedentes principalmente del paradigma semiótico, al lenguaje utilizado a la hora de plantear cuestiones sobre la divisibilidad indefinida como se recoge por ejemplo en (Fernández y Solano, 2005), si bien estas críticas se efectúan desde la perspectiva de las ciencias experimentales.

5. En Tirosh y Stavy (1993 y 1996) se analizan con más detalle estas dos reglas intuitivas.

3.2.2. CARÁCTER CONTRADICTORIO DEL INFINITO. FINISTAS E INFINITISTAS.

El citado artículo de Fischbein (1979) es un intento de extender el trabajo de Piaget utilizando sujetos mayores, de 10 a 15 años, de distintos niveles y rendimiento. La crítica de Fischbein a los resultados de Piaget e Inhelder se basa en dos aspectos. En primer lugar la ausencia de frecuencias de los diferentes tipos de respuestas y, en segundo lugar, considera que se hace uso de un tipo de infinito no específico; Piaget e Inhelder se refieren al concepto de continuo, pero *operacionalmente* no distinguen entre la potencia de un conjunto numerable de elementos y la potencia del continuo.

Tall y Tirosh (2001) hacen referencia a un cuestionario aplicado por Fischbein (1978) a alumnos de 13 a 15 años en el que se incluía el siguiente problema[6]:

(i) Sea un segmento AB = 1 m. Añadimos al segmento AB un segmento BC = 1/2 m. Continuamos de la misma manera añadiendo segmentos de 1/4 m, 1/8 m, etc. ¿Tendrá fin este proceso de añadir segmentos?

(ii) Considérese la cuestión (i). ¿Cuál será la suma de los segmentos AB + BC + CD + ⋯ etc.?

Fischbein encontró que el 84 % de los estudiantes encuestados pensaba que el proceso (i) no acabaría nunca mientras que el 14 % pensaba lo contrario. En (ii) sólo el 6 % pensaba que la suma de los segmentos sería 2, el 17 % pensaba que sería menor que 2 y el 51 % pensaba que sería infinita. Este conflicto de “nunca acaba” propio del infinito potencial del proceso demuestra ser un serio obstáculo cognitivo para la comprensión del concepto de límite por parte de los estudiantes. En dicho artículo Fischbein identifica conflictos paradójicos similares para la intuición del cardinal infinito y mantiene que nuestros esquemas intelectuales se construyen genuinamente sobre nuestras experiencias prácticas de la vida real y, por lo tanto, proposiciones como *el todo puede ser equivalente a sus partes* contradicen nuestros esquemas mentales habituales. Así mismo, nuestra interpretación intuitiva del infinito es la de una pura potencialidad y, naturalmente, esta interpretación conduce a la conclusión de que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos, infinito. En consecuencia, Fischbein anticipa que las respuestas de los estudiantes a varias cuestiones relacionadas con la comparación de cantidades infinitas se podrían clasificar en dos categorías: respuestas *infinitistas* como, por ejemplo, “todos los conjuntos infinitos son equivalentes” y respuestas *finitistas* tales como “un subconjunto propio de un conjunto dado no es equivalente al conjunto”. Estas hipótesis han sido confirmadas en diversos estudios posteriores.

Ficha técnica (Fischbein et al., 1979)

- *Muestra:* 470 sujetos
  104 de 10 a 12 años y 366 de 12 a 15 años
- *Cuestionario:* 10 ítems de respuesta múltiple
- *Duración:* una clase
- *Otras características metodológicas:* no constan

El principal objetivo del referido artículo de Fischbein et al. (1979) es investigar la *naturaleza contradictoria* del infinito en el seno de los procesos de pensamiento y determinar su impacto a través de diversos contextos en los que interviene el infinito (ver *Apéndice II*); los autores pretenden determinar la dependencia de este impacto de variables tales como la edad, el conocimiento matemático y los resultados escolares. Este trabajo se enmarca en lo que denominamos la intuición del infinito, donde el término intuición se entiende, en el sentido dado en el capítulo anterior,

6. Una versión del mismo se incluye en nuestro cuestionario y corresponde al ítem 6PRIC1P08.

como una forma de conocimiento directo, global y autoevidente. También se pretende observar la resistencia de la intuición del infinito a través de la edad y la influencia de la enseñanza en el desarrollo de dicho concepto. Resumiremos a continuación las conclusiones más significativas de esta investigación que supone una referencia fundamental del presente trabajo:

- Se sugiere que los sujetos del experimento no poseen el *concepto* de infinito y, en particular, el de divisibilidad infinita: parece que la aceptan o la rechazan con un cierto carácter aleatorio. Sin embargo, este hecho se contradice con las respuestas de los sujetos a otras preguntas del cuestionario; por lo tanto es preciso admitir que, al menos desde los once años, los estudiantes tienen una *idea intuitiva* del concepto de infinito contradictoria en sí misma, lo que la hace muy sensible al contexto conceptual y figurativo del problema. Estos hallazgos pueden explicarse por el hecho de que tendemos a pensar sobre conjuntos infinitos recurriendo a nuestros esquemas lógicos habituales que naturalmente están adaptados a realidades finitas. La contradicción se refleja en los resultados en la separación de los sujetos en dos categorías fundamentales: *finitistas* si en sus respuestas aluden a propiedades o leyes correspondientes a nuestro mundo finito, es decir entienden las matemáticas como una proyección fiel de la experiencia sensible, e *infinitistas* si consideran posibles extensiones o modificaciones de dichas propiedades o leyes a situaciones que implican procesos o conjuntos infinitos. Las interpretaciones finitistas tienden a prevalecer. Los efectos de la edad y la enseñanza sólo pueden explicarse debido en parte a esta dicotomía. Para superar esta genuina contradicción, la inteligencia recurre al *infinito potencial*.
- A partir de los doce o trece años, el porcentaje de las principales categorías de respuestas, especialmente finitistas e infinitistas, se mantiene estable con la edad con una ligera tendencia al dominio de las segundas en los niveles superiores. Se puede suponer que hasta los doce años, que corresponde grosso modo con el inicio del estadio de operaciones formales, las interpretaciones intuitivas relacionadas con el concepto de infinito se hallan aún en proceso de formación. Podríamos suponer que el desarrollo de las interpretaciones intuitivas se encuentra conectado con el desarrollo intelectual general, pero lo que define su peculiaridad es su estabilidad, su resistencia al paso de la edad y a la influencia de la enseñanza.
- Los datos indican que las reacciones de los sujetos están, en realidad, influenciadas por su conocimiento matemático, pero esta influencia no puede explicar por sí sola la estabilidad del tanto por ciento de infinitistas a partir de los trece años en la mayoría de las cuestiones; es preciso tener en cuenta un factor adicional como es la contradicción entre el carácter finitista de nuestros esquemas intelectuales y el concepto de infinito propiamente.
- Muchos aspectos del desarrollo de las intuiciones pueden explicarse bajo un enfoque piagetiano; así, por ejemplo, podemos suponer que la estabilidad de la frecuencia de respuestas a partir de los doce años se debe a la estrecha relación entre la intuición del infinito y las características generales del periodo de operaciones formales. Ahora bien, la característica principal de una intuición es su aceptación espontánea, lo cual es incompatible en la teoría piagetiana con un esquema operacional que, por definición, tiene una estructura analítica. Pero, ¿en qué se diferencia la *intuición* del infinito del *concepto* de infinito? La intuición del infinito viene afectada por los esquemas básicos de la inteligencia en cada

estadio del desarrollo intelectual, significa lo que *realmente sentimos* como verdadero o autoevidente en relación con la magnitud, o potencia, de conjuntos infinitos y no lo que aceptamos como verdadero como consecuencia de una análisis lógico y explícito. Esto significa que el concepto de infinito puede desarrollarse mediante procesos de enseñanza mientras que las intuiciones del infinito pueden permanecer inalteradas desde los doce años.

- Aunque se supuso en principio que las intuiciones se mantendrían invariantes bajo la influencia de la enseñanza, los resultados presentan una imagen mucho más compleja. En algunos casos se ha detectado un efecto positivo de la enseñanza, mientras que en otros el efecto es nulo o negativo. Puede suponerse que las únicas categorías de respuestas que revelan un efecto positivo del proceso de enseñanza son aquellas que estaban directamente basadas en nociones que se habían desarrollado durante las actividades de clase. Por lo tanto, la instrucción matemática presenta dos efectos divergentes, y aparentemente contradictorios. El entrenamiento matemático usual, que afecta exclusivamente a la comprensión superficial y formal del concepto de infinito, permite superar esta dificultad sólo en lo relativo a conceptos que forman parte del proceso de enseñanza. A la intuición del infinito no le afecta, básicamente, este entrenamiento; las intuiciones se mantienen inalteradas. Por otra parte, la educación matemática, en general, refuerza el pensamiento lógico, es decir, los esquemas finitistas de nuestra manera natural de pensar. *Para aquellas preguntas no estándar relacionadas con conjuntos infinitos o para cuestiones sobre las cuales el alumno no ha recibido una información específica, debemos esperar un alto porcentaje de reacciones "finitistas" a pesar, incluso, de su más avanzado entrenamiento matemático y, a veces, como un efecto indirecto de ese entrenamiento matemático*. Así, cuando se genera una situación conflictiva, las interpretaciones finitistas tienden a prevalecer incluso en alumnos bien preparados.

Tall (1992) cita un trabajo de Sierpinska (1987) en el que esta autora analiza los esquemas conceptuales de treinta y un estudiantes de 16 años y establece la siguiente clasificación:

- *Infinitistas inconscientes*. Dicen "infinito" pero piensan en "muy grande". Para ellos el límite de la sucesión debería ser el último valor de los términos.
- *Infinitistas conscientes*. El infinito es algo metafísico, difícil de captar con definiciones precisas. Si las matemáticas son una ciencia exacta debería evitarse hablar sobre el infinito y hablar sólo de números finitos.
- *Infinitistas cinéticos*. Para ellos la idea de infinito está vinculada a la idea de tiempo. Dentro de estos podemos distinguir:
  - *Potencialistas*: para pensar en el todo, de un conjunto o una sucesión, se debe recorrer con el pensamiento cada elemento, con lo que la construcción de un conjunto o sucesión infinitos nunca se puede completar.
  - *Actualistas potenciales*: es posible realizar un "salto al infinito" en el pensamiento; el infinito puede en última instancia ser actualizado de manera potencial, teóricamente.

Falk et al. (1986) mantienen que concebimos el infinito de los números aunque no podamos percibirlo. En este trabajo los autores se centran en el infinito potencial en el área numérica. Prefieren no hacer uso de la divisibilidad infinita de segmentos ya que, consideran, un niño puede llegar a afirmar que la partición terminará eventualmente debido a “que no hay más espacio” y relacionar dicha tarea con restricciones físicas en las que estos autores no están interesados. Más aún prefieren evitar las imágenes geométricas con el fin de evitar la referencia a conceptos idealizados tales como el de punto. Falk intenta crear una situación en la que se pueda manifestar la comprensión del infinito en el niño sin necesidad de recurrir a preguntas directas sobre el “número más grande o más pequeño”. Considera que comprender la idea de que los enteros no están acotados no sólo debería expresarse recitando la expresión “no existe el mayor número”, sino también mediante la habilidad para nombrar un número más grande que cualquiera que podamos sugerir. El propósito de este trabajo es averiguar si los niños comprenden este principio utilizándolo en un juego y observar su capacidad para verbalizarlo. El juego en cuestión, entre parejas de niños, consistía en lo siguiente:

Ficha técnica (Falk et al., 1986)

- *Muestra:* 95 sujetos (de 5 a 12 años)
- *Cuestionario:* 3 ítems (juegos verbales)
- *Duración:* no se indica
- *Otras características metodológicas:* no constan

Cada uno de vosotros dice un número. Aquél cuyo número sea mayor será el ganador. ¿Te gustaría ser el primero o el segundo?

Tras la respuesta y antes de jugar, el niño debía explicar su elección. Después jugaban diciendo números alternativamente cinco o seis veces. En ese momento se le preguntaba al niño *cuánto duraría el juego y si tendría fin*. Una variación del juego consistía en que el ganador sería aquel que dijese el número más pequeño, en unos casos sólo con enteros positivos y en otros admitiendo también los negativos, dependiendo de las habilidades de los niños en el uso de estos números[7]. A los alumnos se les asignaron tres puntuaciones correspondientes a tres aspectos implicados en cada juego: rendimiento en el juego, habilidad para verbalizar la estrategia ganadora y comprensión de la no acotación de los números y/o la idea de que el juego puede continuar indefinidamente. Un primer análisis mostró que los niños de educación infantil, de 5 a 6 años, y algunos de edades entre 6 y 9 años, tenían dificultades para la parte del juego “hacia arriba”. La mayor parte de los de 6 a 7 años no comprendían el carácter indefinido de los enteros. Sin embargo, los resultados sugieren que una vez aprendidos los números negativos percibían fácilmente su simetría con los números positivos hasta el infinito. Comprender la aparición de los infinitesimales supone dificultades adicionales, mientras que, por otra parte, es de destacar la importancia que algunos niños atribuyen al hecho de saber el nombre de los números, como si el concepto existiese debido a su nombre. También son relevantes los siguientes hechos recogidos por los autores tras el análisis de las respuestas:

- Los intentos de los niños de enfrentarse con el conflicto entre la finitud de su entorno y la consciencia de una cierta posibilidad del infinito dio lugar a respuestas contradictorias, comentarios entrecortados e inconsistencias. El *estado intermedio* entre el domino del esquema de los números finitos y el descubrimiento del infinito es de especial interés[8]. Es

7. Esta cuestión se incluye en nuestro cuestionario como ítems 6PRIC1P01 y 6PRIC2P01.

8. En este sentido, en el tramo de edad 14-16, Turégano (1996) observa tras una serie de entrevistas que hay un tipo de sujetos, con inconsistencias en sus razonamientos, que se encuentran en una etapa de *transición* entre finitistas e infinitistas. Por ejemplo, afirman que un segmento no se agota por bisecciones o trisecciones y, sin embargo, afirman que el proceso termina antes en el caso de las trisecciones. Aparecen sus ideas “duales” de los objetos matemáticos, ideas que se entremezclan continuamente con sus representaciones y que se activan siempre que hay que realizar comparaciones entre dos conjuntos infinitos acotados pero no así cuando hay que decidir la infinitud de un conjunto.

preciso admitir un salto discontinuo entre estos dos conceptos, ya que *la unión entre un número muy grande y el infinito no se da en ninguna parte*.

- Aunque el contexto espacial se desechó como un medio formal de interrogar en esta investigación, algunos sujetos recurrieron a imágenes geométricas en el curso de las entrevistas. Aparentemente, imágenes geométricas tales como "punto" y "espacio" interfieren en la concepción de lo infinitesimal que debería estar libre de todas las restricciones físicas.
- Paradójicamente, comprender el infinito puede analizarse en términos de *conservación* como ocurre con otros conceptos piagetianos. Uno debe observar que el infinito es invariante bajo la suma/resta de un número finito, e incluso infinito. Este es el núcleo del problema y la característica más contraintuitiva de un conjunto infinito. Algunos sujetos fueron conscientes de la "conservación del infinito" cuando plantearon ciertas objeciones a la sugerencia de sumar cualquier número a "infinito" para intentar obtener un número mayor.

Según los autores de este trabajo, se puede decir que a partir de los 8 años, la mayoría de los niños son capaces de expresar la idea de que es mejor ser segundo en el juego ya que de esta manera siempre se puede sugerir un número más grande que el de tu contrincante. La mayor parte de estos niños están convencidos de que el proceso de nombrar números cada vez más grandes no tiene fin, ya que cualquier número, no importa cuál, puede ser superado. El mecanismo cognitivo que conduce a esta comprensión se puede describir brevemente como *razonamiento por recurrencia*: el niño no experimenta el infinito sino a través de repeticiones continuas del acto de incrementar números finitos, probablemente vía la operación de sumar. Intuitivamente llegan, a partir de esta experiencia, a la conclusión de que "lo que se puede hacer una vez se puede hacer otra" y repitiendo el ciclo podemos seguir así siempre, lo que nos recuerda al proceso de razonamiento de *inducción matemática*.

Ficha técnica (Monaghan, 1986)

- *Muestra:* 54 / 190 sujetos (de 16 a 18 años)
- *Cuestionario:* no se indica número de ítems
- *Duración:* no se indica
- *Otras características metodológicas:* 13 entrevistas estructuradas

En el marco creado por el trabajo de Fischbein et al. (1979) se sitúa la tesis doctoral de Monaghan (1986) en la que se examinan los conceptos de límite e infinito. Algunos de los resultados de este trabajo no publicado se recogen en (Monaghan, 2001). La investigación se dirigió a lo que el autor denomina *concepciones subyacentes* frente a los detalles técnicos; es decir, no estaba relacionada con respuestas correctas o incorrectas y se evitaron conceptos y notaciones de matemáticas avanzadas. El núcleo específico incluía aspectos tales como el infinito como proceso y objeto, el infinito como número, infinitesimales, sucesiones infinitas y series, números reales, el lenguaje del infinito, razonamientos con el infinito, contextos tales como numérico/geométrico, contar/medir, estático/dinámico y el efecto de la enseñanza. Posteriormente, tras un estudio previo sobre 54 sujetos, se aplicó un cuestionario ligeramente modificado a 190 estudiantes de centros de similares características a dicho estudio.

Del análisis de los resultados obtenidos cabe destacar que cuando los estudiantes hablan sobre el infinito, su lenguaje refleja repetidamente como imagen primaria el carácter de proceso del concepto, entendiéndolo no como una cosa sino como el acto de *avanzar sin parar*. Algunos estudiantes suscribieron aparentemente el punto de vista del infinito como objeto mediante referencias a un número muy grande o a colecciones que contienen un número de elementos "no finito", pero esto no impidió que tales estudiantes también se refiriesen a la imagen de proceso. Se encuentra de nuevo, que el concepto de infinito es inherentemente contradictorio y lábil como ya señalara Fischbein. Como ya se ha indicado en reiteradas ocasiones, el infinito puede interpretarse como un proceso, como ocurre en el principio de inducción o en los bucles infinitos de los lenguajes computacionales y como un objeto, como un número muy grande o el cardinal de un conjunto. Esta dualidad proceso-objeto en educación matemática está hoy día perfectamente establecida en el campo de la investigación como se recoge en el capítulo 2 (Gray y Tall, 1994; Dubinsky, 1991; Sfard, 1991). Pero los estudiantes también dicen "se dirige hacia infinito"; ¿es aquí infinito un objeto? Aunque Monaghan se refiere en este trabajo a la dualidad proceso-objeto, para Tall se corre cierto riesgo en esta polarización ya que la frontera entre proceso y objeto puede no estar bien definida en las mentes de los estudiantes. Aunque los estudiantes pueden decir "hacia infinito" esto no excluye que el "infinito como proceso" impregne sus pensamientos ya que podría ser que algo que no se detiene y *es* infinito se *dirija* hacia el infinito. Esta dualidad proceso-objeto puede conducir a inferencias contradictorias cuando se compara el cardinal de conjuntos como ocurre si consideramos, por ejemplo, los números naturales y los pares. El esquema "infinito como proceso" puede conducir a respuestas tales como "ninguno de ellos se detiene, por lo tanto hay los mismos en ambos", o bien "ninguno de ellos se detiene, por lo tanto no podemos compararlos" que, como veremos en el capítulo 5 se recogen también en el presente trabajo en el tramo de edades considerado. Entonces cabe preguntarse si existen los números infinitos para estudiantes sin entrenamiento matemático formal sobre las propiedades de los números infinitos. Para Monaghan, la respuesta es un "sí" con limitaciones. *Los decimales infinitos son* para muchos de ellos *números infinitos*. La potencia cognitiva del "infinito como proceso" es, cree el autor de este trabajo, la razón que hay detrás de todo esto. Las entrevistas realizadas revelaron repetidamente que los estudiantes describen los decimales infinitos como incompletos, entidades dinámicas que son cualitativamente diferentes de los decimales finitos. La definición errónea más frecuente es que "un número irracional es un decimal que contiene infinitos dígitos", perdiéndose así la idea de ausencia de periodicidad que queda ensombrecida, según el autor, por su naturaleza infinita.

Otro tipo de infinitud considerada es lo infinitamente pequeño. La creencia en lo infinitesimalmente pequeño en las edades consideradas parece ser rara. De nuevo el autor se apoya en el esquema "el infinito como proceso" para justificar tal actitud: es posible seguir sin detenerse y obtener un número cada vez más pequeño. Algunos de los sujetos de la tesis de Monaghan parecen aceptar los infinitésimos como ficciones útiles, una generalización de un número muy pequeño de manera similar a como el infinito aparece como una generalización de un número grande: "considero algo infinitamente pequeño como una forma de decir que es extremadamente pequeño". De manera análoga, otros parecen aceptar aproximaciones: "el número es tan pequeño que al añadírselo a 2 apenas habría diferencia… podríamos ignorarlo por ser tan pequeño".

Monaghan enfrenta diferentes contextos: numérico frente a geométrico, de cálculo frente a medida y estático frente a dinámico. Monaghan mantiene que las ideas sobre límites que se presentan en un marco geométrico son más sólidas que las presentadas en un marco numérico. Como se puede observar en la Tabla I del *Apéndice II*, las cuestiones no son equivalentes porque en una de ellas se sugiere un límite y en la otra no; sin embargo, aquí y en muchas otras cuestiones similares se observa una tendencia al uso de criterios más imprecisos en un contexto gráfico. Es lo mismo que ocurre con las subdivisiones de Piaget y los números de Falk: las formas sugieren un mundo real finito y los números sugieren un mundo matemático abstracto; este pensamiento aproximado, frecuente en el mundo real *-está cerca de 0-*, no es aceptable normalmente en el mundo de los números. La proximidad entre estos dos contextos es, sin embargo, difusa y es posible el paso de uno a otro.

En la tabla III del *Apéndice II* se presenta un grupo de tres cuestiones que permiten apreciar los errores que se pueden cometer en una investigación sobre este tema a la hora de acceder a las ideas de los estudiantes. No se observa una gran diferencia en las respuestas a las cuestiones 1 y 2. Los datos podrían sugerir que los estudiantes no ven la convergencia o divergencia de las series; pero las entrevistas pusieron de manifiesto, sin embargo, que sí observaban la convergencia y divergencia aunque ambas series tenían para ellos un problema similar: el de continuar indefinidamente y no alcanzar nunca una respuesta final. Esto, según Monaghan, surge de un *principio de lo mismo* como esquema de evaluación. El principio de lo mismo se aplica a ambas debido al hecho de que la suma no terminará nunca, por lo que no hay respuesta final. Entrevistas posteriores sugirieron que utilizar una serie sospechosa para definir un número "impropio", como en la tercera cuestión, era en sí mismo aceptable.

Ficha técnica (Sierpinska, 1987)

- *Muestra:* estudiantes de 15 a 17 años de ciencias y humanidades
- *Cuestionario:* no se indica número de ítems
- *Duración:* no predeterminada
- *Otras características metodológicas:* investigación cualitativa, sesiones de transmisión de conocimiento, entrevistas y discusión, estudio de casos

Sierpinska (1987) establece una tipología de actitudes de estudiantes de 17 años que se enfrentan a una serie de cuestiones con el fin de detectar y superar los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de límite, y se conjetura que las fuentes de estos obstáculos se encuentran en las actitudes de los estudiantes respecto a las matemáticas y al infinito. Parece que la concepción primitiva de infinito es la de algo ilimitado, sin fin. Pero esto se contradice al considerar el caso de 0.99999... que los estudiantes interpretan como una sucesión de aproximaciones sucesivas que va creciendo y está acotada. Para escapar de la paradoja, los estudiantes adoptan diferentes soluciones, tanto desde una perspectiva *finitista* como *infinitista*; o bien el infinito es totalmente desechable, lo que puede ser consecuencia de una actitud *empiricista intuitiva* hacia las matemáticas: todo termina en el mundo y si esto es así no hay razón para aceptarlo en teoría; o bien, el infinito es considerado como una construcción mental aceptable sólo en las teorías matemáticas, en cuyo caso no se supone que tenga un significado y esto puede ser una consecuencia de una actitud *formal discursiva* hacia las matemáticas. En este caso, es necesario distinguir sucesiones limitadas e ilimitadas. Sólo las sucesiones ilimitadas pueden ser infinitas, las limitadas son necesariamente finitas. En ambos casos hay un matiz de no aceptación del infinito: o bien se es capaz de determinar el número de elementos de un conjunto acotado dado, el cual es entonces necesariamente finito, o bien uno admite casos donde esto no es posible. A partir de estas ideas, la autora considera dentro de las dos categorías anteriores una serie de modelos, tanto de la noción de límite como de la de infinito, que responden a las diferentes actitudes de los sujetos frente a las situaciones planteadas.

Ficha técnica (Ferrari et al., 2095)

- *Muestra:* 500 estudiantes (prueba previa) + 500 estudiantes (prueba definitiva) de educación secundaria, bachillerato y universidad
- *Cuestionario:* 20 ítems (prueba previa) 26 ítems (prueba definitiva)
- *Duración:* no se indica
- *Otras características metodológicas:* investigación cuantitativa, cuestionarios con respuesta múltiples.

Ferrari et al. (1995) analizan las intuiciones del infinito bajo contextos numéricos, geométricos y algebráicos sobre tópicos tales como la densidad de conjuntos numéricos, los números periódicos, el infinito discreto, los infinitésimos, el continuo en geometría y la correspondencia biunívoca. Entre los resultados obtenidos por estos autores destacan el hecho de que el concepto de densidad no se halla establecido de modo satisfactorio hasta el nivel universitario, la confusión epistemológica entre medida y cardinalidad al establecer una relación de proporcionalidad entre el número de puntos de un segmento y la longitud del mismo y, por último, la dificultad que supone el acceso al concepto bajo un contexto algebraico frente a otro geométrico.

Turégano (1996) presenta los resultados de una investigación sobre intuiciones y esquemas conceptuales que toma como referencia el trabajo de Fischbein et al. (1979). El cuestionario está estructurado en tres bloques: divisibilidad infinita, cardinales transfinitos y procesos infinitos y límites (ver *Apéndice II*). También incluía dos cuestiones abiertas con el fin de determinar las imágenes que con más frecuencia se evocan espontáneamente cuando se habla del infinito: *¿qué es el infinito?* y *da uno o varios ejemplos de "algo" infinito*. En los tres bloques anteriores los resultados obtenidos se hallan en sintonía con los de la investigación de referencia; es decir, las dos categorías fundamentales frente a la divisibilidad indefinida, el rechazo a la biyección frente a la idea de "medida" como criterio de comparación de conjuntos infinitos y el predominio del infinito potencial frente a procesos infinitos y límites que dificulta su comprensión como algo definido o acabado. En este último caso se muestra evidente, según la autora, el conflicto entre un proceso que se puede repetir indefinidamente y el producto final de tal proceso. En los sujetos infinitistas hay un empleo tácito del infinito como entidad numérica que consiste en afirmar que no cambia al añadirle uno, o en asegurar que en un proceso infinito llega un momento en que, al dar "un paso más" nada cambia. Tras las entrevistas se admite que, aunque la mayor parte de los sujetos aceptan la divisibilidad infinita y son capaces de discutir sobre conjuntos infinitos, el número de sujetos infinitistas se reduce apreciablemente si se trata de reconocer un proceso infinito como algo definido o acabado. Finalmente destaca la existencia de un período de *transición* que se manifiesta mediante una dualidad idea/representación según el tipo de preguntas; tales sujetos se hallan en el tránsito de las operaciones concretas a las abstractas. Para la autora los denominados *finitistas* se caracterizan por entender las matemáticas como una prolongación de la percepción de los objetos. La distribución definitiva que aporta este trabajo es de un 33,3 % de infinitistas, un 26 % en estado de transición y un 40,7 % de finitistas.

Ficha técnica (Turégano, 1996)

- *Muestra:* 89 sujetos (de 14 a 16 años)
- *Cuestionario:* 12 ítems + dos cuestiones abiertas
- *Duración:* una hora
- *Otras características metodológicas:* análisis cualitativo; entrevistas a una selección de alumnos de una hora de duración

3.2.3 MODELOS INTUITIVOS EN EL DOMINIO DEL INFINITO ACTUAL.

Fischbein (1998) recoge varios ejemplos de influencias tácitas ejercidas por modelos mentales en la interpretación de diversos conceptos matemáticos en el dominio del infinito actual. Las influencias de estos modelos tácitos, al ser incontroladas conscientemente, pueden conducir a interpretaciones erróneas, contradicciones y paradojas. En particular, se trata el efecto inconsciente de los modelos pictórico-figurativos de enunciados relacionados con los conjuntos infinitos de puntos geométricos tales como un segmento, un cuadrado o un cubo. Inicialmente, a los niños de una clase elemental no se les dice que los objetos geométricos son, en realidad, abstracciones, y que los puntos, líneas, cuadrados, círculos, etc. dibujados son representaciones pictóricas de abstracciones no representables mentalmente como tales. Los niños *ven* los puntos, las líneas, los cuadrados, etc., dibujados sobre una hoja de papel y aprenden sobre sus propiedades como si fueran los objetos originales del razonamiento geométrico. Más adelante, los profesores intentan introducir nuevas especificaciones como “un punto no tiene dimensiones”, “una recta sólo tiene una dimensión”, etc. Como es natural los estudiantes continuarán recurriendo de manera automática a los mismos modelos visuales por la simple razón de que sin la intervención de los correspondientes modelos figurativos el proceso de razonamiento no podría progresar. Ahora bien, los modelos pueden inspirar y apoyar inferencias matemáticas correctas con respecto a ciertas propiedades o teoremas, pero también pueden conducir a conclusiones erróneas con respecto a otros. Tales contradicciones entre las inferencias basadas en modelos intuitivos y las deducciones formales abstractas aparecen especialmente en el dominio del infinito y conducen a aparentes paradojas.

Consideremos el caso de comparar el número de puntos que contienen dos segmentos de diferente longitud. Por una parte se nos ha enseñado que ambos conjuntos son equivalentes: en ambos hay infinitos puntos. Por otra parte nos resulta incómoda la pregunta ¿qué ocurre con el tramo de segmento que sobra del mayor sobre el menor?, ¿qué ocurre con sus puntos? Intuitivamente, *figurativamente*, la pregunta es legítima. La paradoja se produce como efecto de la mezcla de dos capas en el proceso de razonamiento: aunque *sabemos perfectamente* que los puntos matemáticos no tienen dimensiones, continuamos pensando *tácitamente*, inconscientemente, en términos de pequeñas *marcas*. Para Fischbein, en la práctica, no podemos desembarazarnos de estas imágenes. Por supuesto que comparando los dos conjuntos en términos de pequeñas marcas del mismo tamaño, los dos conjuntos no son equivalentes. Tenemos que renunciar a este modelo y utilizar exclusivamente el modelo abstracto, el procedimiento cantoriano. Lo que ocurre en realidad es que mientras seguimos los caminos del razonamiento abstracto-formal, con el que concluimos que los dos conjuntos son equivalentes, el modelo figurativo-intuitivo consistente en pequeñas marcas continuas interfiere en el proceso de razonamiento provocando un sentimiento de dificultad, de contradicción, de paradoja. El modelo tácito de punto-marca interfiere en nuestro razonamiento e impide que alcancemos un sentimiento de consistencia lógica, a pesar de que formalmente no nos está permitido confiar en consideraciones figurativas. Ahora bien, con el fin de eliminar el sentimiento de contradicción, podríamos declarar que todos estos conjuntos son infinitos y, por lo tanto, equivalentes. Pero las cosas no son tan simples. Dos conjuntos pueden ser infinitos y, sin embargo, no ser equivalentes en el sentido de Cantor: el conjunto de los naturales y el conjunto de los puntos de un segmento no lo son aunque ambos son infinitos. Así, intentar resolver intuitivamente las paradojas anteriores de manera más sutil no sirve de mucho. Se ha sustituido el modelo figurativo-intuitivo de *punto-marca* por otro más complejo pero aún intuitivo: *infinito = infinito*. Pero esta estrategia tampoco ayuda demasiado porque simplemente no siempre es cierto que *infinito = infinito*. Lo más importante de todo esto no es la existencia de modelos tácitos influyentes en nuestro razonamiento en el dominio del infinito actual, sino la persistencia e impacto de tales modelos pictóricos incluso en individuos con elevada formación matemática, conscientes de la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos.

Hasta aquí Fischbein reflexiona sobre los modelos pictóricos de conceptos relacionados con el infinito tales como puntos, líneas, etc. Un segundo aspecto al que se refiere, relacionado con la interpretación intuitiva del infinito, es lo que denomina *capacidad inagotable del infinito*. Esta propiedad del infinito asumida tácitamente tiene considerables consecuencias en el razonamiento matemático de los estudiantes. Al respecto, Fischbein (1979) plantea la siguiente cuestión[9]:

> Sea C un punto arbitrario de un segmento AB. Dividimos AB primero en dos mitades y continuamos dividiendo sucesivamente cada mitad resultante en otras dos mitades. ¿Se alcanzará una situación en que uno de los puntos de la división coincida con el punto C?

La cuestión la respondieron estudiantes de 10 a 15 años y los porcentajes de respuestas afirmativas oscilaron entre el 67,7 % y el 91,4 %. Evidentemente no tuvieron en cuenta que un punto irracional no se puede alcanzar mediante divisiones y que incluso no todos los puntos racionales se pueden alcanzar. La explicación de Fischbein es que el infinito aparece intuitivamente como equivalente a *inagotable*, es decir, si uno continua el proceso de división indefinidamente se pueden alcanzar todos los puntos. Esta interpretación del infinito es la razón esencial de que, intuitivamente, sólo haya un nivel de infinito. Un infinito inagotable no puede ser superado por otro mayor. En consecuencia, concluye Fischbein, la existencia de estos dos modelos tácitos del infinito, *punto-marca* e *inagotabilidad* / *infinito = infinito*, hace que el concepto de infinito actual sea, intuitivamente contradictorio y que ambas intuiciones tiendan a entrar en conflicto.

Según Duval (1983), para la mayor parte de los alumnos el infinito es *aquello que no se detiene*. Esta determinación basta para justificar el infinito potencial no sólo de la sucesión de los enteros sino también de la sucesión de los cuadrados de enteros, los enteros pares, etc. Su carácter negativo permite también acceder a la noción de infinito actual; en efecto, lo que no se detiene es inagotable: siempre se puede coger de ello y siempre estará *lleno, lleno, lleno* según la expresión de algún alumno. Duval pudo verificar que para todos los alumnos de doce años, la operación $\infty - n = \infty$ era evidente, siendo n una cantidad todo lo grande que se quiera. Pero esta idea de inagotabilidad ya no funciona cuando se lleva a la división indefinida de un segmento y tampoco en una sucesión ilimitada de enteros; el continuo ofrece otro género de dificultades.

Por su parte Singer y Voica (2003) pretenden identificar intuiciones primarias y secundarias, en el sentido de Fischbein, relacionadas con la idea de infinito. Para ello las autoras consideran un amplio rango de

Ficha técnica (Singer y Voica, 2003)

- *Muestra:* 172 estudiantes de 11 a 19 años y futuros profesores
- *Cuestionario:* no se indica número de ítems; cuestiones abiertas
- *Duración:* no se indica
- *Otras características metodológicas:* Entrevistas (21 estudiantes); discusiones en grupos de 30 estudiantes (durante dos horas)

9. Una versión de esta cuestión se incluye en nuestro cuestionario en el ítem 1UNIC3P01.

edades. Debido a que se quiso favorecer la divergencia de opiniones mediante cuestiones abiertas, el rango de respuestas obtenido es muy amplio y el estudio es básicamente cualitativo. El artículo sólo recoge el análisis de las respuestas de estudiantes de 10 a 14 años.

Las respuestas a la cuestión *describe la idea de infinito con tus propias palabras* son categorizadas por las autoras según enfaticen una *dimensión temporal* –"infinito es algo que nunca se detiene"- una *dimensión espacial* –"infinito es cuando algo no termina nunca y continua"-, *afectos y espiritualidad* –"infinito es algo cuyo secreto no podemos entender"-, una *dimensión de proceso* –"infinito es el término que utilizamos para algo que continúa avanzando"- o bien su *carácter incontable* –"infinito es como todos los sonidos del mundo que no se pueden contar"-. Por otra parte, al contrario que ocurre en otros estudios, las autoras han encontrado que para muchos estudiantes de los primeros cursos de secundaria, el concepto de infinito en $\mathbb{N}$ es demasiado complejo para permitir el razonamiento. Sin embargo, ha resultado sorprendente que estudiantes de 12 y 13 años hayan encontrado reglas de asociaciones entre parejas de conjuntos tales como: {1, 2, 3,...} y {-1, -2, -3,...}; {0, 1, 2, 3,...} y {0, 2, 4, 6, 8,...}; {0, 2, 4, 6,...} y {1, 3, 5, 7,...}*;* tuvieron alguna dificultad para hallar dichas conexiones entre cada pareja pero finalmente las encontraron. La pregunta *¿cuál de los conjuntos {0, 3, 6, 9, 13, 15,...} y {1, 2, 4, 5, 7, 8,...} tiene más elementos?* generó fuertes discusiones y controversias. La primera reacción fue razonar sobre un caso finito: de 0 a 15, el segundo conjunto tiene 10 elementos mientras que el primero tiene 6. En general, los autores encuentran el tipo de errores que aparecen en la literatura correspondiente. Así para determinar qué conjunto tiene más elementos los estudiantes utilizan intuitivamente varios tipos de argumentos. El más frecuente es *contar en* $\mathbb{N}$ *con un determinado comienzo y salto*: "Hay más enteros positivos que pares porque hay dos veces más"; "los enteros positivos son más porque los pares van de 2 en 2". Otro de los métodos utilizados es el de la *relación todo-parte*: "Los enteros positivos tienen más elementos porque contienen a los pares y a otros números". Otros errores están asociados con el hecho de que un conjunto sea o no acotado; a partir de ello, algunos estudiantes piensan que finito es algo que tiene márgenes: "(2, 5) es finito porque empieza en 2 y termina en 5" e infinito algo que no tiene márgenes: "$\mathbb{R}$ es infinito porque no sabemos cuál es el principio ni el final".

Otra percepción común es que todos los conjuntos infinitos son equivalentes, que todos tienen el mismo número de elementos como ya ha sido recogido por Fischbein y otros; las autoras lo denominan *el infinito único*. Este tipo de intuición aparece más claro cuando se trata con geometría. Una de las cuestiones geométricas era: *Si de un eje cortamos un segmento de 1 Km de longitud, obtenemos otro eje. ¿Cuál es más largo?*: "Sería lo mismo porque después de cortar 1 Km tu sigues y nunca paras".

A lo largo de este estudio se encuentra que las intuiciones primarias de los estudiantes son semejantes tanto para los más jóvenes estudiantes como para los futuros profesores y análogas a las recogidas en la literatura dedicada al tema. Tres resultados pueden resumir este trabajo. En primer lugar se ha encontrado que algunos sujetos, bajo determinadas condiciones de enseñanza, son capaces de interiorizar una intuición matemática de los conjuntos infinitos. Esto ocurre en cuanto aprenden algo sobre los conjuntos de los números naturales y los números decimales, en torno a los 10 u 11 años. En segundo lugar, cuando los argumentos de los estudiantes son consistentes parecen estar basados en conexiones entre el pensamiento algebraico y el geométrico.

Y, por último, no parece existir conexión entre la edad y la profundidad de la intuición sobre el infinito; los errores y malentendidos son similares en las diversas edades tratadas así como los razonamientos correctos relacionados con el conocimiento formal.

Ficha técnica (Sbaragli, 2004)

- *Muestra:* 16 profesores de Educación Primaria y Secundaria
- *Cuestionario:* 15 ítems
- *Duración:* una hora
- *Otras características metodológicas:* investigación cualitativa, debate sobre las respuestas al cuestionario escrito.

La tesis doctoral no publicada de Sbaragli (2004) se centra en las convicciones de los profesores sobre el infinito matemático. Se analizan los errores de profesores tanto de primaria como de secundaria que se apoyan en imágenes mentales erróneas condicionando sus convicciones y, en consecuencia, sus maneras de enseñar. Aunque el marco teórico seguido es fiel a la escuela francesa y al denominado "triángulo didáctico", este estudio se adentra en realidad en la detección de intuiciones consolidadas tras una formación específica. Cada una de la preguntas del cuestionario se presentaba en una hoja y sólo tras la realización de las quince preguntas comenzaba el debate (ver *Apéndice II*).

La cuestión 1 sirvió para una primera categorización de los sujetos en cuanto a sus ideas sobre el infinito; ninguno de ellos manifestó conocimiento alguno de una concepción "avanzada" del infinito matemático, encontrándose los siguientes tópicos:

- Infinito como *indefinido* e *ilimitado*: "Para mi significa sin límites, sin límites como el espacio".
- Infinito como un *número muy grande*: "Es un número muy grande, tan grande que no puedes decir un valor exacto"
- Infinito como *proceso*: "Significa continuar como con los números... sin parar".

La cuestión 2 revela cuáles son las imágenes que los profesores transmiten a sus alumnos; el objetivo de la cuestión 3 es el de descubrir si el infinito como objeto matemático existe entre el profesorado encuestado; para trece profesores infinito es sólo un adjetivo y para los tres restantes un sustantivo. En la cuestión 4, los dieciséis profesores respondieron que había más puntos en el segmento más largo. Esta pregunta reveló cómo algunas de las convicciones están relacionadas con que la idea de punto está asociada a una entidad geométrica provista de cierta dimensión, aunque pequeña. En las cuestiones 5, 6, 7 y 8 quince profesores respondieron "infinitos" si bien se puso de manifiesto posteriormente que ignoraban el sentido de esta afirmación. La cuestión 9 y las cuatro siguientes planteaban la comparación de algunos conjuntos de cardinal infinito que aparecen con frecuencia en educación primaria. Las respuestas recogidas fueron clasificadas en *hay tanto números pares como impares* (12) y *es imposible comparar los cardinales de conjuntos infinitos* (3). Las respuestas a las preguntas 10, 11 y 12 también permitieron establecer nuevas categorías; los 16 profesores fueron consistentes en sus respuestas a las tres cuestiones: *hay más números naturales* (10), *no puedes comparar conjuntos infinitos* (3), *todos los conjuntos son infinitos* (2). Tras la cuestión 13 se les mostraba a los profesores la demostración de Cantor que demuestra que hay el mismo número de puntos en dos segmentos de diferente longitud y a continuación recibían la cuestión 14. Tras esta, se les entregaba la demostración de que el conjunto de los números pares está formado por el mismo número de elementos que el conjunto de los números naturales, mostrando la correspondencia biunívoca correspondiente y, a continuación, se les entregaba la cuestión 15. En la cuestión 13 todos los profesores reconocieron no haber propuesto actividades específicas a sus alumnos aunque 3 de ellos admitieron haber dicho a sus estudiantes que había más números naturales que pares, lo que supone un evidente obstáculo didáctico. En la cuestión 14, cinco de los dieciséis profesores manifestaron que no les convencía la demostración aportada y a nueve sí les convenció la demostración; otro admitía su "fe en las matemáticas" aunque no le convencía demasiado la demostración y otro se manifestaba inseguro. En cuanto a la cuestión 15, que pretendía mostrar a los profesores que la propiedad euclidea "el todo es mayor que cada una de sus partes" no se puede aplicar a conjuntos infinitos, seis profesores manifestaron no estar convencidos y tener dudas de la demostración que se les presentó, mientras que diez afirmaron estar convencidos.

Las discusiones posteriores a los cuestionarios se celebraron entre dos o cuatro sujetos. El intercambio de opiniones reveló cómo algunas de las convicciones de los profesores se refieren normalmente a una visión potencial del infinito: "Yo digo que los números son infinitos, pero esto es sólo en la imaginación, nunca los tendremos todos, utilizas el infinito para referirte a un número cada vez mayor; de ninguna manera puedes alcanzar el infinito". La consecuencia principal de esta concepción en la enseñanza es el riesgo de proporcionar a los estudiantes imágenes completamente extrañas a las matemáticas y convertirlas posteriormente en un obstáculo en cursos de Análisis cuando se trata la densidad de $\mathbb{Q}$, la irracionalidad de B, la relación entre lado y diagonal de un cuadrado, etc. Tras el debate, diez profesores se mantenían en una actitud favorable al infinito potencial, mientras que seis parecieron captar la idea del infinito actual. También surgió en el debate la supuesta "necesidad de concreción"; la mayor parte de los profesores mantenían que es preciso hacer matemáticas refiriéndose al mundo real y de esta manera surgen problemas como el interpretar los puntos como cuentas de un collar o marcas de un lápiz. No obstante, queda la duda de si esa necesidad de concreción es propia de los estudiantes o una creencia del profesor; hay experiencias con niños que ponen en duda esto. Entre los resultados de esta investigación podemos destacar que

- El infinito matemático es, en general, un concepto desconocido, tanto en su sentido epistemológico como cognitivo, que sólo se manipula mediante la intuición y que normalmente se reduce a una extensión banal de lo finito. Esto puede ser debido tanto a los obstáculos epistemológicos propios de esta noción como a una formación sesgada sobre este tópico. Todo ello conduce a la creación de modelos intuitivos que desembocarán en las ideas falsas que se transmiten.
- Las imágenes intuitivas de los estudiantes relacionadas con el infinito se encuentran continuamente estimuladas por los profesores que tienden a transmitir a sus estudiantes sus propios modelos intuitivos que normalmente son erróneos; así, junto a los obstáculos epistemológicos recogidos en la literatura sobre el tema, existen serios obstáculos didácticos que derivan de los modelos intuitivos erróneos de los profesores y que son quizás más influyentes que los primeros ya que debido a la elección didáctica del profesor se condicionan y refuerzan las primeras ideas falaces[10]. Otros trabajos con profesores de

10. En base a las conclusiones de este estudio se diseñó un curso sobre el infinito matemático que se impartió a profesores de educación primaria y secundaria; antes de iniciar el curso se aplicó el mismo cuestionario y los resultados fueron semejantes a los obtenidos anteriormente.

enseñanza elemental (Wheeler y Martin, 1987) revelan importantes inconsistencias a la hora de definir el infinito o, incluso, de interpretar los puntos suspensivos de una sucesión.

En esta tesis también se hace referencia a los libros de texto y el uso que hacen del concepto de infinito. Para la autora un libro de texto no es sino el resultado de una transposición didáctica elegida por los autores y, por lo tanto, no es interpretado por los profesores como un libro de matemáticas donde uno puede aprender conceptos. Los profesores que adoptan dicho libro de texto ya deberían poseer y controlar el conocimiento preciso. Con respecto al infinito matemático, en particular, los profesores con frecuencia no parecen confiar en absoluto en dicho conocimiento y sólo atribuyen a la transposición didáctica contenida en el texto la función de contenidos matemáticos a transmitir. De cualquier manera el tratamiento de estos temas en los libros de texto es claramente insuficiente y problemático.

La tesis también recoge brevemente la descripción y los resultados de una investigación llevada a cabo con 38 niños de educación primaria de 10 años de edad. El trabajo se desarrolló mediante entrevistas grabadas con parejas de niños. Se comenzaba mostrando dos segmentos de distinta longitud sobre una hoja de papel y preguntando *¿qué pensaban ellos que representaban?*; cuando quedaba claro que para ellos representaban dos segmentos se planteaba la segunda pregunta: *¿crees que hay más puntos en este segmento o en este otro?* Tras dar sus respuestas y discutirlas se les presentaba la demostración de Cantor que pone de manifiesto la equivalencia y, a continuación, se les mostraba dos círculos concéntricos y se les preguntaba: *¿hay más puntos en esta circunferencia o en esta otra?* Finalmente se les proponía que respondieran la cuestión *¿qué es para ti el infinito matemático?* A la primera pregunta, la mayoría de los niños respondieron algo así como “en el segmento más largo”; sólo un niño afirmó que había más puntos en el segmento más corto. Excepto cuatro, los demás fueron persuadidos del nuevo descubrimiento, es decir que dos segmentos de diferente longitud están formados por el mismo número de puntos. Cuando el investigador mostró las dos circunferencias concéntricas, casi todos los sujetos concluyeron inmediatamente que el número de puntos era el mismo en ambas y la mayoría de ellos establecieron la correspondencia biunívoca de manera autónoma comenzando por el centro común.

3.2.4. INTUICIÓN Y NÚMEROS DE MEDIDA INFINITA.

Uno de los primeros resultados que produjo el trabajo de Fischbein (1979) fue el artículo de Tall (1980a), fruto de conversaciones entre ambos autores con la intención de aportar bases para una interpretación alternativa de las intuiciones de los estudiantes. Tall plantea que los números se utilizan al menos para tres propósitos en la vida cotidiana: contar, ordenar y medir. A finales del siglo XIX, Cantor extendió los dos primeros introduciendo los números cardinales y ordinales infinitos pero hay ocasiones en las que está implicada una interpretación infinita de la medida, en donde las extensiones anteriores no son siempre adecuadas. Tall, en su trabajo, parte de la siguiente cuestión:

> Consideremos dos segmentos AB y CD donde la longitud de CD es el doble que la de AB y preguntamos si hay el mismo número de puntos en AB y en CD

La solución desde el punto de vista de los números cardinales es que hay una correspondencia entre ambos conjuntos de puntos en la que a un punto P sobre AB a distancia x de A le corresponde un punto Q sobre CD a distancia $2x$ de C, de manera que ambos segmentos tienen el *mismo* número cardinal. Una alternativa perfectamente razonable es que AB tiene el doble de puntos que CD. La respuesta cardinal a esto es que si el conjunto de puntos en AB tiene cardinal $\aleph$ entonces el de CD tiene cardinal $2\aleph$, lo que no hace sino confundir aún más el asunto. La respuesta usual en este conflicto es una reeducación del individuo de manera que se habitúe a considerar natural la propiedad de que la correspondencia uno a uno de un conjunto con un subconjunto propio es una característica de los cardinales infinitos. Pero, si consideramos la noción intuitiva de "punto" y "línea" encontraremos una interpretación alternativa de infinito sin los conflictos que se dan en el ejemplo anterior. Tall considera que la respuesta anterior es debida a que aparece implicada la idea de medir en lugar de la de contar.

Los puntos físicos tienen tamaño cuando son marcados con la punta de un lápiz y de esto dependerá la mayor cantidad de ellos que admitirá un segmento. Los estudiantes tienen muchas intuiciones diferentes sobre la naturaleza de los puntos como podremos apreciar en el análisis de nuestros resultados. Algunos pueden "no ver" los puntos sobre el segmento hasta que no se marcan sobre él, otros pueden decir que sólo hay dos puntos en un segmento, uno en cada extremo, etc. En algún momento se introduce la convención matemática de marcar un punto sobre un segmento con la punta de un lápiz. En dicho momento los "puntos" pueden interpretarse como marcas que no se superponen y cuando pedimos a un sujeto que sitúe todos los puntos posibles en un intervalo, él lo hará hasta que físicamente no pueda poner más. Si al mismo sujeto se le pide que, dados dos puntos sobre un papel, marque todos los puntos que hay entre ellos en línea recta, probablemente dibujará marcas superpuestas en una línea que una los dos extremos dados. Esto puede sugerir que el sujeto en este estadio crea en una línea *finitista*, hecha de un número finito de puntos indivisibles, pero esto no es así. A un niño de ocho años, se le preguntó

> Si tomamos una línea tan larga como una calle y la cortamos por la mitad, después tomamos la mitad de cada una de las partes, luego la mitad de cada una de estas partes, y así sucesivamente, ¿podemos seguir así siempre o llegará un momento en que nos detengamos?

El niño respondió que esto se podría hacer siempre; "pero ¿los trozos no llegarán a ser tan pequeños que no se podrán cortar?", "No, si tu los miras a través de un microscopio". Podríamos pensar que este niño se encuentra en algún estadio de transición piagetiana entre la divisibilidad finita e infinita de una línea. Para Tall, una hipótesis alternativa es que el niño se ha encontrado con el conflicto entre la divisibilidad finita en la práctica del dibujo y la divisibilidad infinita en la imaginación teórica. Lo que queda claro es que el niño no concibe la noción de número en sentido *cardinal*, sino como un tipo ordinario de medida. "¿Cuántos puntos puedes imaginarte que hay sobre esta línea?, "Unos cincuenta", "Y..." -apuntando al segmento que tiene el doble de longitud- "¿Cuántos hay en esta?, "Unos cien". El número de puntos sobre una línea es, para él, proporcional a lo longitud de la línea. No concibe la diferencia entre el continuo racional y el continuo real que tienen números cardinales diferentes, ni el hecho de que intervalos reales de diferente longitud puedan tener el mismo número cardinal. Es, por lo tanto, complemente inapropiado interpretar su proceso de pensamiento bajo el paradigma formal de los cardinales. Este sólo supondría una de las varias extensiones infinitas posibles del concepto de número más que una realidad lógica absoluta bajo la que se debe juzgar todo. Tall (1992) abunda en que las experiencias del infinito que los niños se encuentran raramente están relacionadas con la comparación de conjuntos, por lo que difícilmente se establecerán las raíces cognitivas necesarias para el concepto cardinal de infinito.

En base a esta idea, Tall (1980c) plantea la posibilidad de hacer uso del análisis no estándar con el fin de adaptar las intuiciones *finitistas* a la aritmética infinita, introduciendo el concepto de *número de medida infinita*. Tales números de medida son elementos de un campo y, como tales, pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse de la manera usual, mientras que la aritmética de los cardinales se restringe a la adición y la multiplicación. De esta manera la interpretación de situaciones en las que está implicada alguna forma de medida, como los "puntos" de un determinado tamaño, resulta intuitivamente más satisfactoria. Con el esquema alternativo de los números de medida infinita podemos ver, al menos, que nuestra interpretación del infinito es relativa respecto de nuestro esquema de interpretación, no una forma absoluta de verdad. Para juzgar el pensamiento intuitivo de los niños es particularmente importante tener en cuenta que ellos no tienen acceso a los esquemas formales de los matemáticos. La "verdad" o "falsedad" de las intuiciones de los niños se debe entender en su propio contexto más que a través de un esquema formal superpuesto que puede tergiversarlas. Esquemas formales diferentes pueden interpretar los resultados de manera muy diferente; por ejemplo, la noción de que un segmento más largo tiene más puntos es verdad en un esquema de medida pero falsa en un esquema cardinal. Las aparentes contradicciones en las intuiciones pueden deberse a la ausencia de un esquema de interpretación. Por ejemplo, parece inconsistente que dos conjuntos puedan tener el mismo número de elementos y, a la vez, que uno tenga más que otro, pero la teoría de conjuntos de Cantor demostró que esto puede ocurrir precisamente con los conjuntos infinitos. La contradicción surge al intentar imponer un marco interpretativo basado en la experiencia con conjuntos finitos. Así, Tall propone interpretar las intuiciones del infinito no bajo el esquema tradicional y contraintuitivo de la cardinalidad, sino en el de los números de medida infinita. Piensa que el hecho de que la medida se muestre más cercana de la intuición se debería a que es una extensión natural de nuestros esquemas relativos a la noción inicial de punto, aspecto que le parece fundamental en el momento de estudiar las intuiciones de los niños ya que ellos no tienen acceso a esquemas de matemática formal[11]. Por el contrario, Monaghan (2001) cree muy improbable que estudiantes sin entrenamiento en estos tópicos puedan tener imágenes conceptuales de números infinitos que se correspondan con las relaciones inherentes al análisis no estándar. Es decir, ¿se incluyen entre las imágenes de los estudiantes cosas tales como 1, 2, 3, …, n +1, … ∞, ∞+1, … Su respuesta es "no", simplemente porque infinito cuando se percibe como un número grande toma la forma de una vaga generalización de un número grande. De hecho, apunta Monaghan, el 31% de los sujetos de su investigación afirman que infinito es un número enorme.

3.3. CONTEXTOS E INCOHERENCIAS EN EL ESQUEMA CONCEPTUAL.

Uno de los aspectos más frecuentes en las investigaciones revisadas es el de la influencia de los contextos y representaciones utilizados en cuestionarios y entrevistas sobre las actitudes de los

11. Tall (2001) distingue entre *infinitos naturales*, aquellas concepciones personales que surgen de la reflexión de experiencias finitas y que la imaginación extiende hasta el infinito e *infinito formal* que procede del enfoque formal que se dio en el siglo XX a las matemáticas para intentar racionalizar las inconsistencias que surgían del enfoque personal, seleccionando una lista de propiedades específicas, o axiomas, a partir de las cuales mediante deducción formal se construye dicho infinito formal.

sujetos encuestados. Las premisas teóricas de dichos trabajos nos ofrecen diferentes perspectivas desde las que observar y analizar este fenómeno.

Tirosh (1999) sugiere que los niños de educación primaria piensan en el infinito en términos de procesos independientemente de si el contexto es numérico, geométrico o material. Así, por ejemplo, si les pregunta si el conjunto de todas las melodías que pueden componerse es infinito una respuesta típica es que “siempre es posible crear más melodías sin más que añadir una nueva nota al final de una melodía ya conocida”.

Garbin (2000) y Garbín y Azcárate (2002) presentan una serie de resultados con los que pretende identificar las inconsistencias y categorizar las situaciones de coherencia que manifiestan los alumnos en relación con sus esquemas conceptuales asociados al infinito actual. La investigación tiene un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. En el momento de la realización de los cuestionarios, los estudiantes no tenían conocimientos formales previos sobre límites. En todos los ítems de los cuestionarios está presente el concepto de infinito actual y todos ellos versan sobre divisibilidad infinita bajo diferentes versiones de la primera paradoja de Zenón (véase *Apéndice II*). Cinco lenguajes distintos diferencian el contexto de cada una de las preguntas: geométrico, verbal, analítico, gráfico y algebraico. Cada problema, en su enunciado, tiene una parte que usa la lengua natural como registro lingüístico, al explicar el problema y la cuestión planteada, y otra parte que usa otro registro de representación semiótica. El segundo cuestionario se aplicó una semana después y su objetivo era permitir a los estudiantes que tomaran posición ante sus propias respuestas.

Ficha técnica (Garbín, 2000)

- *Muestra:* 80 sujetos (de 16 a 17 años)
- *Cuestionario:* 2 cuestionarios (5 y 2 ítems respectivamente)
- *Duración:* 1 hora
- *Otras características metodológicas:* análisis cualitativo, análisis inductivo a partir mediante redes sistémicas, entrevistas semiestructuradas

A partir de las respuestas la autora establece tres líneas de coherencia a las que denomina *línea finitist*a (1), o de evasión de la infinitud, *línea actual* (2) y *línea potencial* (3). Los gráficos de las redes sistémicas permiten identificar a aquellos alumnos que no mantienen respuestas coherentes entre las cinco preguntas del cuestionario. Las líneas de coherencia permiten clasificar la situación de coherencia o incoherencia de cada estudiante. Las respuestas coherentes, en el sentido de cada línea, son las que han determinado la clasificación; así, si un alumno tiene tres o más respuestas coherentes según una línea determinada, se le sitúa en la categoría de la línea correspondiente; si un estudiante tiene tres respuestas coherentes en una de las líneas y dos en una línea distinta, se le coloca en la categoría compartida por ambas líneas; y, por último, si un alumno tiene sus respuestas situadas en diferentes líneas, se le sitúa en una categoría que denominan *mixta*.

Cuando se habla de una idea o pensamiento inconsistente es con relación al concepto matemático involucrado, o a contradicciones dentro de una teoría matemática dada. Generalmente aparecen durante la resolución de un problema o en una respuesta al mismo. Una forma particular de inconsistencias directas, según la clasificación de Tirosh (1990), son las que se presentan cuando los estudiantes tienen que resolver un mismo problema representado de forma diferente, poniendo de manifiesto que los alumnos no mantienen respuestas consistentes ante representaciones diferentes. En el caso particular de esta investigación, la autora introduce el término *incoherencia*, pero con un matiz distinto al de *inconsistencia* lo que permite que se puedan usar de manera diferente ambos términos aunque estén estrechamente relacionados. Si un sujeto tiene que resolver un mismo problema expresado de distintas maneras, se generan respuestas contradictorias entre sí -la de un problema respecto de otro-. La autora las denomina *respuestas incoherentes*, o coherentes en caso contrario. Las líneas de coherencia son las que permiten identificar este tipo de respuestas coherentes o incoherentes. Así, un alumno puede tener ideas o dar respuestas que sean inconsistentes con el concepto involucrado -idea o respuesta errónea- y, sin embargo, mostrarse coherente en su pensamiento -ideas o respuestas equivalentes en problemas diferentes-. Un estudiante es coherente en este estudio si todas sus respuestas están en la misma línea de coherencia; no obstante, un alumno puede ser coherente con su pensamiento pero inconsistente con el concepto matemático involucrado. A partir de lo anterior se definen tres tipos de alumnos: *coherente y consistente* si tiene todas sus respuestas en la línea 2; *coherente pero inconsistente* si tiene todas sus respuestas se hallan en la línea 3 ó 1 e *incoherente* si tiene respuestas que no son coherentes en ninguna línea, 1, 2 ó 3, por ejemplo, podría tener dos respuestas en la línea 1, dos en la línea 2 y una en la 3.

La autora introduce, finalmente, el concepto de *tarea de conexión*. Ésta consiste en identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos, tanto conceptual como global, de los problemas, de manera que permita una influencia mutua, dando lugar a respuestas asociadas coherentes con los problemas. Consideremos, por ejemplo, las cuestiones 1 y 3 del primer cuestionario. La tarea de conexión entre los dos problemas consiste en reconocer que en ambas preguntas está presente la divisibilidad infinita por mitades con dos iteraciones y con naturaleza de contenido -contexto conceptual-; son dos problemas que representan el mismo concepto, pero tales que, en el primero, se utiliza el lenguaje geométrico y, en el tercero, el analítico. Vinculados a los lenguajes matemáticos, usados en el enunciado de ambos problemas, estarían los registros de representación semiótica: figura geométrica -segmento, en la pregunta 1- y escritura numérica -suma infinita, en la pregunta 3[12].

Garbín (2005a y 2005b) contribuye al debate de la problemática del infinito en el ámbito universitario en un nivel donde empiezan a aparecer interconexiones y confusiones entre la “imagen formal” y la “imagen informal” de este concepto. Se trata de un estudio cualitativo en el que participaron 89 estudiantes, de Física, Química e Ingeniería, de edades comprendidas entre 17 y 25 años. La metodología e instrumentos utilizados son exactamente los mismos que los que aparecen en los trabajos anteriores. Los estudiantes perciben y muestran en sus respuestas una concepción del infinito que no se mantiene a lo largo de las preguntas. En algunas de éstas, el proceso infinito no es percibido como acabado y en otras, sin embargo, sí es aceptada la compleción del proceso. Siguen apareciendo respuestas *finitistas* a las cuestiones y, en algunas

---

12. Específicamente, en este punto, la tarea de conexión consistiría en reconocer los siguientes aspectos:

- Si se considera el segmento de dimensión 1, es decir, el segmento real [0, 1], cada punto del proceso de bisección se debe identificar con cada uno de los sumandos de la suma infinita de la pregunta 3.
- La suma infinita del enunciado representa numéricamente la suma infinita de los segmentos que son resultado de las bisecciones y, por tanto, una solución explícita de la serie es la respuesta correcta a la primera pregunta.
- La respuesta a la pregunta 1 debe ser asociada y coherente con la respuesta de la pregunta 3.

preguntas, el contexto físico-finito influye en eludir la infinitud. La mayoría de los estudiantes, indistintamente a si aceptan la situación límite o no de las preguntas, argumentan sus respuestas dejándose llevar por la intuición o por el contexto de las preguntas, con argumentos que recurren a la división infinita en mitades, posibilidad de poder dividir infinitamente o a la existencia de infinitos puntos en una recta, sumando o aproximando valores, o bien aceptando sin demostración la convergencia o divergencia de la serie $\Sigma 1/2^n$. En general, usan pocos argumentos matemáticos formales para responder a las cuestiones y es muy pequeño el número de alumnos que mencionan en sus argumentos los conceptos de límite, sucesión o serie. Sólo una minoría, 5 alumnos, establece nexos de relación entre algunas de las preguntas del cuestionario. En cuanto a las líneas de coherencia sólo un estudiante aceptó en todas sus respuestas que el proceso implicado en las cuestiones es acabado, completo y dos alumnos mantienen en todas sus respuestas una concepción potencial del infinito. La mayoría de los estudiantes mantuvieron líneas de coherencia “mixtas”. La “imagen informal” persiste en los esquemas conceptuales de los sujetos a pesar de la introducción de ideas formales durante la enseñanza. Todo hace suponer que el conocimiento previo del cálculo diferencial e integral es de ayuda pero no de una manera significativa como para establecer y reconocer las conexiones “oportunas” y “fundamentales” entre los problemas planteados, así como de potenciar la noción de infinito actual.

Para Tall (2004c) habilidad para contemplar la completitud de un proceso potencialmente infinito demuestra ser mucho más intratable de lo que parece. La ecuación

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

se lee, con frecuencia, de izquierda a derecha como un proceso de cálculo, “un medio mas un cuarto mas un octavo mas un dieciseisavo, mas (así sucesivamente) *da* uno”. Pero ¿cómo puede alcanzarse la segunda parte de la sentencia antes de que se haya completado la primera parte? El símbolo $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots$ puede ser interpretado por los estudiantes no como un *valor*, sino como un proceso para calcular un valor, una *cantidad variable* que se acerca al resultado tanto como deseemos, pero que nunca lo alcanza. Li y Tall (1993) observaron un fenómeno comparable en las respuestas a las siguientes cuestiones:

(A) *¿Puedes sumar 0.1+0.01+0.001+⋯ y dar una respuesta exacta?* (S / ? / N)

(B) *1/9 = 0.111... ¿Es 1/9 igual a 0.1+0.01+0.001+⋯?* (S / ? / N)

De 25 estudiantes, sólo 4 respondieron afirmativamente a ambas preguntas, consistentes con concebir $0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$ como el número 1/9. La mayoría dijo que *no* a (A) y que *sí* a (B). Esta aparente contradicción es consistente con la idea de que $0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$ representa un proceso potencialmente infinito que nunca termina. Bajo este punto de vista, si una ecuación se lee de izquierda a derecha, entonces $0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots = 1/9$ se consideraría falso ya que el proceso de la izquierda no termina nunca, pero $1/9 = 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$ sería cierto ya que nos muestra cómo la división de 1 entre 9 se construye sucesivamente a partir de la sucesión de la derecha. Los estudiantes construyen sobre intuiciones, desde los primeros años, que una ecuación puede significar un proceso de cálculo y que este proceso ocurrirá en un número finito de pasos. Esto entra en conflicto con su intento de concebir la compleción actual de un proceso infinito, provocado por el simbolismo que pretende representar un proceso de límite más que el límite como objeto. Para Tall existen efectos coercitivos en el uso del lenguaje, por ejemplo en frases tales como “se aproxima al límite” o “tan cerca como queramos” donde “aproximarse” o “acercarse” implica “proximidad” pero no “coincidencia con”, sugiriendo que un límite no puede ser alcanzado.

En (Schwarzenberger y Tall, 1978) se les pregunta a 36 estudiantes, recién llegados a la universidad: *¿Es igual $0,\widehat{9}$ a 1 o es un poco menor que uno? Explica las razones de tu respuesta.* La mayoría (20) dijo que “un poco menor”, 14 respondieron que “es igual” y dos consideraron aspectos de ambos puntos de vista. Sólo diez estudiantes mantuvieron que habían recibido una definición del concepto de límite, de ellos sólo siete pudieron dar una definición y sólo uno de ellos respondió que $0,\widehat{9} = 1$. Las explicaciones para justificar que $0,\widehat{9} < 1$ incluían respuestas del tipo “es un poco menor que uno, pero la diferencia entre ambos es infinitamente pequeña” y del tipo “es un poco menor que uno porque incluso en el infinito aunque el número esté muy cerca de uno, técnicamente no es igual a uno”. La idea de que un símbolo tal como $0,\widehat{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$ representa una cantidad que es *casi igual* a 1 pero no totalmente, sugiere que la diferencia entre dicha cantidad y 1 es, en efecto, muy pequeña. Las representaciones decimales refuerzan sutilmente tal creencia ya que los decimales finitos, digamos hasta la cuarta cifra, son discretos; van uno tras otro en sucesión hasta un cuarto dígito decimal, por ejemplo 0.0001. Wood (1992), citado por Tall (1995), encontró que un número significativo de estudiantes de matemáticas que habían seguido un curso de Análisis creían que esta propiedad aún se mantenía para los decimales infinitos, es decir hay un *primer* número real positivo, es decir “punto, muchos ceros, uno”, o bien 1- 0.999.... Pero a la vez, una minoría significativa de estos estudiantes también podía creer que no existe el número positivo *más pequeño* ya que si tal número fuera *x*, *x/2* también sería positivo y sería más pequeño. Tall subraya el hecho de que *hay* disponible una teoría formal de Análisis no estándar que incluye el concepto de infinitésimo y que es consonante con muchas ideas intuitivas sin ser exactamente lo mismo. Por ejemplo, el decimal finito, con *n* nueves

$$0.999...9 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^{n-1}} = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n}$$

es precisamente $(1/10)^n$ menor que uno, y si *n* se hace infinito, entonces $(1/10)^n$ es un infinitésimo. Así, para *n* infinito, 0.999...9 es una cantidad infinitesimal menor que 1. Sin embargo, desde el punto de vista intuitivo, $0,\widehat{9}$ es normalmente “aquello que está tan cerca de 1 como sea posible”. En términos no estándar no existe tal concepto ya que, evidentemente, $(1/10)^n$ es infinitesimal pero $(1/10)^{n+1}$ es aún más pequeño. Richman (1999) profundiza aún más en el análisis de esta cuestión considerando las perspectivas más dispares, desde las propiamente escolares hasta las más formales.

Jirotková y Littler (2003) pretenden encontrar la relación entre la comprensión del infinito y el contexto geométrico ya que los autores consideran que dicho contexto proporciona posibilidades excepcionales y únicas para desarrollar la comprensión del concepto de infinito y de los procesos infinitos. La investigación se llevó a cabo en dos etapas; en la primera de ellas se plantearon algunas tareas a resolver y en la segunda se realizaron entrevistas individuales. A los estudiantes no se les informó sobre el tema de la investigación con el fin de que sus referencias al infinito fueran espontáneas. Inicialmente se planteó la siguiente cuestión: *Intenta definir con tus propias* *palabras el concepto de línea recta*. Posteriormente se plantearon otras tareas con el fin de desarrollar las ideas de los estudiantes; dos de estas tareas fueron:

> *Tarea 2*: Observa las siguientes afirmaciones y decide cuál de los dos estudiantes tiene razón:
> A: *Una línea recta tiene dos "infinitos". Si voy en una dirección alcanzaré el infinito. Si voy en la dirección opuesta también alcanzaré el infinito.*
> B: *Esos dos "infinitos" son los mismos, sólo hay un infinito sobre una línea recta; es el lugar donde se juntan ambos extremos como en un círculo.*
>
> *Tarea 3*: *Dada un línea recta* b *y un punto* A *exterior a* b*, considérense todos los cuadrados* ABCD *cuyo vértice* B *se encuentre sobre la línea* b*. Dibuja un cuadrado* ABCD *con:* a) *el área más pequeña posible,* b) *el área más grande posible. Dibuja las diagonales* AC *y* BD *y marca el centro del cuadrado. Si no tienes suficiente sitio en tu papel, marca un cierto punto y dibuja flechas para indicar la dirección en la que se hallaría.*

Ficha técnica (Jirotková y Littler, 2003)

- *Muestra:* 174 sujetos (universitarios)
- *Cuestionario:* 3 ítems
- *Duración:* No se indica
- *Otras características metodológicas:* análisis cualitativo; entrevistas

De las respuestas recogidas se seleccionaron aquellas que hacían uso de palabras tales como "infinito", "fin", "sin fin", "nunca termina", "punto final", etc. Tales respuestas se desdoblaron en ideas simples que las autoras denominaron *afirmaciones*, de las que se obtuvieron 92 diferentes: "es un segmento de longitud infinita", "no tiene ni principio ni fin", "ambos son infinitos", "círculo de radio infinito", etc. Las afirmaciones con un significado similar se agruparon en lo que se denominó *frase*. Por ejemplo, la frase "un conjunto infinito de puntos" representaba diversas afirmaciones como "unir infinitos puntos", "conjunto no finito de puntos ordenado linealmente", "una cantidad infinita de puntos", etc. Así se obtuvieron 26 frases diferentes. En una segunda fase se agruparon las frases de manera no matemática sino por su aspecto gramatical. En un grupo se clasificaron todas las frases en las que el infinito se utilizaba como un *nombre*, como si el autor aceptase la existencia del infinito. En un segundo grupo aquellas en que el infinito expresaba un *adjetivo* o *adverbio* lo cual no indica directamente la existencia del infinito sino una propiedad de la línea recta. Y, en el tercer grupo, dicha propiedad se expresaba implícitamente, formulándola como lo opuesto a finitud o la ausencia de finitud. En la tercera fase del análisis se interpretaron las frases de los estudiantes más allá de lo que ellos eran capaces de expresar, conscientes de que las imágenes de los estudiantes del concepto de infinito podrían ser vagas y difusas y que podrían carecer de la habilidad necesaria para articular sus imágenes. Por último, las entrevistas se realizaron con estudiantes que presentaban contradicciones o inconsistencias en sus respuestas escritas, con el fin de observar si esto se debía a errores conceptuales sobre el infinito o bien a la carencia de habilidades comunicativas. En un trabajo posterior, Jirotková y Littler (2004) llevan a cabo un estudio sobre el concepto de infinito planteando a los estudiantes una serie de tareas, véase *Apéndice II*, la mayor parte de ellas bajo un contexto geométrico. El análisis de las respuestas tenía como objetivos el conseguir una explicación del mecanismo de creación de las imágenes de los estudiantes y encontrar una herramienta adecuada para desarrollar posteriormente otras imágenes.

Ficha técnica (Jirotková y Littler, 2004)

- *Muestra:* 98 sujetos (de 11 a 15 años)
- *Cuestionario:* 7 ítems
- *Duración:* Entre 20 y 30 minutos (sin limitación previa)
- *Otras características metodológicas:* No constan

Los autores no están de acuerdo con la opinión generalizada entre el profesorado de que los estudiantes que tienen un enfoque diferente de algún concepto están equivocados. No es posible explicar un concepto abstracto como infinito en un tiempo breve; la comprensión se tiene que desarrollar en un largo periodo en la red cognitiva del estudiante. Por otra parte, hay evidencias que demuestran que el enfoque de un estudiante sobre el infinito difiere según el contexto en el que se exprese (Monaghan, 2001), por lo tanto no podemos decir que la comprensión de los estudiantes es incorrecta. Los estudiantes se encuentran en un determinado estadio de desarrollo de su comprensión; esto implica que tenemos que pensar qué otras experiencias deberíamos proporcionar para que la red cognitiva de estos estudiantes alcance una mayor calidad. Por último, los autores no han constatado la estabilidad de la intuición del infinito encontrada por Fischbein et al. (1979). Como propuesta de trabajo, los autores plantean construir el concepto de infinito introduciéndolo bajo diferentes contextos y resolviendo las contradicciones que surgen como consecuencia de ello.

3.4. CARDINALIDAD Y EQUIVALENCIA DE CONJUNTOS: INFINITO ACTUAL.

3.4.1. SIGNIFICADO E INTERPRETACIONES.

Dentro de aquellos trabajos que abordan la comparación de conjuntos infinitos, podemos hallar algunos que se interesan, en particular, por la interpretación que el sujeto hace de los términos utilizados en los enunciados que se plantean. Esto conlleva un análisis de la influencia que supone dicha terminología en las respuestas así como una categorización de los diferentes significados otorgados desde la perspectiva del estudiante.

En Monaghan (2001) el infinito es entendido, en las respuestas a cuestiones sobre cardinalidad, como un objeto; así, por ejemplo, 147 de 190 sujetos respondieron afirmativamente a la cuestión *¿podemos pensar en 1, 2, 3,.... como un conjunto único?* Un conjunto como una unidad puede interpretarse como un objeto y ninguno de los estudiantes entrevistados en este estudio pareció tener dificultades para hablar sobre el número de elementos de un conjunto infinito. Por otra parte, el 31% consideraba el infinito como un número enorme y, por último, cuando se requería la comparación de conjuntos con un número infinito de elementos sólo un pequeño número de estudiantes no hizo comparaciones tales como "hay más en..." o "igual en ambos". No obstante, en entrevistas posteriores, muchos de estos alumnos reconocieron que cuando en tales respuestas pensaban en un "número" no se referían a algo concreto o bien que lo hacían para simplificar las cosas. Para Monaghan, los contextos de cálculo se encuentran asociados a situaciones discretas mientras que los contextos de medida están normalmente asociados a situaciones continuas. Es posible que un contexto de medida conduzca a una ordenación de infinitos, pero de nuevo debemos tener cuidado de no sobreinterpretar los pensamientos de los estudiantes. En la tabla II del Apéndice II se puede observar que las cuestiones sobre medida inducen a una respuesta del tipo "mayor" apoyando la afirmación recogida por Tall de que una línea n veces más larga tendrá n veces más puntos, aunque quizá esto sólo describa una posible tendencia de los estudiantes de más edad. Una hipótesis alternativa es que un contexto de medida anima más al uso del argumento "lo que vale para casos finitos vale también para casos infinitos" como criterio de evaluación. El uso de dicho esquema al comparar [0, 1] y [0, 10], por ejemplo para 0.1, 0.2, 0.3,…, procedería de la observación de que el segundo intervalo tiene diez veces más números que el primero en el caso finito lo que llevaría a establecer que esto mismo ocurre en el caso infinito. Por su parte, la distinción entre contexto estático y dinámico depende de cómo interprete el estudiante la cuestión; si se sugiere un proceso indefinido, en particular uno que suponga movimiento en algún sentido, entonces diremos que se trata de un contexto dinámico. Los contextos estáticos no evocan un sentido de "llegar a"[13]. Detrás de las interpretaciones dinámicas de los fenómenos infinitos se encuentra la idea del infinito como proceso. Pero los contextos dinámicos son menos generales que el infinito como proceso; como ilustración consideremos la cuestión sobre el cardinal de {1, 2, 3, 4,...} y el de {2, 4, 6, 8,...}; la respuesta dominante es "hay los mismos en ambos conjuntos". Pero las entrevistas revelaron que la razón principal para dar esta respuesta era la consideración del infinito como un proceso aunque la cuestión no se interpretaba generalmente de una manera particularmente dinámica.

Ficha técnica (Sierpinska, 1989)

- *Muestra:* 16 sujetos (de 10, 11, 12 y 14 años)
- *Cuestionario:* 7 ítems
- *Duración:* no se indica
- *Otras características metodológicas:* estudio de casos; cuatro sujetos por cada grupo de edad que divididos en parejas discutieron verbalmente las cuestiones guiados por el entrevistador.

Sierpinska et al. (1989) estudia las condiciones en las que algunas concepciones de los estudiantes sobre el infinito se convierten en obstáculos al pasar del estadio de las operaciones concretas a las operaciones formales. El hecho de que, como indican Piaget e Inhelder, Fischbein y otros autores, en el estadio de las operaciones concretas los niños sean incapaces de comprender la naturaleza infinita de la división continua de una figura geométrica no significa, sin embargo, que no desarrollen concepciones menos sofisticadas del infinito tales como "muy grande", "número indeterminado",... lo que, por otra parte, también ocurre en muchos estudiantes de más edad. La autora utiliza como contexto de las entrevistas la equipotencia de conjuntos y estudia la reacción de los estudiantes a la hora de aceptar una correspondencia uno a uno entre los elementos de dos conjuntos infinitos como criterio para "tener" los mismos elementos. No hace uso de la expresión "conjuntos equipotentes" con el fin de evitar la sugerencia de que "hay tantos elementos en A como en B si el número de sus elementos es igual". La elección de este contexto se justifica por el hecho de que para utilizar y aceptar el criterio de equipotencia uno debe ser capaz de razonar contra sus propias intuiciones. Para Sierpinska, ciertas creencias sobre el infinito y ciertas actitudes hacia las matemáticas pueden funcionar como obstáculos a la hora de aceptar dicho criterio para comparar conjuntos infinitos. Si se acepta el criterio sin dificultad y se utiliza consistentemente es posible que se puedan superar estos obstáculos. No obstante, esto es improbable que ocurra entre los 10 y los 14 años, lo que significa que estos obstáculos aún no se han construido. El objetivo del trabajo es observar en qué

13. Para entender que esto se trata de una cuestión de interpretación consideremos la siguiente cuestión: *¿Qué es* $\frac{1}{1-0.\widehat{9}}$? Una respuesta en un contexto estático podría ser "$1 - 0.\widehat{9}$ es infinitamente pequeño, por lo que su inverso es infinitamente grande". Y una respuesta propia de un contexto dinámico podría ser: "$\frac{1}{0.1} = 10$, $\frac{1}{0.01} = 100$,..., luego el resultado es infinitamente grande".

condiciones deja de ser aceptable para los estudiantes el criterio de la correspondencia uno a uno. En la entrevista se sugería la siguiente definición:

> Un conjunto tiene tantos elementos como otro si los elementos de ambos conjuntos pueden ser emparejados, es decir, si cada elemento del primero de estos conjuntos tiene una pareja en el segundo y cada elemento del segundo tiene una pareja en el primero.

La sugerencia se acompaño con colecciones de fichas verdes y amarillas, preguntándoles *cómo se podía comprobar que había tantas fichas verdes como amarillas*. Se comenzó con conjuntos pequeños de fichas y se fueron aumentando hasta que los estudintes decidieron el emparejamiento. Entonces se negoció una definición. En cuestiones sucesivas se presentaron los dibujos de la figura 1 siguiente y se preguntó *si hay tantos puntos en una línea como en otra*. Así mismo, se les planteó la cuestión de la equivalencia entre los números naturales y los números pares. Las respuestas a la comparación de los dos segmentos iguales variaron desde la dependencia del espesor de los puntos hasta la imposibilidad de contarlos realmente, llegando incluso a considerar la opción de emparejar los puntos, en cuyo caso se dio una respuesta condicionada a un final eventual. Los principales problemas en las cuestiones geométricas anteriores fueron las nociones de punto y segmento. También en la comparación entre naturales y pares se inclinan por el orden "intuitivo" entre ambos conjuntos y dudan notablemente de la validez de la correspondencia uno a uno para establecer la equivalencia. Los resultados de este trabajo permiten a la autora establecer, entre otras, las siguientes conjeturas:

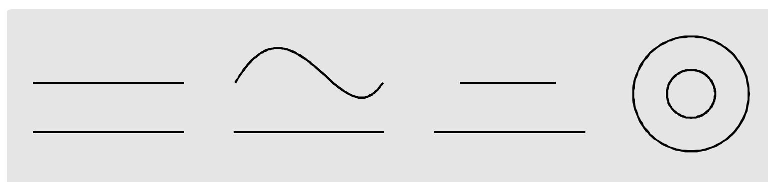


Fig. 1: comparación de conjuntos geométricos

- Las concepciones "concretas" de objetos matemáticos no inhiben la capacidad de efectuar razonamientos deductivos precisos basados en hipótesis no necesariamente acordes con sus propias intuiciones.
- Una razón para ello puede ser que, en el estadio de las operaciones concretas, estas intuiciones son muy superficiales, no necesitan llegar a las dificultades conceptuales profundas inherentes a un concepto matemático como, por ejemplo, el de densidad o el de continuidad que se discutieron con los estudiantes; de hecho, los sujetos más jóvenes no aprecian la dificultad.
- Otro inconveniente puede ser que estas intuiciones no están vinculadas con las emociones. Un niño de 10 años está emocionalmente abierto a un cambio de concepciones: acaba de comenzar a organizar su conocimiento y acepta la enseñanza de los adultos. A medida que madura la personalidad, el sujeto comienza a identificarse con su propio conocimiento, comienza a identificar sus propios puntos de vista y una intuición puede convertirse en una convicción o una creencia. Ahora, ya ligado a fuertes emociones, comienza a funcionar como un obstáculo, lo que puede explicar la resistencia de algunos estudiantes a las soluciones teóricas propuestas. Existe un vínculo entre la madurez de la personalidad y la constitución de concepciones en obstáculos.
- La dificultad para superar los obstáculos de un individuo puede vincularse también con las concepciones "duales" de los objetos matemáticos en "ideas" y "representaciones", y con la

actitud operacional hacia las matemáticas que caracteriza el periodo de transición entre los estadios de operaciones concretas y formales.

Falk (1994) pidió a 103 estudiantes de Psicología y Educación, que no habían cursado matemáticas en sus estudios previos a la universidad, que eligiesen entre estas dos afirmaciones:

1. Hay más números naturales que números pares ya que el conjunto de los números pares forma parte del conjunto de los números naturales y existen algunos números naturales tales como 1, 3, 5, etc. que no son pares:

$$1 \quad \underline{2} \quad 3 \quad \underline{4} \quad 5 \quad \underline{6} \quad 7 \quad \underline{8} \quad 9 \quad \cdots$$

2. Hay tantos números naturales como números pares porque podemos establecer una correspondencia uno a uno entre ellos:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \end{array}$$

El 55% de los sujetos se inclinó por la primera afirmación de los que sólo un 19% explicó su elección y el resto por la segunda, de los cuales el 39% explicó su opción, lo que se puede relacionar con el grado de confianza de los estudiantes en sus respuestas. La relación cuantitativa de que el todo es mayor que sus partes se adquiere en torno a los 7 u 8 años; sustituir este aprendizaje por la correspondencia uno a uno como criterio para decidir la equipotencia de conjuntos es un paso importante en el proceso de extender formalmente el concepto de número al de cardinal de un conjunto infinito.

Por otra parte, la autora recupera los principios de *conservación* establecidos por Piaget para cualquier concepto y sugiere que, paradójicamente, en el paso de la finitud a los números transfinitos uno tiene que arreglárselas con un tipo de conservación mucho más extremo ya que es preciso comprender que el cardinal de un conjunto infinito permanece *invariante* ante la *suma*, o *substracción* al conjunto de un número finito de elementos e incluso a veces de un número infinito de elementos. Esto puede parecer una herejía, ya que la “conservación” implica que no se añade ni se substrae nada. Sin embargo, en el “mundo del infinito” la cardinalidad se conserva a pesar de tener diferente número de elementos, lo que indudablemente es susceptible de serias consideraciones sicológicas.

Ficha técnica (Penalva, 1996[1])

- *Muestra:* 10 sujetos (universitarios, licenciados y profesores)
- *Entrevista:* estructurada (4 ítems para profesores + 17 ítems para estudiantes)
- *Duración:* 45 minutos
- *Otras características metodológicas:* investigación de tipo cualitativo; elaboración de mapas cognitivos; análisis epistemológico de las respuestas y análisis de protocolos.

En su tesis doctoral, Penalva (1996) se propone estudiar las concepciones de estudiantes universitarios y licenciados en torno al “número cardinal de un conjunto infinito”, así como analizar la evolución de esas concepciones bajo la interacción surgida a través del intercambio de información producida durante una situación clínica de enseñanza. Para la autora los conceptos en matemáticas tienen un *significado público*, más general, que viene dado normalmente por la definición del concepto. Pero por otra parte, los procesos de construcción del significado y uso del concepto de número cardinal de un conjunto infinito que cada persona desarrolla a partir de actos de comprensión constituyen un *significado personal* o *privado*. Esta doble característica del concepto matemático nos lleva a enmarcarlo en dos vertientes. Por un lado, se han de considerar sus elementos históricos que permitirán determinar su carácter público y que contribuyen al conocimiento de los conceptos, métodos y resultados validados por la comunidad matemática, así como de los cambios conceptuales que han potenciado el desarrollo del conocimiento matemático a lo largo del tiempo[14]. Y, por otro lado, los trabajos de Conferí (1981) y Sierpinska (1990, 1994) que cita la autora proporcionan un marco que permite establecer relaciones entre el conocimiento público y el privado. Los aspectos teóricos que se abordan en las entrevistas de este trabajo son:

- Noción de infinito: contextos con los que lo relaciona el sujeto, situaciones en que utiliza la palabra infinito y palabras asociadas a infinito.
- Conjunto infinito: ejemplos de conjuntos infinitos y propiedades que los caracterizan.
- Comparación de conjuntos infinitos: criterios de comparación utilizados.
- Número cardinal de un conjunto infinito: equipotencia de conjuntos.

La autora ha encontrado que las principales dificultades de comprensión de los estudiantes relativas a conjuntos infinitos se pueden clasificar en dos grupos: *dificultades lingüísticas* y *dificultades conceptuales*, ya que cuando el estudiante construye su conocimiento necesita dar significado a las palabras que está utilizando y muchas veces el significado que está manejando es ambiguo, incompleto o erróneo. Es de interés reseñar el catálogo establecido de tales dificultades:

Dificultades lingüísticas	o *Dificultades de comprensión debidas al significado* que se le asigna a determinados términos en el lenguaje usual: ▪ Infinito (sin fin, muy grande, …) ▪ Comparar, asociar, relacionar, clasificar (en el sentido de analizar las características “internas” de los conjuntos, sin necesidad de utilizar recursos “externos”) ▪ Ampliación ▪ Expresiones lingüísticas utilizadas cuando se formulan las preguntas; la forma de los enunciados condiciona la respuesta. o *Dificultades de comprensión debidas a los símbolos*: ▪ Expresión de los números reales (no es única) ▪ Uso de modelos abstractos: expresiones algebraicas, fórmulas, etc. o *Dificultades de comprensión debidas a las representaciones gráficas*: ▪ La imagen mental de aplicación está asociada a conjuntos finitos. ▪ La representación gráfica de los conjuntos infinitos: dificultad de comparación al no poderse representar mediante diagramas sagitales. o *Dificultades de comprensión debidas a la secuenciación de contenidos y a los ejemplos utilizados:* ▪ Relación infinito-conjunto infinito. No existe una relación formal conceptual jerárquica entre ambas nociones. El sujeto no progresa de la noción de infinito a la de conjunto infinito. ▪ Los conjuntos infinitos que se presentan suelen ser $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,… No hay riqueza ni variedad en los ejemplos.
Dificultades conceptuales	o *Dificultades de comprensión debidas a conceptos*: ▪ Conjuntos ordenados: primer y último elemento; extremos (cotas) ▪ Número infinito ▪ Dimensión (geométrica, algebraica) ▪ Conjuntos infinitos en contextos geométricos ▪ Conjunto de los números irracionales: no hay diferencia entre *recta real* y *recta racional*. o *Dificultades de comprensión debidas a la definición utilizada*: ▪ Conjunto infinito (como negación de conjunto finito) o *Dificultades de comprensión debidas a creencias erróneas del profesor*, con relación a suponer conocimientos ya adquiridos en el alumno

14. También Sbaragli (2004) se refiere al significado “personal” y al significado “institucional” de un concepto basándose en Chevallard (1992), Godino y Batanero (1994), D’Amore (2001 y 2003).

Por otra parte, otros resultados hallados en esta investigación nos indican que, para los sujetos analizados, los conjuntos infinitos son considerados numerables, presentan una operatividad propia y son todos equipotentes. Así mismo, se ha recogido la existencia de tres tipos de infinito: conjunto infinito numérico no denso en $\mathbb{R}$, conjunto infinito numérico denso en $\mathbb{R}$ y conjunto infinito geométrico continuo. También han distinguido algunos sujetos entre infinito numerable, al que se le asocia el número $\aleph_0$, e infinito no numerable. Todas estas categorías se pueden comparar con las obtenidas en otros trabajos y también en la presente tesis:

- Infinito físico: en la Naturaleza existen entidades infinitas
- Infinito potencial: el infinito se considera un proceso ilimitado
- Infinito actual: todos los conjuntos infinitos son "iguales", no existen jerarquías. Es decir, la clasificación de conjuntos en finitos e infinitos no admite más subdivisiones
- Jerarquía de Cantor: existe una infinidad de números cardinales de conjuntos infinitos.

> **Ficha técnica** (Penalva, 1996[2])
>
> - *Muestra:* 6 sujetos (estudiantes universitarios)
> - *Entrevista:* semiestructurada
> - *Duración:* 90 minutos (tiempo máximo)
> - *Otras características metodológicas:* investigación de tipo cualitativo (estudio de casos); elaboración de mapas cognitivos; análisis epistemológico de las respuestas.

En una segunda parte se realizaron entrevistas semiestructuradas con un nuevo grupo de estudiantes. El propósito de estas entrevistas se asemeja a las ya realizadas, esto es, averiguar concepciones y dificultades iniciales de los estudiantes y se diferencia de ellas en el ámbito de referencia: ahora se apoyan en las concepciones y dificultades ya detectadas relativas al concepto de número cardinal de un conjunto infinito. La autora diseña tres tipos de entrevistas; las dos primeras tienen el objetivo de averiguar las ideas de los estudiantes respecto al concepto de infinito actual y la tercera sólo se aplica a aquellos estudiantes con los que parecía necesario insistir más en algún aspecto. Por último, se desarrolla minuciosamente el caso particular de dos sujetos con el fin de elaborar su concepto personal o privado. Del análisis de las respuestas, la autora constata una vez más la presencia de dificultades de comprensión; así, la concepción de "infinito potencial" supone un obstáculo para la comprensión del concepto de "número cardinal de un conjunto infinito" que, a pesar de ello, puede coexistir con otras concepciones que admiten el "infinito actual"; por otra parte, la aplicación biyectiva no es un recurso operativo utilizado para la comparación de conjuntos infinitos, lo que parece deberse al hecho de asociar las aplicaciones biyectivas a los conjuntos finitos. Por otra parte, las representaciones gráficas y el lenguaje cotidiano utilizado para verificar algunas propiedades conjuntistas, como la de inclusión, también suponen una dificultad a la hora de establecer la equipotencia de conjuntos. Así mismo, en las respuestas registradas se reconoció la presencia de dos tipos de conjuntos infinitos numerables y de un infinito no numerable: conjunto equipotente a $\mathbb{N}$, conjunto equipotente a $\mathbb{Z}$ y conjunto equipotente a $\mathbb{R}$, a los que se asocian los números cardinales $\aleph_0$, $\aleph_1$ y $\aleph_2$ respectivamente. También se ha distinguido entre infinito numerable e infinito no numerable, asociándoles los dos primeros números cardinales infinitos.

Por último, la autora identifica algunas de las causas que ocasionan las "zonas de conflicto" basadas en "recursos didácticos" utilizados durante las explicaciones del profesor en determinados momentos de la instrucción matemática. Así, cita como los más representativos definiciones (conjunto infinito como conjunto no finito), representaciones gráficas (diagrama sagital), lenguaje cotidiano utilizado (ampliación), ejemplos (conjuntos numerables, la relación binaria de orden "#", lenguaje matemático tal como $\mathbb{Z} = \{...., -2, -1, 0, 1, 2,...\}$. También apunta que el estudio de los conjuntos finitos no facilita al estudiante la comprensión de los conjuntos infinitos, ya que los conjuntos finitos se sitúan fácilmente en una realidad física que hace que las ideas matemáticas se justifiquen basándose en experiencias y, por tanto, en conocimiento intuitivo. Estas intuiciones se trasladan a los conjuntos infinitos y como están fuertemente arraigadas en el estudiante y poseen un alto grado de credibilidad por parte del sujeto, son generadoras de "explicaciones" que tratan de justificar intuiciones no formales.

Bagni (1997) investiga la idea de infinito mediante el examen de dos tópicos del currículo tradicional de matemáticas en Italia. En primer lugar, la introducción del conjunto infinito de los números primos con la prueba de Euclides[15]. Más del 90% dedujo que el conjunto P es infinito y, también, en torno al 90% consideró que los tres enunciados de la segunda cuestión eran verdaderos. La proposición de Euclides, tal como se presenta, se refiere al infinito potencial y la mayor parte de los estudiantes lo entendieron como una introducción correcta al infinito; por último, un 62% de ellos la consideraron equivalente a la proposición "El conjunto P de los números primos es infinito". Y, en segundo lugar, la introducción del concepto de infinito mediante el de límite utilizando la criba de Erastótenes. Aunque la introducción del conjunto *P* no está directamente relacionada con el infinito de *P*, todos los estudiantes reconocieron que *P* es un conjunto infinito justificándolo algunos de ellos por la presencia de un límite.

Ficha técnica (Bagni, 1997)

- *Muestra:* 24 sujetos (de 16 a 17 años)
- *Cuestionario:* 1 ítem
- *Duración:* 15 minutos

- *Muestra:* 24 sujetos (de 17 a 18 años)
- *Cuestionario:* 1 ítem
- *Duración:* 15 minutos
- *Otras características metodológicas:* no se indican

Dentro del tópico de comparación de conjuntos infinitos, Bagni (1998) recoge el resultado de otra investigación que pone de manifiesto lo que el autor denomina el *error de los subconjuntos infinitos*. El autor plantea a alumnos de 16 a 19 años un cuestionario centrado en algunos conjuntos infinitos tales como

$$I_{\mathbb{N}} = \{x 0 \mathbb{N}:\ 3 \# x \# 10\}; \quad I_{\mathbb{Q}} = \{x 0 \mathbb{Q}:\ 3 \# x \# 10\}; \quad I_{\mathbb{R}} = \{x 0 \mathbb{R}:\ 3 \# x \# 10\}$$

Entre otros resultados se recoge que el 46% de los estudiantes afirman, correctamente, que la cardinalidad de $I_{\mathbb{R}}$ es mayor que la de los otros dos conjuntos, pero un porcentaje relevante del total de los alumnos (33%) justificaron erróneamente tal conclusión al mantener que $I_{\mathbb{N}}$ d $I_{\mathbb{Q}}$ d $I_{\mathbb{R}}$ ya que la cardinalidad de $I_{\mathbb{R}}$ es mayor que la de $I_{\mathbb{N}}$ y la de $I_{\mathbb{Q}}$, aplicando a los conjuntos infinitos consideraciones propias sólo de los conjuntos finitos. No se ha tenido en cuenta que un conjunto infinito se puede poner en correspondencia biunívoca con una parte propia; "el todo es mayor que la parte" que recogió Euclides en sus *Elementos* se vuelve a manifestar una vez más.

---

15. Considérese la proposición de Euclides: *Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos*

1) ¿Qué puedes decir sobre el conjunto de los números primos según esta famosa proposición?
2) ¿Son las siguientes afirmaciones verdaderas o falsas?
   a) El mayor número primo no existe
   b) Para todo *n* 0 $\mathbb{N}$ es posible encontrar un número primo *p* tal que *p* > *n*
   c) El conjunto *P* de los números primos es infinito
3) ¿Cuál de las afirmaciones anteriores, *a), b)* o *c)* elegirías para expresar exactamente la proposición de Euclides

En Turégano (1996) las cuestiones sobre cardinales transfinitos dieron lugar a tres esquemas de respuesta bien definidos. *Los dos conjuntos son infinitos;* este tipo de respuesta se presenta bajo dos tipos de argumentos: o bien *como* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{P}$ *son infinitos, no se puede hacer ninguna afirmación acerca de ellos*, lo que da al infinito un carácter estático; o bien "*los dos conjuntos,* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{P}$*, son iguales*" lo que parece indicar la tendencia que nos llevará eventualmente a que los conjuntos sean infinitos. *Un conjunto es subconjunto propio del otro;* aquí se pueden observar tanto respuestas basadas en argumentos conjuntistas e inclusivos como respuestas que tienden a reflejar la estructura de orden que subyace en los conjuntos comparados. Por último, *los dos conjuntos son equipotentes* lo que lleva implícito el establecimiento de una correspondencia, si bien la expresan de distintas maneras.

3.4.2. INCONSISTENCIAS Y CONFLICTO COGNITIVO.

La investigación de Fischbein giró, como ya hemos visto, en torno a dos ideas fundamentales: la división indefinida y la comparación de conjuntos numéricos o geométricos. Tirosh et al. (1985), en la línea del trabajo anterior, recogen el hecho experimental de las dificultades a las que los estudiantes se enfrentan a la hora de adquirir el concepto de infinito y, en particular, la noción de infinito actual, una de cuyas razones es la existencia de actitudes intuitivas primarias hacia este concepto. Como consecuencia de ello, los autores mantienen que las soluciones intuitivas de problemas que tratan sobre la equivalencia de conjuntos infinitos suelen ser erróneas. Este trabajo de investigación se plantea como objetivos principales identificar los conflictos internos en la comprensión intuitiva de diversos aspectos de la noción de infinito actual e intentar mejorar la comprensión intuitiva de los estudiantes del infinito actual mediante una instrucción sistemática. Los autores describen un programa de enseñanza para alcanzar estos objetivos así como procedimientos para mejorar dichas intuiciones; entre esos procedimientos desarrollan el *enfoque de enseñanza-conflicto cognitivo*, que pretende que los alumnos sean conscientes de sus propios conflictos intuitivos relacionados con la noción de infinito actual con el fin de provocar un estado de desequilibrio interno que resulte adecuado para la creación de nuevos conceptos modificados.

Ficha técnica (Tirosh et al., 1985)

- *Muestra:* 280 sujetos (de 12 a 15 años)
  grupo experimental: 158 / grupo de control: 122
- *Cuestionario:* 16 ítems
- *Duración:* no se indica
- *Otras características metodológicas:* pre-test y post-test, entrevistas personales

Tras la realización del pre-test los autores encontraron que los métodos intuitivos primarios utilizados por los estudiantes se revelaron inadecuados para determinar si dos conjuntos infinitos son equivalentes; así mismo, se puso de manifiesto que los sujetos no son conscientes de la contradicción interna de sus actitudes intuitivas primarias sobre la noción de infinito actual. En nueve de los ítems del cuestionario los dos conjuntos dados eran infinitos no numerables equivalentes de cardinal *c;* mientras que en los otros siete, uno de los conjuntos tenía como cardinal $\aleph_0$ y el otro *c*. Entre las conclusiones más relevantes de esta primera fase, para alumnos de 14 a 15 años, cabe destacar en primer lugar que el principal argumento dado para justificar la equivalencia es que "sólo existe un tipo de infinito, por lo tanto todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos", lo que corresponde con la intuición primaria de entender el infinito como un proceso sin fin como se recoge en Fischbein et al. (1979). En segundo lugar, los alumnos que mantienen la no equivalencia de ambos conjuntos argumentan que “el todo es mayor que la parte”, o que “un conjunto no acotado tiene más elementos que un conjunto acotado”, o bien que “un conjunto bidimensional contiene más elementos que un conjunto lineal”. Por último, en las respuestas a las cuestiones del pre-test y durante la instrucción se identificaron dos *conflictos internos* que podrían explicar las dificultades básicas en la comprensión intuitiva del infinito actual:

- El conflicto entre dos tendencias: la tendencia a considerar que todos los conjuntos infinitos son equivalentes frente a la tendencia a comparar los números cardinales de dos conjuntos de acuerdo con el principio “el todo es mayor que sus partes”.
- El conflicto entre dos afirmaciones: la afirmación intuitivamente aceptable “un subconjunto propio de un conjunto dado tiene un número cardinal más pequeño que el conjunto total” frente a la afirmación formal “todo conjunto infinito tiene un subconjunto propio que tiene el mismo número cardinal”.

También es destacar que más de un ochenta por ciento de los estudiantes fueron inconsistentes en sus respuestas; en parte de las respuestas afirmaban que todos los conjuntos infinitos eran equivalentes mientras que en otras respuestas mantenían que un conjunto infinito tenía un número cardinal menor que otro conjunto infinito.

En el post-test, los porcentajes de respuestas correctas fueron sensiblemente mayores que los del pre-test y los razonamientos utilizados para justificar sus respuestas fueron diferentes de los utilizados en el pre-test. Los argumentos esgrimidos para justificar la equivalencia fueron esencialmente los siguientes: buscar una correspondencia entre ambos conjuntos (en torno a un 50%), utilizar teoremas matemáticos aprendidos durante las lecciones teóricas (un 30 %), establecer una analogía entre el problema dado y otro estudiado en clase (10 %) y hacer uso de argumentos intuitivos primarios relacionados con el concepto de infinito (10%). Mientras que la no equivalencia se justificó mediante los siguientes recursos: probar que uno de los conjuntos era no numerable mientras que el otro era numerable (alrededor de un 80%), hacer uso de una analogía entre el problema dado y otro estudiado en clase (10%) y utilizar técnicas intuitivas primarias (10%). En resumen, un 70% aproximadamente de los estudiantes se hizo consciente de sus propios conflictos intuitivos relacionados con el concepto del infinito actual gracias a la instrucción recibida; estos estudiantes adquirieron las nociones necesarias de teoría de conjuntos y utilizaron sólo los procedimientos adecuados para establecer la equivalencia de conjuntos infinitos. Después de la instrucción sistemática, sobre un 20% de los estudiantes aún se encontraba en un estado de desequilibrio interno respecto al concepto de infinito. Eran capaces de resolver correctamente sólo algunos de los problemas mientras que cometían errores respecto de otros recurriendo a técnicas intuitivas inadecuadas. Por último, aproximadamente un 10% no fue capaz de liberarse de la servidumbre de sus intuiciones primarias, utilizando técnicas intuitivas inadecuadas[16].

En la misma línea del trabajo anterior, Tsamir (1999) mantiene que un curso tradicional de teoría de conjuntos se suele presentar de manera formal con poco o ningún énfasis en las

16. También en Tsamir (1990) y Tirosh (1991) se recogen hasta cinco métodos distintos con los que los estudiantes comparan conjuntos equivalentes: todos los infinitos son “iguales”; los conjuntos infinitos son incomparables; emparejando, es decir, mediante una correspondencia uno a uno; mediante argumentos de inclusión y, por último, considerando los intervalos de un conjunto, es decir, cuando los elementos de dos conjuntos tienen el mismo rango pero intervalos diferentes el conjunto en el que los intervalos son más grandes contiene menos elementos.

tendencias intuitivas de los estudiantes a generalizar los conjuntos finitos a infinitos. La autora describe otro tipo de curso donde sí se tienen en cuenta tales tendencias. Uno de los objetivos principales de este trabajo fue valorar los efectos de tal curso en futuros profesores de matemáticas de secundaria a la hora de comparar conjuntos. La ampliación de conocimientos en la enseñanza mediante procesos de generalización siempre ha supuesto el origen de no pocos problemas y la transición de comparar conjuntos finitos a comparar conjuntos infinitos es un ejemplo de tal extensión. Los estudiantes que no habían seguido ningún curso de teoría de conjuntos compararon intuitivamente el número de elementos de conjuntos infinitos de una manera que sólo era válida para comparar conjuntos finitos. Es decir, en la mayoría de los casos estos estudiantes utilizaron diferentes métodos mientras examinaban cada problema por separado, depreciando las inevitables consecuencias de los resultados incompatibles. Este fenómeno de abordar cada problema como uno nuevo, independientemente, ignorando conexiones y referencias se debe a la *compartimentación* del conocimiento descrita por Vinner (1990), fenómeno que como vemos puede causar inconsistencias. Los dos métodos más frecuentes utilizados por estos estudiantes fueron *infinito = infinito* y la *inclusión*, mientras que la correspondencia uno a uno raramente fue utilizada. Los que siguieron el curso de teoría de conjuntos formal tendieron a identificar la correspondencia uno a uno como el único método preferible para comparar conjuntos infinitos. Y dentro de estos los que siguieron el curso aquí propuesto aún obtuvieron mejores resultados.

Ficha técnica (Tsamir, 1999)

- *Muestra:* 300 sujetos
- *Cuestionario:* 7 ítems
- *Duración:* 90 minutos
- *Otras características metodológicas:* se establecieron tres grupos: uno no siguió ningún curso de teoría de conjuntos, otro siguió un curso formal y el tercero el curso referido en este artículo. Se entrevistaron a diez individuos en cada grupo para ampliar la información obtenida

Tsamir y Tirosh (1999) muestran cómo soluciones incompatibles dadas por estudiantes a un mismo problema bajo diferentes representaciones pueden utilizarse para concienciarles de las inconsistencias de sus razonamientos. En este artículo se hace referencia a un trabajo anterior (Tirosh y Tsamir, 1996) en el que se propuso a 189 estudiantes, de 15 a 18 años, la comparación de conjuntos infinitos. Se observó que la decisión de los estudiantes sobre la equivalencia o no de los conjuntos dados dependía notablemente de las representaciones elegidas para los conjuntos infinitos. Así, una representación numérica horizontal tal como {1, 2, 3,...} y {4, 8, 12, 16,...} daba elevados porcentajes de respuestas tales como *tienen diferente número de elementos*. La mayoría de los sujetos, alrededor de un 70 %, mantenían que estos conjuntos no eran equivalentes y justificaban su postura mediante consideraciones del tipo parte-todo. Por el contrario, una representación geométrica consistente en un dibujo esquemático de los conjuntos dio un elevado porcentaje, en torno al 80 %, de respuestas del tipo “tienen el mismo número de elementos”, acompañadas con justificaciones relacionadas con la correspondencia uno a uno: “cada elemento de uno de los conjuntos puede ser emparejado con otro elemento del otro conjunto”. Así, estos dos modelos de representación provocan diferentes justificaciones y conducen a soluciones contradictorias.

Ficha técnica (Tsamir y Tirosh, 1999)

- *Muestra:* 32 sujetos (estudiantes de educación secundaria)
- *Cuestionario:* 3 ítems
- *Duración:* 40 minutos
- *Otras características metodológicas:* alumnos de rendimiento elevado; enfoque de enseñanza por conflicto cognitivo

Las autoras han utilizado estos resultados para elaborar una actividad sobre conjuntos infinitos con el objetivo de promover en los estudiantes la consciencia de inconsistencias sobre el infinito actual. La actividad se describe en el *Apéndice II* y se basa de nuevo en el enfoque de enseñanza de conflicto cognitivo; es decir, se trata de proporcionar al sujeto diferentes representaciones de la misma tarea y cuando surge el conflicto ante respuestas diferentes el profesor llama la atención del estudiante sobre este hecho y solicita su reflexión y discusión. No se recogen diferencias significativas entre los diferentes niveles educativos, por lo que no se categorizaron los resultados por edad. En una primera parte del cuestionario se les induce a utilizar argumentos del tipo parte-todo; posteriormente se favorecen la respuestas basadas en la correspondencia uno a uno y, finalmente, se les propone confrontar sus propias respuestas en ambas etapas. De los 32 sujetos, 12 argumentaron consistentemente que el número de elementos debe ser igual en ambos, ya que "todos los conjuntos infinitos tienen un número infinito de elementos". Los otros 20 estudiantes dieron respuestas contradictorias; en la primera parte respondieron que ambos conjuntos no eran equivalentes y en la segunda mantuvieron la equivalencia de los conjuntos dados. Tras la confrontación de respuestas, 14 de estos 20 reconocieron la situación contradictoria como inaceptable y los otros 6 la consideraron como legítima. Aquellos 14 dieron posibles soluciones a la situación: las magnitudes infinitas no son comparables, los atributos *igual*, *mayor que* o *menor que* son aplicables sólo a conjuntos finitos, todos los conjuntos infinitos tienen la misma magnitud o bien propusieron argumentos del tipo parte-todo.

Un estudio semejante lleva a cabo Tsamir (2001); ésta muestra cómo la investigación basada en el conocimiento sobre las respuestas incompatibles de los estudiantes frente a diferentes representaciones de la misma cuestión puede utilizarse en la instrucción matemática. Esta actividad de investigación denominada *It's the Same Task* (IST)[17] anima al estudiante a reflexionar sobre su pensamiento en torno a cantidades infinitas y a evitar contradicciones utilizando exclusivamente el criterio de la correspondencia uno a uno para comparar cantidades infinitas. La actividad IST es una herramienta didáctica que consta de tres fases en la que tarjetas con diferentes actividades enfrentan a los estudiantes con diferentes representaciones que provoquen respuestas incompatibles al mismo problema sobre comparación de conjuntos infinitos, como ya se ha descrito anteriormente en la primera versión de IST de Tsamir y Tirosh (1999).

Ficha técnica (Falk y Ben-Lavy, 1989)

- *Muestra:* 38 sujetos de 5 a 13 años / 91 sujetos de 6 a 12 años
- *Cuestionario:* 1 ítem
- *Duración:* no se indica
- *Otras características metodológicas:* se utilizaron tarjetas con diversos conjuntos para compararlos dos a dos; se introduce un índice para cuantificar los resultados

Falk y Ben-Lavy (1989) exploran la habilidad de los niños para distinguir entre conjuntos finitos que ellos consideran muy grandes y el conjunto infinito "más pequeño", es decir, el conjunto de los números naturales. La pregunta base era *¿dónde hay más en X o en Y?*, donde *X* e *Y* son reemplazados por miembros de diferentes conjuntos tales como hojas de todos los árboles de los bosques, pelos en la cabeza de toda la gente, granos de arena sobre la tierra, etc. El conjunto considerado como el mayor en cada pregunta pasaba a ser comparado con otro, y el conjunto "ganador" en dicha sucesión de comparaciones binarias, suponiendo la

18. La IST responde al espíritu de la filosofía de Fischbein: *El estudiante debe ser consciente de sus conflictos mentales tácitos con el fin de llegar a controlar las estructuras conceptuales enseñadas sobre las intuiciones primarias; [···] es esencial crear situaciones didácticas que puedan ayudar a los estudiantes a ser conscientes de tales conflictos.* En esta actividad se utiliza también el enfoque de enseñanza por conflicto cognitivo para promover entre los estudiantes la reflexión sobre las incompatibilidades de sus propias respuestas.

transitividad, era comparado finalmente con el conjunto de todos los números; en todos los casos se pedía una justificación a los sujetos.

En la tabla adjunta se presentan los porcentajes de aquellos sujetos que sabían que hay más números que miembros en el mayor de los conjuntos finitos considerados y sabía porqué. En una segunda experiencia presentada en este trabajo se pretendía comprobar la comprensión de que no sólo hay más números que granos de arena, sino que hay infinitamente más números que objetos en cualquier conjunto finito. Para ello se les proporcionaron tarjetas pequeñas con el nombre de cada conjunto y una cinta, de unos 90 cm., donde pegar por orden cada una de ellas; se solicitó que intentaran respetar cierta proporcionalidad en el salto entre conjuntos sin utilizar términos técnicos y que aportaran una explicación. El objetivo era enfrentar al sujeto a la tarea imposible de situar en dicha cinta la tarjeta del conjunto de los números naturales fuese cual fuese su longitud, ya que si la experiencia acababa en comparar solamente conjuntos podía perderse una información valiosa. Así, en el procedimiento se les indicaba una instrucción más: *si consideras que la cinta no es lo suficientemente larga, indícalo e intenta explicar qué se podría hacer*.

5 a 7 años	29 %
8 a 10 años	72 %
11 a 12 años	83 %

Para analizar los resultados, los autores introducen un índice cuantitativo denominado *razón crítica*, *CR*, para cada sujeto, definido mediante la expresión

$$CR = \frac{m\,(\text{conjunto de los los números naturales}) - m\,(\text{conjunto finito más grande})}{m\,(\text{conjunto finito más grande}) - m\,(\text{conjunto finito más pequeño})}$$

Donde *m* (conjunto) denota la medida en centímetros, leída de izquierda a derecha sobre la cinta, de la localización de la tarjeta correspondiente. *CR* será negativo cuando un sujeto considere que un conjunto finito excede al conjunto de los naturales. Cuando un niño rehúsa situar el conjunto de los naturales aun ofreciéndole un longitud de cinta tan larga como desee, se asigna $CR = 4$. Se ha diferenciado entre $0 < CR < 1$ y $CR > 1$. Este último caso significa que existe al menos una cierta comprensión de que la diferencia entre todos los números y el mayor conjunto finito es mayor que el salto entre dos conjuntos finitos cualesquiera[18]. En los resultados se observa la disminución con la edad de los *CR* negativos; y, por su parte, los porcentajes de actuación mejoran con la edad sólo muy globalmente, siendo la pendiente de progreso muy plana.

Entre las conclusiones más relevantes extraídas de este estudio es de destacar el hecho de que no hay una transición gradual desde los números grandes al infinito; conceptualmente, tiene lugar un salto cualitativo discontinuo y se pone de manifiesto que el camino hacia el infinito no es simple; de hecho, se hubiera podido pensar que comprendían el infinito de los naturales sin sus respuestas sobre la localización de este conjunto. Así, la mayoría de los sujetos más jóvenes piensa que el conjunto de los números naturales es un conjunto finito grande, no necesariamente más grande que otros conjuntos finitos grandes, aun indicando en sus justificaciones que no tienen fin.

18. Observando a los estudiantes y analizando sus comentarios se puso de manifiesto que en la mayoría de los casos no estaban comparando las distancias pedidas en el denominador, sino entre el conjunto finito más grande y el anterior a él. De manera que se corrigió la definición anterior con el fin de que reflejase mejor el proceso de decisión de los sujetos:

$$CR' = \frac{m(\text{conjunto de los números naturales}) - m(\text{conjunto finito más grande})}{m(\text{conjunto finito más grande}) - m(\text{un conjunto finito anterior al más grande})}$$

Si *CR* es negativo o nulo o infinito, también lo es *CR'*. En cualquier otro caso, $CR' > CR$.

Por otra parte, entre los 11 y 12 años sólo del 30 al 40 % mantiene la imposibilidad de localizar el conjunto de los naturales. No se ha recogido el grado de comprensión de aquellos que han situado el conjunto de los naturales al final de la cinta, quizás hayan representado los saltos de manera ordinal. Por último, aquellos otros con un $CR' > 1$ reflejan la ausencia de conflicto ante la finitud de la cinta y el salto sin fin de los naturales.

Ficha técnica (Waldegg, 1996)

- *Muestra:* 95 sujetos (de 15 a 18 años)
- *Cuestionario:* 14 bloques de contenidos con 34 ítems en total
- *Duración:* No se indica
- *Otras características metodológicas:* Todas las preguntas presentan opciones "si", "no" y "no se puede saber" y había respuestas correctas de cada una de las opciones

Waldegg (1996) intenta medir la coherencia de las respuestas de los estudiantes frente al obstáculo epistemológico que supone el establecimiento de una biyección entre un conjunto infinito y una de sus partes propias. La autora refiere en primer lugar un trabajo previo con estudiantes y profesores; las preguntas se referían a la subdivisión infinita de un segmento, los desarrollos decimales infinitos, la continuidad aritmética y las relaciones entre los elementos de dos conjuntos infinitos. De un total de 400 respuestas, un 63 % se catalogaron de *finitistas* y correspondían a argumentos que negaban toda posibilidad de continuar una operación indefinidamente, o que sólo aceptaban consideraciones sobre conjuntos finitos. Los argumentos *infinitistas*, por su parte, se refieren principalmente a un infinito potencial, en el que predomina la idea de un proceso que se puede repetir o continuar indefinidamente; no obstante, este tipo de argumentos se esgrimen tanto para afirmar como para negar una misma proposición. La idea del cuestionario definitivo era partir de las propias concepciones del estudiante y enfrentarlo, en situaciones diversas, a las consecuencias lógicas de dichas concepciones. Para ello, se diseñó un cuestionario de manera que una parte del mismo contenía definiciones y ejemplos a modo de instrucción. Esta parte fue concebida siguiendo las ideas de los alumnos, aunque matemáticamente no fueran exactas. Por ejemplo, contenía la definición: *un conjunto es infinito si se deben utilizar todos los enteros naturales para contar sus elementos o una parte de ellos*. Además, las preguntas estaban agrupadas de acuerdo con distintos contextos, situaciones particulares o generales.

Tras el análisis de las respuestas se recogieron algunos hechos relevantes. En primer lugar, se había supuesto que poder "contar" los elementos de un conjunto era una condición necesaria para que los alumnos pudiesen afirmar que un conjunto es infinito; pero esta condición no fue suficiente. De las respuestas de los estudiantes se induce que los conjuntos deben poseer, además, una "estructura de fila" a fin de que se pueda disponer de un espacio ilimitado para "colocar" los elementos del conjunto. Las preguntas relacionadas con conjuntos así caracterizados como naturales, pares, enteros, etc. obtuvieron los porcentajes de acierto más altos. En cambio los porcentajes para conjuntos acotados, como los puntos de un segmento, cayeron significativamente. Por su parte, las preguntas sobre la posibilidad de establecer una correspondencia uno a uno entre los conjuntos en cuestión variaron en un margen considerable, entre un 33% y un 72%, siendo los porcentajes de acierto sobre equipotencia los más bajos, entre un 11% y un 56%.

Las preguntas del cuestionario se concentran en dos asuntos centrales: decidir si un conjunto es infinito y si dos conjuntos dados son equipotentes. Tras el análisis estadístico, la autora mantiene que hay factores con una fuerte influencia en la comprensión de los conjuntos infinitos:

- No se acepta, en general, que un conjunto acotado, sobre todo si está encuadrado en un contexto geométrico, tenga un número infinito de elementos[19].
- La comparación entre dos conjuntos infinitos se hace aún más difícil si un conjunto es acotado y el otro no. El infinito potencial se convierte en un obstáculo para comparar los dos conjuntos ya que se hace evidente en los conjuntos no acotados, que permiten disponer de las posiciones necesarias para continuar un proceso, pero permanece oculto en los conjuntos acotados, produciendo con ello una parálisis ante el problema.
- Existe un rechazo a usar el criterio de la biyección para comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos propios, aun en el caso de que haya una instrucción al respecto.
- El estudiante posee una serie de intuiciones locales respecto del infinito que aplica según la situación; tales intuiciones son localmente coherentes pero globalmente se contradicen, suponiendo un obstáculo para aceptar los conceptos formales, aunque no todos los estudiantes comparten las mismas intuiciones.

3.4.3. PERSPECTIVA SEMIÓTICA Y EPISTEMOLÓGICA.

En la línea de la comparación de conjuntos, pero desde una perspectiva semiótica, Duval (1983) describe varias experiencias con alumnos de 12 a 14 años a los que se les propone una actividad en la que se enfrentan sucesivamente, primero al argumento de inclusión del conjunto de los cuadrados perfectos y el de los números pares en el conjunto de los naturales y, después, al argumento que muestra la correspondencia término a término entre ambos conjuntos.

En un trabajo de investigación previo del mismo autor, se presentó a alumnos de dichas edades el diálogo de Galileo que plantea algunas de las dificultades de la noción de infinito. Según este texto, tras una primera argumentación se puede afirmar que "*hay más naturales que cuadrados perfectos*", posición que mantiene Simplicio, y tras un segundo planteamiento se puede mantener que "*hay tantos naturales como cuadrados perfectos*", postura que defiende Salviati. Los resultados obtenidos aparecen en la tabla adjunta.

	14 años	13 años	12 años
Hay más naturales que cuadrados (Tras leer la primera parte del texto)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
Hay tanto naturales como cuadrados (Tras leer la segunda parte del texto)	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

Se encontró en todos los niveles, aunque en proporciones diferentes, a alumnos que parecían no tener dificultades en admitir la equipotencia entre ambos conjuntos, a pesar del argumento que resalta la inclusión estricta, alumnos que adoptaron sucesivamente las dos posiciones, pasando de una a otra tras la presentación de los argumentos y, por último, alumnos que rechazaron la equipotencia incluso tras explicitar la correspondencia biyectiva entre ambos conjuntos. Según Duval lo que parece impedir el reconocimiento de una biyección entre un conjunto infinito y un subconjunto propio es que ciertos elementos, tomados desde dos puntos de vista diferentes, parecen intervenir dos veces. Y aquellos que no admiten la separación entre ambos no pueden sino rechazar la posibilidad de una

20. De hecho, como en el caso histórico de Bolzano, la configuración y las dimensiones de las regiones geométricas son un obstáculo para la concepción de los conjuntos de puntos contenidos en ellas.

biyección. Así, el número “4” interviene en una sucesión como el entero “sucesor de 3” y en la otra como el entero “cuadrado de 2”. Se pueden entender estas dos propiedades como *dos objetos distintos* o como *dos atributos de un mismo objeto*, como lo sugieren las verbalizaciones más inmediatas: “4 es un entero, sucesor de 3” y “4 es el cuadrado de 2”. Ambos enunciados se refieren al mismo objeto “4” y le atribuyen dos propiedades. Aquellos que aceptan estas dos propiedades como dos objetos, pueden reconocer fácilmente la biyección:

1	2	3	4	5	. . .
1	4	9	16	25	. . .

Es decir, para Duval, un estudiante que no realice de una manera u otra el desdoblamiento del objeto “número entero” no puede reconocer la posibilidad de la biyección ya que se viola la regla “habitual” de una biyección: una correspondencia sólo es posible entre dos conjuntos de objetos distintos. No se trata simplemente de una dificultad particular de un conjunto infinito con una “parte” de él mismo, sino que el desdoblamiento de un objeto dado, práctica habitual en la identificación de un mismo objeto bajos diversas expresiones o puntos de vista diferentes, constituye un obstáculo con el que una parte de los estudiantes se encuentra en cada nuevo paso del aprendizaje, sintiéndose desorientados por esta exigencia sin ninguna referencia: separar propiedades o características hasta entonces fuertemente asociadas a un mismo objeto, o atribuir denominaciones y representaciones diferentes a un objeto del que se tenía por el mismo. Para ciertos alumnos esto parece tener lugar sin dificultades, para otros crea cierta opacidad en lo que se expresa. El acceso a esta posibilidad de desdoblamiento ilustra, según Duval, de alguna manera el número de obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas a partir de los 12 años, constituyéndose en una peculiaridad del pensamiento formal cuya presencia o desarrollo no detectan las pruebas piagetianas.

El estudio más fino se realizó mediante dos cuestionarios que giraban en torno a la repetición de una misma pregunta bajo dos representaciones diferentes: *¿Hay más/tantos números enteros que/como cuadrados de enteros?* En el primero de ellos se intentaba favorecer una respuesta basada en la propiedad de inclusión a través de una tabla ordenada 10 x 7 con los setenta primeros números naturales en la que debían marcarse los cuadrados perfectos. Y, en la segunda, mediante dos filas de números ilimitadas donde se ponía de manifiesto la correspondencia entre los elementos de cada una se pretendió favorecer la respuesta *equipotente* (ver *Apéndice II*).

Ficha técnica (Duval, 1983)

- *Muestra:* no se indica el número de sujetos (de 12 a 13 años)
- *Cuestionario:* 2 cuestionarios de 6 ítems cada uno
- *Duración:* No se indica
- *Otras características metodológicas:* sujetos voluntarios; discusión verbal entre parejas de sujetos con intervenciones puntuales del investigador

El primer cuestionario reveló que todos los alumnos admitían que la sucesión de los cuadrados es infinita, como $\mathbb{N}$; y, después, tras haber afirmado el carácter infinito de ambas sucesiones, los estudiantes, salvo dos de ellos, no dudaron en responder que hay más enteros que cuadrados de enteros. Frente al segundo cuestionario, todos los alumnos a excepción de uno admitieron que cada entero tiene su cuadrado, lo cual resulta evidente, pero no pasaron de esta afirmación a dar una respuesta que definiese la proporción entre ambos conjuntos. La toma de conciencia de la paradoja resultante de la comparación entre un conjunto infinito y una de sus partes propias no se debió al paso del primer punto de vista al segundo en la comparación de los enteros y sus cuadrados, sino cuando tuvieron que comparar el conjunto de los números naturales y el de los pares. Se puede describir el proceso que tuvo lugar en dos fases:

(1) cada entero tiene un cuadrado	1	2	3	4	. . .		
	9	9	9	9	9	***tener*** *un cuadrado*
	1	4	9	16	. . .		
(2) todos los enteros	1	2	3	. . .			
	8?	8	8		8	***ser*** *un cuadrado*
no son cuadrados de enteros	1	4	9	. . .			

Mientras que la primera fase es trivial, la segunda hace surgir un obstáculo: invirtiendo el sentido del punto de vista, los estudiantes no consiguen ver los elementos del conjunto de llegada como elementos distintos a los del conjunto de partida. Si 4 es en el conjunto final el cuadrado de 2, no deja por ello de ser el entero sucesor de 3. Ahora bien, *3 no es el cuadrado de nada* como indican algunos alumnos. El no desdoblamiento del objeto “número 4” en “entero sucesor de 3” y en “cuadrado de 2” impide ver la biyección. En consecuencia, parece que la inclusión de los pares en los enteros constituye una evidencia más fuerte para los estudiantes que la de los cuadrados en los enteros y que a este nivel la cuestión de una comparación es más provocativa. Sin embargo, la mayor parte de los estudiantes no se acoge a ello en la respuesta inmediata sugerida por la partición en dos mitades de los números enteros en “pares más impares” o “pares y no pares”: “habrá más, dos veces más de enteros que de pares”. Lo que impide a los alumnos reconocer la posibilidad de una biyección es su resistencia a disociar las propiedades “ser un entero”, “ser un cuadrado de un entero”, “ser un número par” como objetos distintos que permiten constituir conjuntos diferentes y, en el contexto del problema planteado, equipotentes.

Los resultados del primer trabajo mostraron una evolución de 12 a 14 años en relación con la proporción de alumnos que reconocían la biyección. Para explicar esta aparente evolución podemos suponer que la proporción de alumnos que se resiste al desdoblamiento ha disminuido o bien que un mayor entrenamiento ha permitido a un número mayor de alumnos apreciar la sucesión de los cuadrados como una sucesión de productos. En este segundo caso, hipótesis hacia la que se inclina Duval, no habría más que un rodeo local del obstáculo de desdoblamiento. Habrá que pensar no tanto en la atenuación de dicho obstáculo sino en una toma de consciencia más neta de la contradicción a la que conduce la comparación entre enteros y cuadrados. Pero el desarrollo y razonamiento matemáticos, según el autor, no exigen solamente una verdadera sensibilidad hacia las posibles contradicciones sino también una cierta aptitud para disociar significados habitualmente atribuidos a un mismo objeto y reconocer la identidad de un mismo objeto en situaciones diferentes.

Moreno y Waldegg (1991) analizan las diferentes etapas históricas en la evolución conceptual del infinito actual, como ya se ha citado en el capítulo 1. Según los autores uno de los conflictos a los que se enfrenta un estudiante cuando comienza a tratar con conjuntos infinitos es aceptar que el todo puede ser igual a una de sus partes cuya raíz se haya en la experiencia cotidiana, en la que evidentemente el todo siempre es mayor que cualquiera de sus partes. Esta experiencia determinará el esquema conceptual que genera el individuo. La extrapolación de ciertas propiedades de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos, conduce a situaciones contradictorias que los estudiantes no siempre son capaces de superar. Tales contradicciones revelan la coherencia, si bien una coherencia local, del esquema conceptual. Para Moreno y Waldegg, una condición, aunque no suficiente, para aceptar la correspondencia biyectiva como un instrumento de comparación entre conjuntos infinitos, se halla en la posibilidad de concebir estos conjuntos infinitos de una manera sintética, lo que fue la piedra angular del enfoque de Bolzano del infinito matemático.

Ficha técnica (Moreno y Waldegg, 1991)

- *Muestra:* 44 sujetos (universitarios de 18 a 20 años)
- *Cuestionario:* 3 cuestionarios de 12, 13 y 2 ítems respectivamente
- *Duración:* No se indica
- *Otras características metodológicas:* análisis cualitativo; cada cuestionario se presentaba en un contexto diferente: aritmético, geométrico y algebraico

La estructura de los tres cuestionarios que se presentan en este trabajo es análoga a la de Duval (1983), que sirvió como modelo (ver *Apéndice II*). En cada uno de los cuestionarios hay un conjunto infinito A, un subconjunto propio infinito B y una correspondencia uno a uno entre sus elementos; A y B son equipotentes en todos los casos. La primera parte de cada cuestionario enfatiza la inclusión de B en A y pretende que los estudiantes efectúen una primera comparación entre estos conjuntos en términos de su numerosidad. En la segunda parte, se muestra la presencia de una biyección mediante el desdoblamiento de los conjuntos implicados y de nuevo se pide una comparación entre ambos. En el primer cuestionario se comparan parejas de conjuntos numéricos: el de los números naturales con sus cuadrados y con el conjunto de los números pares. El segundo cuestionario propone la comparación de conjuntos de puntos en segmentos o regiones del plano. Este segundo cuestionario presenta potencialmente dos factores de conflicto; por una parte, los conjuntos comparados son continuos, lo que significa que los métodos de "contar" utilizados para conjuntos discretos deben modificarse y, por otra, los conjuntos se encuentran en regiones acotadas de la línea o el plano, lo que en sí es un obstáculo para su cuantificación infinita. Se registra, de nuevo, que el contexto geométrico conduce a métodos de razonamiento que son diferentes de los utilizados en un contexto numérico. El tercer cuestionario es una combinación, utilizando el lenguaje algebraico, de los dos contextos anteriores. El cuestionario presupone que el estudiante acepta la correspondencia entre los números reales y los puntos sobre la recta. Entonces se le pide que compare el conjunto de puntos en [0, 1] con el de los puntos en [0, 2], después de establecer una correspondencia dada por la fórmula $y = 2x$. Este nivel de representación permitió a la mayoría de los estudiantes afirmar que ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos, con lo que pueden desaparecer muchos de los obstáculos anteriores.

Los autores recogieron un total de 220 respuestas que se clasificaron según el tipo de argumentos que dieron los estudiantes para apoyar sus respuestas. Éstas estuvieron condicionadas principalmente por las relaciones de inclusión que existen entre los conjuntos; excepto en el tercer cuestionario que propició una cierta independencia del contexto, la mayoría de las respuestas giraron en torno a la relación parte-todo. Se centraron en primer lugar en el carácter infinito de los conjuntos y, después, en la relación de biyección. Más del cuarenta por ciento de los estudiantes consideraron que la comparación de estos conjuntos no es posible debido, en particular, a su naturaleza infinita, en la línea de Bolzano. En el cuestionario geométrico, de las 96 respuestas obtenidas, 56 muestran que las características geométricas de las figuras determinan el "tamaño" de los conjuntos correspondientes sin permitir la posibilidad de establecer la conservación de la cantidad. De nuevo aquí el tipo de representación se convierte en un obstáculo para pasar a un campo más amplio de significado, lo que nos recuerda la posición de Bolzano; pero a diferencia de éste, los estudiantes fueron incapaces de desvincularse de la situación paradójica que aparece aquí y cuando la biyección entre los conjuntos se hace aparente, simplemente ignoran las consecuencias que este hecho implica sobre el cardinal de los conjuntos. A pesar de ello, hay una minoría de estudiantes que parece aceptar la biyección como un criterio adecuado para comparar dos conjuntos. Concluyen los autores apuntando algunos de los aspectos que determinan el paso de un nivel de conceptualización al siguiente y que, en general, no se observó en las respuestas:

- Algunos niveles de representación, por ejemplo el algebraico, parecen facilitar el acceso al estadio inter-objeto mediante una operatividad independiente del significado. Sin embargo, este nivel no resuelve las paradojas, sólo las oculta. Desde el punto de vista de los autores, esta observación abre un campo de experimentación que nos permitiría determinar hasta qué punto los estudiantes pueden aferrarse a sus afirmaciones a pesar de las situaciones paradójicas que se derivan de ellas[20].
- El contexto geométrico, lleno de significado y basado en una verificación empírica, parece impedir o estorbar el acceso a niveles superiores de conceptualización. Esto se confirmó en un estudio posterior, en el que se encontró que a pesar de la instrucción previa sobre conjuntos infinitos, cuando el contexto geométrico aparece, los estudiantes ignoran la instrucción y dan respuestas basadas en sus preconceptos.

3.5. LENGUAJE E INFINITO.

3.5.1. VALOR LINGÜÍSTICO DE LAS DEFINICIONES.

En el capítulo 1 se ha recogido el análisis lingüístico que Moreno y Waldegg (1991) efectúan, en un contexto epistemológico, sobre los papeles que la palabra “infinito” desempeñó en la cultura griega; recordemos que sólo se le daba un sentido adverbial ligado a su carácter de proceso, pues los papeles atributivo y sustantivo se excluyeron por razones filosóficas que rechazaban la existencia ideal o real de “objetos infinitos”.

Falk (1994) aborda algunos tópicos relacionados con el infinito numérico. La autora considera que hay dos niveles a la hora de acercarse a él. El nivel *naïve* implica la observación de la naturaleza indefinida del proceso de contar -infinito potencial- y, más adelante, la de que hay infinitos números -infinito actual-. Por último, el nivel más avanzado tiene que ver con llevar la concepción de infinito a sus conclusiones lógicas. El artículo también contiene una revisión de las investigaciones más relevantes realizadas hasta el momento sobre este tema, así como un breve recorrido histórico del concepto. Dedica un apartado a considerar la importancia de separar el concepto de número de su nombre. De hecho en la competición, considerada en el apartado 3.2.2, de decir el número más grande, algunos niños admiten que “*no se decir un número mayor que un*

20. La diferencia fundamental entre los enfoques de Bolzano y Cantor se puede explicar en términos *del objeto de estudio* y los aspectos donde se centra la atención. Para Bolzano, el foco se hallaba sobre cada uno de los conjuntos infinitos. Las comparaciones se podrían establecer entre conjuntos: habría diferentes “grados” de infinito en un mismo conjunto infinito, aquellos que corresponden a sus diferentes subconjuntos propios infinitos. Bolzano era incapaz de “desdoblar” un conjunto con el fin de comparar el conjunto con su subconjunto porque la esencia propia de la comparación era la inclusión. Así, para Moreno y Waldegg (1991) el trabajo de Bolzano muestra las características del *estadio intra-objeto* del desarrollo histórico del concepto, lo que sólo es posible cuando hay una clara delimitación del objeto de estudio y Bolzano alcanzó este estadio cuando introdujo el concepto de conjunto. Cantor, por otra parte, basó su criterio de comparación en la existencia de una relación biyectiva entre los conjuntos comparados. Queda claro que la introducción de un instrumento externo de comparación sólo podía alcanzarse si se conciben los conjuntos como entes separados, lo que conduce a la detección de las propiedades reflexiva, transitiva y simétrica asociadas con la relación. El foco de atención de Cantor fueron las relaciones que se pueden establecer entre los diferentes conjuntos, lo que es característico del *estadio Inter-objeto* en el desarrollo histórico del concepto.

billón porque no se cuál es su nombre” o bien que “*nunca puedes terminar este juego, siempre puedes añadir más y más números e inventar más nombres para ellos tan largos como desees*”. En el caso del infinito la relación palabra-objeto podría ser más compleja ya que el referente en este caso es un objeto con un status abstracto y puede proporcionar la clave para comprender cómo el desarrollo del niño concibe la infinitud de los números.

Lo que no tiene fin	74,6 %
Lo indeterminado	15,7 %
Lo inconcebible	3,6 %
Otras	4,3 %

Para Turégano (1996), de las imágenes espontáneas asociadas con el infinito, la característica común de las respuestas recogidas se expresa en términos de una negación, “*lo que no tiene fin*”, donde domina la dinámica de un proceso potencialmente infinito; “*lo que no se puede contar*” donde subyace la idea de infinito actual en el sentido de que se admite la existencia de conjuntos con una infinidad de elementos a los que es imposible asociarle un número, tratándose de una concepción estática del infinito que va asociada al cardinal de conjuntos tales como las estrellas del universo, los granos de arena, etc.; y, por último, “*lo que no se alcanza*”, idea que refleja la “limitación humana” ante categorías superiores con referencias al infinito metafísico o teológico más que al matemático. La característica dominante en el esquema conceptual del infinito corresponde a la del infinito potencial. El infinito actual se acepta en mucho menor grado y siempre como algo que involucra una cierta indeterminación. Un mismo estudiante puede dar respuestas de dos o de *las tres categorías*, lo que nos indica que las tres *forman parte de un mismo esquema conceptual* del infinito. Las respuestas a las dos preguntas abiertas reflejaron mejor los aspectos del esquema conceptual más ligados a la intuición. Ningún estudiante pone ejemplos de lo “infinitamente pequeño” de lo que se puede deducir que la intuición del infinito está ligada a las cosas infinitamente grandes. Por último, la autora considera que la definición dada por muchos estudiantes para un conjunto infinito como *aquél en que cada elemento tiene su siguiente* puede ser un obstáculo para reconocer que conjuntos acotados, como un segmento, son conjuntos infinitos.

Ficha técnica (Montoro, 2005)

- *Muestra:* 120 sujetos (universitarios)
- *Cuestionario:* 10 ítems
- *Duración:* No se indica
- *Otras características metodológicas:* análisis factorial

Montoro (2005) se propone estudiar las ideas de alumnos universitarios sobre algunos aspectos básicos de la noción de infinito tales como la posibilidad de obtener una infinidad a partir de combinaciones de un número finito de elementos, la distinción entre *infinito* y *mucho* y entre *infinito* y *todo*. Así mismo pretende estudiar las relaciones entre las ideas de los alumnos sobre estos aspectos con el fin de ver si constituyen explicaciones fragmentadas o presentan cierta consistencia. También se analiza en este trabajo la influencia del tipo de estudios que cursan los sujetos y su rendimiento académico. Participaron en esta experiencia 120 alumnos universitarios de carreras donde las matemáticas tienen una relevancia muy diferente: profesorado de Matemáticas, licenciatura de Biología y profesorado de Educación Física; de todos ellos la mitad estaban matriculados en primer curso y la otra mitad en el último curso de la carrera (véase *Apéndice II*). Respecto a la posibilidad de generar un conjunto infinito de combinaciones a partir de un número finito de elementos la autora encontró una amplia gama de ideas; desde el rechazo a la posibilidad de conjuntos infinitos hasta admitir dicha posibilidad independientemente del número de elementos de partida en el caso de que estos puedan repetirse. Por otra parte, hay un gran número de estudiantes, de Educación Física sobretodo, que identifica *infinito* con *mucho* o *muy grande*, como también se recoge en (Monaghan, 2001). En cuanto a la distinción entre *infinito* y *todo*, el ítem nº 6 del cuestionario presentó una dificultad mayor que las demás. Esta pregunta pone en juego la comparación entre el todo y la parte; la asimilación de *infinito* a *todo* induce a pensar que todos los conjuntos potencialmente infinitos deberían tener el mismo número de elementos y, por lo tanto, no podrían existir distintas colecciones infinitas. En este estudio, los estudiantes que ingresan en la universidad tienden a asociar el infinito matemático con el infinito potencial, una característica de los estudiantes de secundaria e incluso de primaria. Al avanzar en estudios universitarios donde las matemáticas no son relevantes se encuentra la idea de infinito como un número muy grande o enorme. En cambio, en aquellos otros con mayores contenidos matemáticos se observa una transición conceptual respecto a dos aspectos básicos: la existencia de colecciones infinitas y la relación entre infinito y todo.

Ficha técnica (Maurice, 1996)

- *Muestra:* 10 estudiantes de 16 años
- *Cuestionario:* 22 ítems
- *Duración:* No se indica
- *Otras características metodológicas:* entrevista

Mura y Maurice (1997) recogen los resultados de una experiencia previa a esta investigación llevada a cabo por Maurice (1996) en la que se entrevistan a 10 estudiantes de 16 años, antes y después de recibir sus primeras nociones sobre límites. De las 22 cuestiones de la entrevista, en siete de ellas se aludía directamente al concepto de infinito o al símbolo 4. La mayor parte de los sujetos respondieron que 4 designaba bien a todos los números bien a los números positivos solamente. Las autoras concluyen, entre otras cosas, que la idea de infinito como un conjunto de números forma parte de su paisaje mental o, en términos de Tall y Vinner, de su esquema conceptual del infinito. También la mayoría de los estudiantes mantienen que "el infinito es un número indeterminado". En el estudio preliminar se elaboró un cuestionario que comprendía los seis enunciados siguientes sobre los que los sujetos debían declarar su acuerdo o desacuerdo y explicar su respuesta:

1. El infinito es un número muy grande
2. El infinito es un número más grande que todos los demás números
3. El infinito representa el conjunto de todos los números
4. El infinito es un número indeterminado
5. El infinito no es un número
6. El infinito es una variable

Y se añadía una séptima cuestión: ¿Qué es el infinito para ti? El cuestionario se distribuyó a diversos grupos de primer curso de futuros profesores de educación infantil, primaria y secundaria. Las primeras tasas de acuerdo fueron las siguientes:

Enunciado 3: entre el 27 % y el 59 %
Enunciado 4: entre el 48 % y el 79 %
Enunciado 6: entre el 28 % y el 44 %

Con estos resultados las autoras decidieron continuar la investigación con estudiantes más avanzados en su programa; así mismo se observaron algunos defectos del cuestionario: la dificultad principal fue que varios estudiantes interrogados asociaron la palabra "infinito" con conceptos físicos o filosóficos. Con el fin de atenuar este tipo de problemas se elaboró un nuevo cuestionario centrado en el símbolo 4 más que en la palabra "infinito". El cuestionario revisado comenzaba por la cuestión

Según tú, ¿puede el símbolo 4 representar uno o varios números? SI NO NO LO SE

A aquellos que respondían afirmativamente se les pedía que precisaran de qué número o números se trataba; y los que respondía que no se les pedía explicar qué representaba este símbolo. El cuestionario finalizaba con las tres cuestiones siguientes: ¿qué representa el símbolo + 4 para ti?, ¿qué representa el símbolo − 4 para ti? y ¿en qué contextos matemáticos te has encontrado con los símbolos 4, + 4, − 4?

Los cuestionarios se administraron a dos grupos de estudiantes de cursos de didáctica de las matemáticas, futuros profesores de educación infantil, primaria y secundaria. Hasta el momento de realizar el cuestionario habían seguido al menos cuatro cursos de matemáticas en su programa. A la vista de los resultados se obtiene que alrededor de la mitad de las personas que serán profesores de primaria y un cuarto de las que serán profesores de secundaria creen que los símbolos 4, +4, −4 designan conjuntos de números. Las diferencias entre ambos grupos se explican fácilmente ya que el segundo grupo ha seguido más cursos de matemáticas que el primero. Lo que es de reseñar es que la percepción del infinito como un conjunto de números sea tan frecuente en futuros profesores en su segundo año de formación universitaria y aunque esto no responda a una concepción completa del infinito de las personas que han realizado el cuestionario sí que muestra que tal idea forma parte de su esquema conceptual. El cuestionario ha evidenciado el papel de la notación en el origen de este tipo de errores:

Ficha técnica (Mura y Maurice, 1997)

- *Muestra:* estudiantes de Didáctica de las Matemáticas: 47 para enseñanza infantil y primaria y 40 para enseñanza de enseñanza secundaria
- *Cuestionario:* no se indica
- *Duración:* no se indica
- *Otras características metodológicas:* entrevista

- Cuando se explica que (2, +4) significa "todos los números superiores a 2" puede parecer que el signo +4 por sí solo representa a todos esos números.
- Cuando los signos -4 o +4 aparecen tras algunos términos de una sucesión puede interpretarse como "etc.", es decir, literalmente el resto de términos de la sucesión: "como no se pueden escribir todos, se les representa por 4".

Para las autoras, el lenguaje, junto con la notación, puede contribuir también a la formación de la creencia de que el infinito es un conjunto de números. Es fácil, por ejemplo, confundir los adjetivos "infinito" e "indefinido" y pasar de decir "número infinito" a "número indefinido" o "no importa qué número". El parecido morfológico también parece confundir expresiones tales como "el infinito es el conjunto de todos los números" y "el conjunto de todos los números es infinito". El empleo de la palabra "infinito" fuera de contexto también puede originar fenómenos como los estudiados en este trabajo. Por ejemplo, la interpretación del infinito como "todo", "el Universo", puede justificar la afirmación de que "el infinito representa el conjunto de todos los números". También se asocia a veces con un número muy grande o difícilmente calculable, pero finito, tal como el número de estrellas o el de granos de arena. En este sentido, en efecto, el infinito es un número indeterminado, una variable que puede asumir una infinidad de valores. Por último, se ha encontrado la interpretación de infinito como un proceso que no se detiene, como el proceso de contar o el barrido de la recta numérica, lo que también ha llevado a considerar el infinito como el conjunto de todos los números o bien como sinónimo de indeterminación. Las autoras han intentado explicar cómo se originan esas ideas, pero aún queda por explicar por qué estas ideas persisten aún en un segundo curso universitario. Los estudiantes encuentran este concepto en sus primeros aprendizajes: contar, la recta y, un poco más tarde, la infinidad de puntos de un segmento o la densidad de los racionales. Sin embargo, ya sea en primaria, en secundaria, en bachillerato o incluso en diversos cursos universitarios, el infinito no es un objeto explícito de enseñanza. Se utiliza para indicar la naturaleza ilimitada de una recta o una semirrecta, el cardinal de un conjunto infinito o el carácter potencialmente infinito de un proceso. La mayor parte del tiempo sólo se utiliza el infinito potencial y los estudiantes raras veces se enfrentarán a situaciones susceptibles de desestabilizar una construcción errónea con lo que, sin discusiones en clase, fácilmente pasará desapercibida. Estos errores persisten en futuros profesores, por lo que se establecerá un bucle que reproducirá el error indefinidamente.

Ficha técnica (Boero, 2003)

- *Muestra:* 59 sujetos (de 11 a 12 años)
- *Duración:* 1ª Fase (20 a 25 min.); 2ª Fase (35 a 40 min.)
- *Otras características metodológicas:* discusión en clase; dos fases en días diferentes

Boero et al. (2003) recogen el hecho, acreditado en diversas investigaciones, de que lo que los estudiantes dicen sobre el infinito depende tanto de la tarea (aspectos textuales) como del contexto (geométrico o numérico). Incluso parece que tales concepciones de los sujetos están sujetas a cambios si se someten a entornos computacionales. Pero en este trabajo se subraya el hecho de que la mayor parte de las investigaciones se han llevado a cabo mediante aplicación individual de cuestionarios o entrevistas. Se plantean lo autores las siguientes preguntas: ¿cómo podría influir una discusión en clase –dirigida por el profesor- sobre la evolución a corto plazo de las concepciones de los estudiantes sobre el infinito de los números?, ¿existe un paralelismo entre la historia de las matemáticas y las concepciones de jóvenes estudiantes en el sentido de una correlación entre sus concepciones sobre el infinito y su entorno cultural? El objetivo principal de este trabajo es estudiar lo que dicen los estudiantes sobre el infinito de los números teniendo en cuenta tanto el contexto educacional, en particular qué ocurre durante discusiones en clase, como el cultural, en particular referentes a la religión, herramientas tecnológicas disponibles y aprendizaje escolar sobre los números. Hasta el momento de esta experiencia, los estudiantes eran capaces de tratar con números decimales finitos: realizar operaciones con ellos y utilizarlos en actividades de medida. También habían experimentado con el hecho de que 1/3 da como resultado 0.3333.... La secuencia de tareas y el contexto educacional fueron los siguientes:

PRIMERA FASE. *A veces en los últimos meses nos hemos encontrado el problema de cuántos números hay, si finitos o infinitos. Ahora es el momento de comenzar a tratar este problema en profundidad*. La discusión fue seguida de la redacción de un texto individual relacionado con la siguiente cuestión: *¿Qué piensas sobre el problema que hemos discutido?* Al día siguiente 3 ó 4 textos que representaban diferentes posiciones fueron seleccionados, fotocopiados y distribuidos a todos los estudiantes con el fin de que identificaran analogías y diferencias que ellos mismos habían escrito. El objetivo era crear una serie de ideas compartidas para la siguiente fase.

SEGUNDA FASE. *Con el fin de profundizar en el problema que hemos discutido en los últimos días, sería útil responder la siguiente cuestión: ¿Cuántos números hay entre 1 y 2? Intenta dar tu mejor respuesta a esta pregunta*. A continuación se pidió a los estudiantes que redactaran su postura personal, *escribiendo un informe sobre tu posición y motivaciones*. El objetivo era evitar argumentos repetidos con respecto a la primera fase.

Del total de sujetos, 21 cambiaron su posición tras el debate con sus compañeros, 16 de ellos desde una posición "finitista" a una "infinitista" y 5 en sentido contrario; también se observaron cambios desde un punto de vista "cardinal" a otro "secuencial" y viceversa. De cualquier manera la discusión en clase permitió desarrollar posiciones cada vez más precisas y sofisticadas. Se encontraron también ambigüedades en el lenguaje en el sentido descrito por Monaghan (2001); en particular, la frase "no puedo contar todos los números" significaba "no tengo suficiente tiempo para contar todos los números porque hay demasiados" o "no puedo alcanzar el último número". Otra ambigüedad dependía del uso de "infinito" como nombre y como adjetivo, el adjetivo "infinito" se aplicó tanto al número 1.111... como a la sucesión de los números naturales 1, 2, 3,...

Las concepciones de los estudiantes sobre el infinito de los números que hay entre 1 y 2 estuvieron relacionadas a lo largo de las discusiones con argumentos pertenecientes a diferentes dominios culturales. Se pudieron distinguir tres tipos de metáforas:

- Metáforas donde el dominio origen era matemático pero diferente, generalmente geométrico: "Los puntos sobre la recta entre 1 y 2 son finitos ya que cubren sólo una línea corta y lo mismo ocurre con los números entre 1 y 2".
- Metáforas relacionadas con experiencias cotidianas: "¿Qué significa decir que existen infinitos números si no podemos contarlos ya que nos moriríamos?"
- Metáforas directa o indirectamente relacionadas con ideas religiosas como la eternidad, Dios o el alma, etc.: "Los números son infinitos porque el tiempo necesario para contarlos sería infinito como la vida de nuestra alma".

El papel de estas metáforas parece, en algunos casos, que depende de la mera necesidad de superar la ausencia de términos técnicos; en otros casos las utilizan como argumentos plausibles de una hipótesis y, en otros casos, son posiciones de cambio o metateóricas.

El resultado más interesante de este estudio fue la emergencia de un *problema de existencia* del infinito como un asunto relevante para los estudiantes a la hora de aceptar o rechazar la idea de un infinito de números. Este asunto surgió como resultado de la transición en el debate de ¿cuántos números...? a la cuestión ¿pueden existir infinitos números? Los estudiantes se situaron ante el problema de existencia bajo tres perspectivas diferentes:

- La existencia considerada como la posibilidad de "experimentarlo": "No puedo decir si existe un último número: puede ser que no podamos pensar sobre un número mayor, podría no entrar en nuestra mente y, en cualquier caso, un número mayor sería un número inútil si no podemos pensar en él".
- La existencia como una consecuencia interna de la estructura del sistema numérico; esto se ha encontrado frecuentemente relacionado con el enfoque "secuencial" del infinito: "Añadiendo 1 siempre obtenemos un número mayor, pero no podemos alcanzar el último número".

- La existencia como la posibilidad de una realidad independiente e inaccesible, frecuentemente relacionada con una trascendencia religiosa y/o espacio y tiempo ilimitados: "Los números existen, y siempre existieron y existirán aunque no pensemos en ellos; no tienen fin; son como Dios, que ya existía antes de la creación del hombre y el hombre no estaba allí para pensar en él".

Los autores de este trabajo creen que la aparición del problema de existencia se debió a la discusión en clase ya que ésta obligó a los estudiantes a generar argumentos para apoyar o rechazar los que iban surgiendo a lo largo del debate.

Este estudio sugiere que la complejidad de las concepciones de los niños sobre el infinito de los números es mayor de lo que revelan los estudios anteriores y que no sólo deberíamos tratar este problema desde un enfoque de desarrollo individual (Fischbein, 1979 y Monaghan, 2001) y desde una perspectiva de construcción social (Bussi, 1998), sino que también es necesario considerar el entorno cultural y el contrato didáctico.

Ficha técnica (Kim et al., 2005)

- *Muestra:* 8 sujetos (coreanos y norteamericanos): dos de ellos de primaria, dos de secundaria, dos de bachillerato y dos universitarios
- *Cuestionario:* 28 ítems (entrevista)
- *Duración:* entre 30 y 40 minutos
- *Otras características metodológicas:* las cuestiones distinguen entre discurso coloquial y discurso matemático; entrevista audio y videograbada

Kim et al. (2005) investigan el tratamiento que dan los estudiantes a conceptos tales como infinito y límite basándose en un enfoque comunicativo de la cognición. Los autores pretenden dar respuesta, en éste y en próximos trabajos, a preguntas tales como ¿cuáles son las características principales del discurso tanto coloquial como académico de los estudiantes sobre infinito y límite?, ¿cambia este discurso con la edad y la educación?, ¿existen diferencias entre el discurso de nativos estadounidenses y coreanos sobre infinito y límite?, ¿pueden esta diferencias justificarse en términos de diferencias en el uso coloquial de estas palabras en inglés y coreano? Los 29 ítems del cuestionario se organizaron en ocho categorías; las dos primeras categorías pretendían escrutar el *discurso coloquial* de los estudiantes sobre infinito y límite, mientras que el objetivo del resto era investigar el *discurso matemático* correspondiente. En el Apéndice II se pueden ver algunos ejemplos de cuestiones de cada una de las ocho categorías de cuestiones. Entre los resultados obtenidos es de destacar el hecho que todos los estudiantes, incluidos los más jóvenes, son capaces de crear frases con la palabra infinito tanto como adjetivo como sustantivo. No obstante, se observa que en el grupo americano el término "infinito" va asociado al de "cantidad" y se aplica a fenómenos de la vida real que implican magnitudes grandes; por el contrario el grupo coreano crea oraciones en un contexto esencialmente abstracto y matemático. También se encuentra una diferencia ontológica entre ambos grupos a la hora de aplicar la palabra "infinito" a los números; sólo uno de los sujetos americanos se refiere al *tamaño del conjunto* de todos los números mientras que esta acepción no aparece en los estudiantes coreanos. Por otra parte, a la hora de dar una definición de infinito, los estudiantes americanos lo caracterizan mediante expresiones del tipo "continúa siempre", "avanza y crece", "nunca termina" mientras que los estudiantes coreanos intentan especificar la categoría a la que pertenece infinito a partir de propiedades de los números del tipo "es como un número que…" o bien "no es un número porque…". Las diferencias apuntadas podrían explicarse en base a que por ejemplo, en coreano, las palabras matemáticas *infinito* y *conjunto* no aparecen en el lenguaje coloquial y los estudiantes no pueden asociarlas; por el contrario, para los estudiantes americanos el uso coloquial de estas palabras precede al matemático. Los autores mantienen que el discurso coloquial y la familiaridad previa del mismo respecto de ciertos conceptos matemáticos tienen un fuerte impacto en el discurso matemático y, por lo tanto, en su uso posterior a nivel académico.

3.5.2. EL INFINITO CORPOREIZADO.

La línea de investigación abierta por Lakoff y Núñez en torno a la corporeización del infinito aún permanece en un terreno prácticamente teórico y aún no existen estudios exhaustivos ni sistemáticos sobre la aplicación de dicho marco a las peculiaridades del concepto que nos ocupa.

Núñez (1990) realiza una revisión bibliográfica de las investigaciones sobre el infinito y subraya el hecho de que la escasa literatura al respecto está orientada a la didáctica del concepto de infinito en matemáticas y a sus consecuencias pedagógicas y no a la comprensión misma del entendimiento del concepto. El autor mantiene que desde el punto de vista de la psicología cognitiva se pueden identificar dos grandes orientaciones en cuanto a la relación que existe entre el aparato cognitivo del individuo y la estructura teórica de las matemáticas. Para la primera, la estructura teórica matemática es una entidad independiente del aparato cognitivo, preexistente a éste. La manera en que el aparato cognitivo aprehende esta estructura teórica es el objeto de estudio de este enfoque. La matemática *es*, tiene sus leyes, y lo que interesa es estudiar cómo el individuo las descubre y las aprende. Para la segunda orientación, por el contrario, todo concepto matemático es una creación del sistema cognitivo en su interrelación con el medio (naturaleza, sociedad, etc.). De esta manera, el objeto de estudio lo constituyen las características, necesidades y propiedades del aparato cognitivo que hacen posible la creación y la existencia de determinados conceptos matemáticos (por ejemplo, los números, los cuadrados y los puntos). Es este segundo enfoque el que motiva al autor; para éste, desde un punto de vista psicológico deberíamos preguntarnos ¿cuál es la necesidad real de construir un concepto como el infinito?, ¿cómo es que somos capaces de pensar en el infinito?, ¿porqué podemos concebir una noción como esa, crear un concepto como ese?, ¿cuáles son las condiciones que necesitamos para ser capaces de concebir el infinito?, ¿qué tipo de actividad cognitiva funciona cuando estamos pensando en el infinito?

Para Núñez la matemática es concebida como dependiente totalmente de los seres humanos; como emergente a través de un lenguaje configurado históricamente a través de la interacción de seres biológicos que evolucionan en sus medios. Depende, por lo tanto, de la naturaleza misma de los procesos interrelacionados de conceptos enraizados en la experiencia de corporeidad, interacciones sociales y lenguaje. En otras palabras: sin seres humanos no hay matemática; distintos seres biológicos implicarían diferentes “matemáticas”. Por su parte, el espacio consensual depende, entre otros, de la estructura biológica de los sujetos -por ejemplo, en el caso de los niños, de la estructura del sistema nervioso en desarrollo- que participan en el permanente proceso de definición de lo que es el espacio consensual. Este punto es esencial en psicología del desarrollo cognitivo porque el mundo conceptual que emerge de la actividad cognitiva de un niño se basa en un espacio consensual que es fundamentalmente diferente del nuestro, debido a que su neurobiología, su lenguaje, su cognición son fundamentalmente diferentes; por ejemplo, *puntos* como entes sin volumen. El respeto de las condiciones del problema de Zenón por parte de los niños no existe en el espacio consensual que nuestras fisiologías de adulto definen.

Para Núñez (1997) la idea de iteración es un punto de partida interesante para estudiar los procesos cognitivos subyacentes a la noción de infinito. En particular, la subdivisión iterativa constituye un área muy rica para abordar la cuestión de cómo la idea de infinito en lo pequeño emerge en nuestras mentes. Este trabajo gira en torno a una versión de la paradoja de Zenón por medio de entrevistas individuales y no se mencionó la matemática en ningún momento; este trabajo tiene en investigaciones previas (Núñez, 1993 y 1994) su base teórica cuyo enfoque es el de la sicología cognitiva. Además de la edad y el género, se utilizaron como variables el rendimiento académico. El problema se presentó en forma verbal como una pregunta abierta:

Ficha técnica (Núñez, 1997)

- *Muestra:* 32 sujetos (8, 10, 12 y 14 años)
- *Cuestionario:* 1 ítem (entrevista individual)
- *Duración:* No se indica
- *Otras características metodológicas:* no constan

> Imagina que queremos ir desde este lado de la mesa hasta el otro lado. Se nos dice que primero debemos avanzar la mitad del trayecto, en seguida continuar con la mitad de lo que queda, luego con la mitad de lo que queda y así sucesivamente. ¿Llegaremos alguna vez al otro lado de la mesa?

Las respuestas de los sujetos fueron clasificadas en tres grandes categorías: aquellas que dicen que se “llega al destino”, las que dicen que “no se llega” y aquellas otras provenientes de sujetos dubitativos que defendían dos respuestas diferentes, a menudo *contradictorias*. En los cuatro grupos de edad se dieron respuestas de las dos primeras categorías, pero la última categoría sólo se observó en los grupos de mayor edad. En los grupos de edad de 8 y 10 años se apreciaron diferencias en las respuestas de alumnos de bajo y alto rendimiento; en cambio en los grupos de 12 y 14 años no fue significativa esta diferencia. Cerca de dos tercios de los estudiantes de 12 y 14 años dieron respuestas de las formas “tomará mucho tiempo pero llegaremos” o “uno llegará porque al final no podrá avanzar la mitad ya que estará muy cerca”. Se detectaron cambios considerables en las respuestas si la distancia a recorrer era considerablemente mayor que la de la mesa, por ejemplo, la distancia entre Suiza y Suecia. El 25% de los sujetos de 12 y 14 años presentaron argumentos a favor de la idea de que sólo nos aproximaremos al destino, sin alcanzarlo nunca; sólo un sujeto estuvo seguro acerca de la imposibilidad de alcanzar el destino.

Entre las variables consideradas, sólo la edad mostró claras diferencias en los argumentos, excepto para las edades de 12 y 14 años. No se encontraron diferencias por género. La influencia del rendimiento académico sólo fue significativa para los grupos de 8 y 10 años. Los argumentos dados por los alumnos de alto rendimiento a estas edades fueron más analíticos y tendieron a considerar el problema como tal, mientras que aquellos dados por los alumnos de bajo rendimiento tendieron a considerar el problema como algo trivial. El autor reconoce que en numerosos casos el sujeto altera las condiciones del problema de manera que deje de ser paradójico: en cuatro o cinco iteraciones se llega al destino, se cambia el valor de la distancia a recorrer, el proceso se atasca debido a la pequeñez de los pasos, el proceso sólo se aproxima al destino y continúa para siempre. Parece ser que entre las edades de 10 y 12 años emerge una cierta intuición de las iteraciones de tipo convergente y de sus consecuencias, que permanecerá frágil con posterioridad de manera que se verá muy influenciada por contextos figurativos y conceptuales. De acuerdo con las observaciones de Núñez, la subdivisión no parece ser dominada a la edad correspondiente a las operaciones formales, al menos no con la claridad y certeza presentadas en Piaget (1948).

Arzarello et al. (2004) profundizan en el enfoque de la cognición corporeizada del infinito basada en la BMI de Lakoff y Núñez. A partir de algunos resultados de Euler sobre el concepto de función, los autores mantienen que el registro simbólico es la maquinaria que utiliza el álgebra para realizar sumas y productos infinitos. La experiencia referida en este trabajo se realiza con estudiantes de bachillerato y gira en torno a la noción de integral definida y su tratamiento mediante una calculadora científica para obtener una aproximación cada vez mejor del área correspondiente.

3.6. TEORÍA APOE E INFINITO.

En el análisis APOE, para concebir un proceso como algo completo y como una totalidad se requiere encapsular el proceso en un objeto cognitivo sobre el que se desean aplicar una nueva acción. Al debate sobre el concepto de infinito se ha incorporado recientemente el grupo de Dubinsky y su teoría APOE, expuesta en el capítulo 2; la aplicación de dicha teoría al infinito se presenta ampliamente en Dubinsky et al. (2005a, 2005b) donde se proponen explicaciones cognitivas, en el seno de la teoría APOE, y en algunos casos resoluciones de varias dicotomías, paradojas y problemas matemáticos que involucran el concepto de infinito; estas explicaciones se expresan en términos de los mecanismos mentales de interiorización y encapsulación. La primera parte del trabajo se centra en dicotomías y paradojas y la segunda parte discute la noción de un proceso infinito y ciertas cuestiones matemáticas relacionadas con el concepto de infinito. Weller et al. (2004) mantienen que esta teoría puede proporcionar una explicación de cómo los seres humanos conciben el infinito lo que podría suponer un primer paso en el desarrollo de estrategias pedagógicas para intentar ayudar a los estudiantes a comprender y aplicar los tipos de transformaciones requeridas para la solución adecuada de diversos problemas que involucran al infinito.

En el caso de un proceso infinito, el objeto que resulta de la encapsulación trasciende al proceso en el sentido de que no está asociado ni está producido por ningún paso del proceso. Este es uno de los hallazgos principales de un estudio reciente sobre procesos iterativos infinitos realizado por Brown et al. (2008). Los autores han denominado a tal objeto el *objeto trascendente* del proceso. La distinción entre objeto final y trascendente plantea la cuestión de la adecuación de Metáfora Básica del Infinito, de Lakoff y Núñez (2000), como una explicación de cómo la gente conceptualiza la diferencia entre lo finito, incluso lo finito muy grande, y el infinito. Las sutiles diferencias entre el "último objeto" y el "objeto trascendente" pueden explicar por qué parece ser más fácil para un individuo pensar en o aceptar la existencia de un número finito grande y porqué su habilidad para aceptar la existencia de un conjunto actualmente infinito es aparentemente más difícil. Sí esto es así realmente aún no se ha verificado de manera empírica. Los autores indica la posible existencia de tres concepciones: finito pequeño, que puede ser completado física y cognitivamente; finito grande que no puede completarse físicamente pero cuya compleción cognitiva es similar a lo finito pequeño; y el infinito, que no se puede completar físicamente y que cognitivamente se puede completar sólo cuando se realizan ciertas construcciones mentales que no se requieren en el caso finito. Si estas tres distinciones se dan en realidad en la mente de un individuo es un asunto para futuras investigaciones Dubinsky et al. (2005b). Así, APOE sugiere que la interiorización del infinito como un proceso corresponde a la comprensión del infinito potencial mientras que la encapsulación en un objeto corresponde al infinito actual. Un individuo puede pensar sobre procesos iterativos infinitos utilizando la estructura mental de *proceso* descrita por la teoría APOE. En términos de esta teoría, realizar un pequeño número de iteraciones constituye una *acción*. Interiorizando estas acciones un individuo puede utilizar la estructura del *proceso* resultante para imaginar que las acciones se repiten indefinidamente. Esto corresponde al infinito potencial, pero utilizando la estructura mental de proceso, un individuo puede entender el proceso como una totalidad, incluso aunque sea imposible pensar explícitamente sobre cada paso del proceso, y decidir realizar acciones sobre el proceso total. Aquí, la estructura mental de *encapsulación* entra en juego. La encapsulación consiste en transformar el *proces*o en un *objeto* y aplicar la acción deseada, como se puede apreciar en la paradoja de Aquiles y la tortuga. Es importante observar que, dado un proceso infinito, los mecanismos mentales de interiorización y encapsulación nos permiten pensar sobre lo que ocurre una vez que el proceso se ha completado. La objeción de que esto no se puede hacer ya que en realidad nunca se puede realizar un número infinito de pasos, es precisamente lo que la estructura de procesos tiene en cuenta, ya que de hecho no tenemos que realizar todos los pasos, haya una cantidad finita o infinita de los mismos. Desde el punto de vista de APOE, la habilidad para encapsular un proceso iterativo infinito requiere pensar en el infinito actual. Así, los autores mantienen que los seres humanos puede concebir el infinito actual.

Como ya hemos visto anteriormente, algunos investigadores (Cornu, 1991 y Schwarzenberger y Tall, 1978) han demostrado que muchos estudiantes piensan que la igualdad 0,999... = 1 es falsa. Es posible que los estudiantes tengan razón, puede ser que 0,999... no sea lo mismo que 1, al menos cognitivamente. Los matemáticos consideran que 0,999... representa el límite de una sucesión infinita. Sin embargo, la habilidad para pensar en esta expresión de tal manera requiere ciertas construcciones mentales que algunos estudiantes quizás no tienen. En términos de un análisis APOE, se pueden proponer al menos dos explicaciones para esta situación. La primera es que la confusión con este infinito decimal ocurre en aquellos estudiantes que se limitan a pensar en 0,999... como un proceso, como una sucesión infinita de nueves[21], pero conciben el número 1 como un objeto. La diferencia entre las dos concepciones es que un proceso se concibe por el individuo como algo que "se hace" mientras que un objeto se concibe como algo que "es" y sobre lo que se actúa. Un individuo que concibe 0,999... como un proceso puede entender correctamente que 1 no se produce directamente mediante dicho proceso y, sin haber encapsulado el proceso, la concepción del "valor" del infinito decimal carece de significado. Lo que hace que esto sea particularmente difícil es que el número 1 no es un objeto producido en alguno de los pasos del proceso, sino que es el resultado de encapsularlo y así trascender al proceso. Sin embargo, si un individuo puede ver el proceso como una totalidad, y realizar una acción de evaluación sobre la sucesión 0,9, 9,99, 0,999,.... entonces es posible comprender el hecho de que la encapsulación del proceso es el objeto trascendente. Una vez realizada dicha encapsulación, se pueden hacer algunas matemáticas para determinar el valor. Este es igual a 1 porque, una vez que se considera 0,999... como un objeto, es cuestión de comparar dos objetos estáticos, 1 y el objeto que procede de la encapsulación. Es entonces razonable pensar en este último como un número de manera que

21. Esta es la única explicación posible de "..." o frases tales como "y así sucesivamente".

podemos observar que los dos números fijos difieren en valor absoluto en una cantidad menor que cualquier número positivo, es decir esta diferencia sólo puede ser cero. Existe una segunda explicación para aquellos estudiantes que aún no han construido una concepción completa de proceso del decimal infinito. En este caso, no hay una comprensión de todos los pasos del proceso que produce el decimal infinito. Por ejemplo, el estudiante puede concebir 0,999... como una cadena de nueves que es finita pero de longitud indeterminada. En esta situación pueden existir concepciones tales como la de diferencias infinitesimalmente pequeñas sin que exista una situación de conflicto. Los autores reconocen no tener aún datos que apoyen la idea de que los estudiantes son conscientes de la sutil diferencia entre procesos infinitos y los objetos que les trascienden; están elaborando experimentos para confirmar su conjetura.

Otra aplicación de la teoría tiene relación con la compleción de un conjunto infinito. En Brown et al. (2008), se les pidió a matemáticos que describiesen sus concepciones de la potencia del conjunto de los números naturales P ($\mathbb{N}$). Varios de los que respondieron imaginaron un listado de conjuntos de un elemento, conjuntos de dos elementos, conjuntos de tres elementos, etc. Aunque era inmediata la observación de que así no se alcanzarían todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, parece ser la tendencia natural de alguna gente para construir un proceso. Nuestras concepciones del infinito parecen echar sus raíces en procesos subyacentes, aunque no podamos siempre hablar del infinito en términos de estos procesos. Es interesante observar que en casi todas las discusiones sobre procesos infinitos está implicada la iteración. ¿Podría implicar esto que los procesos infinitos son siempre iterativos? Esta aún continúa siendo una cuestión abierta para estos autores. Pero, ¿podemos concebir un proceso infinito como una totalidad? En muchos ejemplos, la solución de un problema matemático requiere transformar algo. Con el fin de transformar algo, el proceso que subyace a su construcción mental debe concebirse estáticamente; es decir, el proceso subyacente debe considerarse como un objeto cognitivo. Antes de que esto ocurra, el proceso debe ser entendido por el individuo como una totalidad sobre la que es posible actuar. En situaciones que requieren la transformación de procesos infinitos, la cuestión que surge es cómo un individuo puede pensar estáticamente en algo que es siempre, al menos en términos temporales, dinámico. Hay razones para creer que percibir un infinito de objetos y acciones sobre ellos como una totalidad es bastante común en el pensamiento matemático. Consideremos la suma de dos funciones definidas sobre un intervalo real. Para concebir tal suma más allá de un simple cálculo de la suma de dos expresiones algebraicas, parece que deberíamos pensar en todos los pares de valores de las dos funciones para el dominio de puntos dado y después imaginar la suma de los dos rangos de valores para cada par. Desde este punto de vista, el individuo podría pensar en dos conjuntos infinitos de números y un conjunto infinito de operaciones a la vez como una totalidad. Este ejemplo y otros muestran la habilidad para concebir procesos infinitos como totalidades completas. De acuerdo con la teoría APOE, ver un proceso como una totalidad completa es un prerrequisito para encapsular el proceso en un objeto cognitivo. Ahora bien, ¿cómo podemos obtener objetos cognitivos a partir de procesos infinitos? En el caso de un proceso finito, se puede obtener un objeto en cada paso del proceso. Terminamos el proceso con un último paso y de esta manera obtenemos un objeto final. Pero este no es el caso de un proceso infinito ya que al no haber un último paso, no hay un “objeto final”. Pensar en procesos infinitos en términos de procesos que tienen un estado final, incluso metafóricamente, puede conducir a ciertos problemas (Schiralli y Sinclair, 2003). Por ejemplo un individuo podría pensar que se produce realmente un objeto final mediante el proceso. Otra posibilidad es que un individuo intentase construir el estado en el infinito mediante mimesis de lo que ocurre con los procesos finitos relacionados.

El cómo uno puede conceptualizar el estado en el infinito y su relación con los procesos que lo originan, o que al menos le preceden, se encuentra en la historia. Así, Nicolás de Cusa, al considerar una sucesión infinita de polígonos equiláteros inscritos en un círculo, observó que aumentando el número de lados podía reducir el error pero nunca alcanzar el círculo. Galileo tras reconocer que no hay final para la subdivisión, propuso un método para "separar y resolver todo el infinito de un golpe". Desde el punto de vista de los autores, esta "resolución de todo el infinito de un golpe" corresponde a la noción de encapsulación de APOE. Como Galileo sugiere, el objeto que resulta de "un simple golpe" no se produce en un paso individual, sino que transciende y se sitúa fuera del proceso. La cuestión de determinar el estado en el infinito viene motivada por la necesidad o el deseo del individuo de realizar una acción que puede equivaler a determinar "¿Cuál es el siguiente? o "¿Cuál es el último resultado? Antes de realizar esta acción, los autores sugieren que un individuo necesita ver el proceso infinito como una totalidad completa, tras lo cual puede realizar una acción sobre el proceso encapsulándola para obtener el estado en el infinito. Para llevar a cabo la encapsulación, el individuo necesita observar que el estado en el infinito no se produce directamente en un paso arbitrario del proceso. En su lugar, mientras el individuo reflexiona sobre el proceso, observa que el objeto asociado con el estado en el infinito refleja la totalidad del proceso más que cualquiera de sus aspectos individuales. Este objeto se obtiene mediante encapsulación, es decir el "simple golpe" de Galileo. Es en este sentido en el que el estado en el infinito se sitúa aparte del proceso y le trasciende. Por ejemplo, el proceso infinito más simple consiste en contar, comenzando en 1 y añadiendo en cada paso una unidad para obtener 1, 2, 3,... Este proceso conduce a la construcción de una sucesión de conjuntos: {1}, {1, 2}, {1, 2, 3},... y la encapsulación de este proceso dará lugar al objeto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3,...\}$, el conjunto de los números naturales[22].

Brown et al. (2008) han publicado el primer estudio empírico, en el seno de la teoría APOE, con el fin de averiguar si dicha teoría puede describir adecuadamente las construcciones mentales que los estudiantes establecen para responder a situaciones matemáticas que impliquen el infinito actual. Introducen para ello las expresiones "iterar a través del conjunto de los números naturales" y "proceso iterativo infinito". Para Dubinsky et al. (2005) el infinito potencial y el actual representan dos conceptualizaciones diferentes vinculadas por el mecanismo mental de la encapsulación. La encapsulación se da con frecuencia tras el esfuerzo de determinar el "estado en el infinito" de un proceso infinito. A los estudiantes se les planteó la siguiente tarea para casa:

Para cada entero positivo n, sea $X_n = \{1,\ldots, n\}$ y denotemos con $P(X_n)$ el conjunto de las partes de X_n, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de X_n. Prueba si se cumple que $\bigcup_{n=1}^{\infty} P(X_n) = P(N)$

Los estudiantes construyeron la sucesión de conjuntos como una forma para comprender la unión infinita de manera que identificaron el estado en el infinito para este proceso con la unión

22. Los autores abordan la construcción de los números naturales y el pensamiento de los estudiantes mediante el *problema de las bolas de tenis***:** supongamos que ponemos dos bolas de tenis numeradas 1 y 2 en una urna A y pasamos la bola 1 a una urna B; tras esto colocamos las bolas 3 y 4 en la urna A y pasamos la bola 2 a la urna B; después introducimos las bolas 5 y 6 en la urna A y pasamos la bola 3 a la urna B, y así sucesivamente; ¿cuándo hayamos acabado, cuántas bolas hay en la urna A?, ¿infinitas ya que el número va creciendo una unidad en cada paso del proceso, o ninguna ya que todas las bolas acabarán siendo traspasadas a la urna B?**.**

infinita. Todos los estudiantes propusieron inicialmente que el estado en el infinito era igual a P($\mathbb{N}$), lo que supone que las múltiples instantáneas de este proceso mental finito se coordinan para construir un proceso mental infino al que los autores denominan “proceso iterativo infinito”. El objeto resultante es un estado en el ∞ al que denominan “objeto trascendente” del proceso. Se observó que uno de los sujetos era capaz de considerar la unión infinita como un objeto estático que trasciende al proceso de unión infinita. Dicho sujeto utilizó la definición formal de una unión infinita para determinar si contenía un conjunto infinito como elemento; para realizar esta acción tuvo que “desencapsular” la unión como proceso y utilizar lo que sabía sobre conjuntos. Otra de las estudiantes reveló su concepción de proceso al expresar sus ideas utilizando términos temporales; este lenguaje sugiere que ella no veía el proceso como una totalidad o bien la unión completa como real en un momento de tiempo dado. Por lo tanto, era imposible para ella aplicar una acción de evaluación y encapsular el proceso infinito completo en un objeto y aunque ella entendía que el estado en el infinito trasciende al proceso, no pudo determinar cuál era ese estado.

Ficha técnica (Brown et al., 2008)

Primera fase:
- *Muestra:* 7 sujetos
- *Cuestionario:* 1 ítem
- *Duración:* aprox. una hora
- *Otras características metodológicas:* Entrevistas

Segunda fase:
- *Cuestionario:* 9 ítems
- *Duración:*
- *Otras características metodológicas:* Entrevistas

Los autores proponen que la concepción de proceso de una iteración infinita se desarrolla mientras que el individuo coordina múltiples instantes de un proceso iterativo. Cuando se halla completamente construido, el individuo es capaz de imaginar el proceso infinito resultante como completo, en el sentido de ser capaz de imaginar todos los pasos que se han dado. Reflexionando sobre el proceso, el individuo puede llegar a verlo en su totalidad, es decir, como una simple operación en un instante dado. Esto puede conducirle a intentar aplicar una acción de evaluación al proceso el cual, si tiene éxito, da lugar a la encapsulación del *proceso iterativo infinito*. La encapsulación alcanza un *objeto trascendente*, ∞, que se entiende como fuera del proceso y el objeto se identifica como el estado en el infinito. Al intentar encontrar significado al enunciado formal del problema planteado, todos los estudiantes dieron respuestas orientadas hacia la idea de proceso, incluso aunque el problema no se enunciaba en términos de un proceso. En particular, los estudiantes más que relacionarlo con la definición formal de la teoría de conjuntos de la unión infinita de una colección de conjuntos, concibieron la unión infinita como una operación potencialmente infinita de uniones sucesivas como más o menos detalle y planteaban la cuestión crítica como “¿cuál es el resultado final?”.

Uno de los resultados centrales de este estudio es que aquellos que podían ver el proceso como completo, comprendieron el hecho de que los conjuntos de la forma P ({1, 2, 3,…, k}) son finitos y lo utilizaron para hacer progresos en el problema bien utilizando métodos formales bien métodos informales. Por el contrario aquellos otros que hicieron progresos limitados no tuvieron éxito en ver los procesos infinitos que construyeron como completos. Esto sugiere que si un individuo enfoca un problema relacionado con el infinito actual mediante la construcción de un proceso iterativo potencialmente infinito dispondrá de la clave para resolver el problema y ser capaz de ver el proceso como una totalidad completa y comprender que el estado en el infinito no es directamente producido por el proceso.

Según los autores de este trabajo, la elección para interpretar una unión infinita de conjuntos como un proceso potencialmente infinito de uniones sucesivas es consistente con el modo de razonamiento predicho por la Metáfora Básica del Infinito de Lakoff y Núñez, quienes dan sentido al estado en el infinito de un proceso iterativo infinito aplicando una metáfora conceptual que se origina en el dominio de procesos que tienen fin. Sin embargo, este enfoque tiene un error fatal: el estado en el infinito para un proceso infinito no necesita tener la misma forma de aquellos elementos que lo originan tras cualquier número finito de pasos del proceso. El error en concreto consiste en que los procesos finitos correspondientes tienen todos resultados finales que son conjuntos potencia, mientras que la unión infinita no es el conjunto potencia de cualquier conjunto. Así, aunque este ejemplo proporciona un cierto apoyo a la idea de Lakoff y Núñez de que la gente piensa sobre el infinito aplicando metáforas conceptuales, también indica que en la resolución de problemas que requieren la determinación del estado en el infinito para un proceso infinito se requiere algo más que el pensamiento metafórico. Pero ¿cómo puede utilizarse la instrucción para ayudar a los estudiantes a realizar construcciones que sean consistentes con las matemáticas convencionales?; una acción apropiada podría ser motivada por la cuestión ¿qué se ha acumulado una vez que se han dado todos los pasos del proceso? más que la cuestión ¿cuál es la forma del resultado final? La diferencia entre estas dos acciones es que la primera tiene sus raíces en cómo se encuentra el resultado en cada paso finito -a través del proceso de unión- mientras que la última tiene sus raíces en la forma del resultado en cada paso

A lo largo de esta revisión hemos podido apreciar el estado de la cuestión en lo que se refiere a los estudios sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de infinito. Conviene destacar el notable incremento de publicaciones en los últimos años así como la implicación en las mismas de los grupos de investigación más reconocidos dentro de la Educación Matemática. Esto ha supuesto, por una parte, la inclusión de un nuevo tópico como elemento de análisis en la difícil tarea de reconstrucción del pensamiento matemático. Y, por otra, la incorporación de perspectivas novedosas que han contribuido a enriquecer, y en su caso corregir, las tesis pioneras. Así, a los modelos intuitivos y el carácter contradictorio introducidos por Fischbein y la aplicación del concepto de medida de Tall se han añadido los aspectos contextuales y representativos, la categorización de incoherencias, los conflictos cognitivos que genera el acceso a esta noción, la influencia del lenguaje y, por último, su elevado contenido metafórico que parece afectar definitivamente a la corporeización de conceptos.

Capítulo 4

INSTRUMENTOS METODOLÓGICOS

¿Mediante qué mecanismos mentales determinamos que mientras el conjunto $\mathcal{N}$ = {1, 2, 3,…} tiene infinitos elementos, el conjunto S = {-3, -2, -1, 0, {1, 2, 3,…}} tiene sólo cinco? Si crees que esta cuestión es trivial, intenta convencer a cualquier estudiante universitario.

E. Dubinsky

La realidad educativa presenta una complejidad evidente debido a que aspectos tan importantes como las creencias, valores o significados no son directamente observables, lo que obviamente no debe llevarnos a renunciar a su estudio. Por su parte, los paradigmas de investigación educativa no están tan unificados e integrados como los de las ciencias naturales por lo que se hace necesario, en numerosas ocasiones, conjugar elementos de una cierta pluralidad paradigmática. Así mismo, la interacción de numerosas variables y el carácter irrepetible de muchos fenómenos educativos nos obliga a que nuestra investigación tenga un carácter plurimetodológico, aunando metodologías basadas en la experimentación y observación con otras no experimentales pero más acordes con el contexto de enseñanza y aprendizaje. Como es obvio, también convergen en este tipo de estudios diferentes disciplinas tales como la Psicología, Sociología, Pedagogía, Lingüística, etc. En la tabla adjunta (Latorre et al., 1996) se recogen aquellos aspectos que comparte nuestra investigación de los paradigmas positivista e interpretativo. En la misma línea, Guba y Lincoln (1982) recogen algunos de los aspectos comunes de la metodología cualitativa que coinciden con los que aparecen en la tabla. Por otra parte, las variaciones que sufren los fenómenos educativos en el tiempo y el espacio dificultan el establecimiento de regularidades y generalizaciones, ciertos aspectos educativos son difíciles de observar sin distorsionarlos y muchas situaciones educativas son irrepetibles y sus resultados de escasa utilidad para la praxis educativa por su artificialidad, lo que nos obligará a adoptar posturas más prudentes. En consecuencia, consideramos que una metodología exclusivamente cuantitativa supone una perspectiva mecanicista y reduccionista de la educación no siendo suficiente para dar cuenta de la complejidad mencionada; será, por lo tanto, preciso conjugar los métodos descriptivos de esta metodología con técnicas propias de una perspectiva cualitativa a pesar de los riesgos de subjetividad que comporta ésta. Así, también se aplicarán métodos inductivos, a partir de categorías, patrones e interpretaciones que se construirán en base a la información obtenida y no sólo a partir de teorías o hipótesis previas.

Por su parte, Howe y Eisenhart (1993) consideran que los estándares de validez de la investigación tanto cuantitativa como cualitativa cumplen tres funciones principales: permiten economía de pensamiento a la hora de diseñar y evaluar estudios educativos, proporcionan el punto de partida para la reflexión y mejora de la investigación educativa y sirven como vehículo de comunicación dentro y entre las tradiciones de investigación.

Tabla 1	Perspectiva empírico-analítica	Perspectiva constructivista
Fundamentos	Positivismo lógico. Empirismo	Fenomenología. Teoría interpretativa
Naturaleza de la realidad	La realidad es algo externo al investigador, única y tangible, que puede fragmentarse en variables	Múltiple e intangible, que sólo se puede abordar de forma holística; es algo que se construye
Finalidad de la investigación	Explicar, predecir, controlar los fenómenos, verificar teorías. Leyes para regular los fenómenos	Comprender e interpretar los significados de los fenómenos y acciones sociales
Relación investigador - objeto investigado	El investigador es un ser objetivo, libre de valores y que guarda distancia del objeto de estudio	Se admite esta relación, se da interrelación, el investigador suele participar y actuar
Papel de los valores	La metodología está libre de valores. El método es garantía de neutralidad.	Se admite la influencia de los valores en la investigación.
Teoría y práctica	Separa la teoría de la práctica. Ésta queda supeditada a los cánones que dicta la teoría.	Intercambio dinámico entre ambas con retroinformación y modificaciones constantes de la teoría en función de los datos obtenidos.
Criterios de calidad	La validez, fiabilidad y objetividad	Credibilidad, transferencia, dependencia y confirmabilidad
Instrumentos	Aquellos que implican la codificación (cuantificación) de los hechos, utilizando tests, cuestionarios, entrevistas estructuradas, etc.	Estrategias de naturaleza cualitativa, como la observación participante, la entrevista informal, los diarios, los registro de campo, el análisis de documentos, etc
Análisis de los datos	Es de carácter deductivo y estadístico. Aporta análisis cuantitativos. Estadística descriptiva e inferencial	Es de naturaleza cualitativa; suele implicar varias etapas: reducción, categorización, representación, validación e interpretación; es un proceso de carácter cíclico interactivo. Inducción analítica, triangulación

Tabla 1: Características de las perspectivas metodológicas empírico-analítica y constructivista

Los *métodos descriptivos* tienen como principal objetivo describir sistemáticamente hechos y características de una población dada o área de interés de forma objetiva y comprobable con el fin de proporcionar datos y hechos e ir dando pautas que posibilitan la configuración de teorías (Fox, 1981). Entre las tareas que en el marco del desarrollo del conocimiento pueden desempeñar estos métodos destacamos las de identificar fenómenos relevantes, sugerir variables causantes de la acción, registrar conductas que en otros momentos podrían revelarse como efecto y abordar áreas de estudio que no pueden ser tratadas por medio de estrategias experimentales (Underwood y

Shaughressy, 1975); podrían añadirse incluso otras como las de sugerir hipótesis de trabajo y detectar asociaciones entre variables. Sus principales técnicas de recogida de datos son los cuestionarios, las entrevistas semiestructuradas, tests estandarizados y escalas de actitudes.

El presente trabajo se sitúa dentro de la investigación aplicada y pretende conocer en profundidad las dificultades asociadas al concepto de infinito con el fin de transformar las condiciones del acto didáctico y mejorar su calidad. Se trata de una investigación *transversal* o *sincrónica* que estudia un aspecto del desarrollo de los sujetos en un momento dado, comparando diferentes grupos de edad (G_1, G_2, G_3,..., G_n) observados en un único momento (T_1), lo que permite efectuar un análisis diferencial de dichos grupos. En general, esta metodología es propia de temáticas específicas de la pedagogía diferencial y nos permite obtener información relevante para la planificación de programas educativos. No obstante, será interesante en el futuro abordar un estudio *longitudinal* o *diacrónico* de este concepto con un grupo determinado de sujetos a lo largo de tres o cuatro cursos escolares con el fin de investigar la evolución individual a partir de las diferentes actitudes iniciales frente a la idea de infinito. Se ha hecho uso de la triangulación utilizando diferentes estrategias de recogida de información: cuestionarios y entrevistas.

4.1. DISEÑO DE LOS CUESTIONARIOS. CARACTERÍSTICAS DE SU APLICACIÓN.

Para el diseño de los *cuestionarios* se han seguido algunos de los criterios e indicaciones que al respecto establecen Ary et al. (1987), Sierra (1988) y Cohen y Manion (1994). Por otra parte, la revisión de la bibliografía sobre el concepto de infinito ha permitido reutilizar algunos tópicos ya explorados en otros trabajos con el fin de ubicar el presente en el ámbito que le corresponde. Asimismo, se han incorporado algunas de las ideas clásicas obtenidas de algunos textos con las modificaciones oportunas para adaptarlas a nuestros objetivos (Groupe aha, 1999; Zippin, 1996; Stewart, 1996 y Gilbert y Rouche, 2001). Como ya se ha indicado en el capítulo anterior, en el *Apéndice II* se recogen todos aquellos cuestionarios facilitados en las publicaciones revisadas, y en el *Apéndice III* se pueden encontrar las referencias correspondientes a los ítems de nuestro cuestionario que no son originales así como su adaptación en caso de no haber hecho un uso literal de los mismos.

La primera decisión adoptada ha sido la de elegir un tipo de prueba mixta donde apareciesen preguntas con respuestas múltiples que acotasen las posibilidades de elección con el fin de facilitar la concreción y su posterior categorización y, a la vez, preguntas abiertas que permitiesen a los sujetos justificar su actitud ante el concepto que nos ocupa y, con ello, verter en el texto ideas, concepciones, intuiciones, definiciones, etc.; en fin, una información cualitativa amplia y plural que contribuyese a completar aquellas respuestas más concisas, teniendo en cuenta que el análisis del lenguaje utilizado constituye uno de los objetivos principales de esta investigación dada su relevancia en la configuración de los diferentes elementos del esquema conceptual. El riesgo de un espectro excesivamente amplio de respuestas que complicase su categorización se ha valorado en la prueba previa.

En segundo lugar, el hecho de que esta investigación abarcase un abanico de edades tan amplio obligaba a variar paulatinamente el contenido de los cuestionarios si no se quería que numerosas preguntas quedaran descontextualizadas, o simplemente banalizadas, a medida que se aplicasen a niveles superiores o viceversa. Esto podría suponer la pérdida de referencias comparativas a la hora de analizar los resultados, por lo que se optó por mantener invariantes un cierto número de ítems de los cursos inferiores a lo largo de todas las edades e ir introduciendo nuevas cuestiones, en torno a los mismos tópicos, que permitiesen valorar la madurez evolutiva de los individuos y la influencia de la instrucción recibida en niveles más avanzados.

Por último, un aspecto ineludible en un trabajo sobre el concepto de infinito es el estudio de la influencia que ejerce la representación utilizada en cada cuestión sobre la respuesta a la misma. En este sentido, Monaghan (2001) es el autor que más contextos, como él denomina a las diferentes representaciones, ha considerado a la hora de evaluar dicha relación y por lo tanto es una referencia obligada; también Garbín (2000) convierte el análisis del contexto en uno de los ejes de su trabajo. Así, se ha procurado, en el estudio que nos ocupa, introducir el mayor número de representaciones posible en cada uno de los tópicos; desde el lenguaje habitual hasta el algebraico, incluyendo contextos aritméticos, geométricos, probabilísticos y funcionales. También se han presentado perspectivas estáticas y dinámicas, formales, de medida, materiales y abstractas

En cuanto a las variables independientes elegidas, a parte de las imprescindibles para el estudio transversal que se pretende tales como la edad y el nivel educativo, se consideró adecuado recoger algunas otras a tener en cuenta para investigaciones posteriores. De esta manera, con el fin de estudiar la correlación entre el rendimiento académico y las diferentes categorías, aspecto tratado por Fischbein, se solicitó también la calificación obtenida en matemáticas en los dos últimos cursos escolares. La influencia del ambiente sociocultural familiar en el tipo de lenguaje utilizado se mediría a partir de la conjunción de dos variables más: el nivel educativo y las profesiones de sus progenitores. Estas variables se sustituyeron en el nivel universitario por el tipo de centro, público o privado, en el que realizaron los dos cursos de bachillerato. Dado que se había proyectado la realización de entrevistas personales se requirió el nombre de los estudiantes a fin de poder localizarlos algunas semanas después. No obstante, se advirtió que tal identificación era completamente voluntaria y que, si se deseaba, el cuestionario podía responderse de manera anónima y en tal caso especificar el género del sujeto que debía ser otra de las variables a tener en cuenta. Esta posibilidad podía producir un cierto sesgo pero en la realidad fue un tanto por ciento no significativo el de aquellos que omitieron su identidad y, además, no se halló entre éstos candidatos a la entrevista que no estuviesen representados entre aquellos otros identificados.

El tiempo máximo permitido para la realización del cuestionario fue de cincuenta minutos. La proporción entre el número preguntas y tiempo previsto para sus respuestas pretendía obtener la inmediatez propia del conocimiento intuitivo mas que la reflexión que acabaría por hacer intervenir elementos de la instrucción recibida que nos habrían alejado de importantes modelos tácitos y obstáculos epistemológicos de este concepto. A pesar de ello, en los niveles más avanzados se introdujeron cuestiones de control de claro contenido académico con el fin de establecer referencias entre la asimilación de dichos contenidos y los aspectos intuitivos mencionados. La realización de los cuestionarios se llevo a cabo dentro del tiempo concedido en porcentajes elevados: cerca del 85% para el cuestionario C1 y algo menos del 80% para el cuestionario C2 (y C3 en el caso universitario).

La notación elegida para cada cuestión sigue las líneas establecidas por investigaciones previas de otros autores así como la habitual en los libros de texto más extendidos de nuestro sistema educativo. Se ha renunciado a introducir una notación más formal en los cursos superiores con el fin de mantener la unidad mencionada más arriba y la de evitar sugerir aspectos más académicos. No se ha pretendido en ningún momento evaluar el nivel de conocimientos adquiridos dada, como ya se ha mencionado repetidamente, la ausencia práctica de este concepto en los contenidos curriculares a excepción de algunas asignaturas universitarias. No obstante, el reflejo de la incorporación de dichos conocimientos al esquema conceptual se manifiesta evidente en todos aquellos casos que así ocurre.

4.1.1. CUESTIONARIO PARA UN ESTUDIO PREVIO.

Se diseñó un cuestionario inicial que permitiera observar la bondad de sus ítems; por una parte, necesidad, redundancia de los tópicos, concreción, información que posee el sujeto para responder, sesgos no equilibrados, etc. Y por otra, respecto del estilo utilizado en la redacción de las cuestiones, posibilidad de malentendidos, información superflua, carácter abierto, dicotómico o múltiple de la pregunta, longitud de los enunciados, etc. Antes de su aplicación el cuestionario fue sometido a triangulación y aceptadas, en su mayor parte, las propuestas de modificación de los ítems que hicieron los expertos consultados. Finalmente, para este estudio previo se presentaron dos cuestionarios para primer ciclo de ESO, con 18 ítems distribuidos entre ambos, cuatro cuestionarios para segundo ciclo de ESO, con 32 ítems, cuatro para bachillerato, con 34 ítems, y tres para el nivel universitario, con 30 ítems, con lo que se pretendía optimizar la elección de las preguntas definitivas tras la discriminación realizada ante el comportamiento de los sujetos. En todos los niveles se han incluido cuestiones equivalentes bajo diferentes contextos, no siempre consecutivas, con el fin de apreciar la influencia de los mismos en las respuestas y el establecimiento de vínculos entre ellos; en particular, se ha abundado en las representaciones numéricas frente a las geométricas como en el caso de divisibilidad indefinida y sumas infinitas. Así mismo, hay ítems que por su especial relevancia se incluyen en todos los cuestionarios de cada nivel; así, por ejemplo, en 6º de primaria y el primer ciclo de ESO cuatro de los dieciocho indicados aparecen en los dos cuestionarios. Es preciso subrayar que la aplicación de este cuestionario no tenía como objetivo un estudio exhaustivo de sus resultados sino la discriminación de unos ítems frente a otros; no obstante, se realizó un breve análisis de aquellos con el fin de modificar algunos enunciados y mantenerlos en el cuestionario definitivo.

La presentación del cuestionario se llevó a cabo en los cinco primeros minutos de cada sesión y no se realizó ninguna mención explícita de la idea de infinito para evitar condicionamientos previos; en todos los casos la aplicación la realizó el investigador con el fin de controlar el tipo de información facilitado a los estudiantes ante cualquier tipo de duda sobre los enunciados durante el transcurso de la prueba.

La posibilidad anteriormente mencionada de un excesivo número de categorías entre las respuestas registradas a las preguntas abiertas quedó descartada tras este cuestionario previo ya que todas ellas pudieron ubicarse dentro de una tipología razonable y cuantitativamente tratable.

4.1.2. CUESTIONARIO PARA EL ESTUDIO DEFINITIVO

El análisis de las respuestas del cuestionario previo permitió efectuar una selección más adecuada a los objetivos de la investigación y a las características de la población eliminando preguntas que no aportaban información significativa o eran triviales para un cierto nivel, o bien rectificando el enunciado de aquellas que tras ciertas aclaraciones aportaban resultados utilizables. No obstante, algunas de las cuestiones de la prueba definitiva no proporcionaron finalmente la información prevista dado el excesivo sesgo de los resultados en un sentido u otro a diferencia de lo que había ocurrido en el estudio previo y, por lo tanto, se desestimó su inclusión en el análisis definitivo; así ha ocurrido con las cuestiones 6PRIC2P05, 3ESOC1P05, 1BTOC113 y 1BTOC115[1]. Tras las modificaciones indicadas, los cuestionarios resultantes contienen 14 ítems diferentes para el primer nivel, 21 ítems para el segundo nivel, 29 para el tercer nivel y 40 para el cuarto nivel; el número de ítems correspondientes a éste último nivel se incrementó notablemente debido a la inclusión de algunas preguntas relacionadas con la inducción matemática u otros aspectos más formales que no se consideraron en el estudio previo. Hemos de recordar que se han mantenido seis ítems comunes a todos los niveles: 6PRIC1P03, 6PRIC1P04, 6PRIC1P07, 6PRIC1P08, 6PRIC109 y 6PRIC2P02. Estos pueden hallarse en uno o en los dos cuestionarios de cada nivel, dependiendo de las características de la cuestión y del tamaño de muestra que se quería obtener. El sesgo al que puede inducir la presentación de algunos enunciados se mantuvo ya que se observó que suponía, en numerosos casos, un motivo de reacción del sujeto y la necesidad de justificarse a la hora de dar una respuesta; así, por ejemplo, en un proceso de subdivisión indefinida la pregunta *¿qué obtendrás al final?* llevó a porcentajes elevados de estudiantes a responder *no hay final, siempre se puede dividir* o *nunca paras de dividir*. Sin embargo, un número también significativo de individuos aceptó con naturalidad la posibilidad finitista propuesta aportando un resultado para dicho proceso. En el Anexo de este capítulo se pueden examinar los diferentes cuestionarios utilizados en esta investigación.

La distinción de niveles se ha efectuado en base a la división establecida por el sistema educativo vigente en el momento de la aplicación de los cuestionarios (LOGSE), curso 2004-2005, en lo que a educación no universitaria se refiere; por otra parte, teniendo en consideración la apreciación de Fischbein et al. (1979) sobre la estabilidad de resultados con la edad, se decidió aplicar la misma prueba a sexto curso de EP y primer ciclo de ESO, primer y segundo curso, otra a segundo ciclo de ESO, tercer y cuatro curso, otra en bachillerato y, por último, otra en el nivel universitario. También conviene indicar que en la construcción del esquema conceptual nivelar, que se llevará a cabo en el capítulo 6, se distinguirá entre sexto curso de EP y primer ciclo de ESO con el fin de distinguir las características de ámbitos y contextos tan diversos.

Los diferentes ítems de cada cuestionario se ubican dentro de cada uno de los tópicos hallados en la revisión de las investigaciones efectuadas en el capítulo anterior:

1. Comparación y equivalencia de conjuntos continuos y discretos

---

1. La notación empleada para distinguir cada uno de los ítems a lo largo de presente trabajo será la siguiente: 6PRIC1P03 indicará el ítem número 3 (P03) del cuestionario número 1 (C1) aplicado a sexto curso de educación primaria (6PRI); 6PRI representa el nivel inferior al que se ha aplicado dicho ítem y, que al menos, también incluirá, en este caso, a 1ESO y 2 ESO. El ítem 3ESOC2P10, por ejemplo, se aplica a partir de 3ESO, incluye a 4ESO, y podría llegar a estar presente en cualquiera de los cuestionarios aplicados a niveles superiores a este.

2. Divisibilidad indefinida, iteración e influencia de cotas superiores e inferiores
3. Series convergentes
4. Operatividad e infinito
5. Lenguaje del infinito
6. Inducción (sólo en el caso universitario)

Con el fin de ampliar el número de preguntas, y con ello la redundancia de ciertos tópicos, se diseñaron dos tipos de cuestionarios para cada nivel no universitario, C1 y C2, y tres para el universitario, C1, C2 y C3; así, en cada grupo de estudiantes se aplicaron simultáneamente dos pruebas diferentes, salvo en el nivel universitario, y en algunos casos con preguntas comunes pero presentadas con una ordenación diferente. El hecho de que en cada grupo los sujetos tuviesen que responder pruebas diferentes garantizaba también una mayor fidelidad y originalidad de las respuestas evitando el posible sesgo de la información compartida y la pérdida de tiempo para el desarrollo individual de la prueba. Cada ítem va acompañado de un espacio en blanco propio que orientaba al individuo sobre la extensión que se esperaba de su respuesta con el fin de evitar una retórica indeseada o, por el contrario, resultados sin argumentación.

En la tabla 2 se presenta la distribución de cuestiones a lo largo de todos los niveles. En primer lugar, se indica con fondo marrón las seis cuestiones básicas que han respondido sujetos de todos los niveles examinados; el resto de colores corresponde a aquellos ítems que han aparecido en tres niveles diferentes; las cuestiones en letra negrita, con fondo blanco, se han aplicado en dos niveles diferentes; y, por último, las cuestiones en letra cursiva sólo se encuentran en el nivel donde aparecen. También se indican, tachadas, aquellas cuestiones que no han sido analizadas por las razones anteriormente expuestas.

6PRI + (1+2)ESO		(3+4)ESO		(1+2)BTO		1UNI		
6PRIC1P01	*6PRIC2P01*	**6PRIC1P07**	**3ESOC2P01**	**6PRIC1P07**	*6PRIC1P07*	**6PRIC1P07**	*1UNIC2P01*	*1UNIC3P01*
6PRIC1P02	**6PRIC2P02**	**6PRIC1P03**	*3ESOC2P02*	**6PRIC1P03**	**6PRIC1P04**	**6PRIC1P03**	**6PRIC1P04**	*1UNIC3P02*
6PRIC1P03	**6PRIC1P04**	*3ESOC1P03*	*3ESOC2P03*	**6PRIC2P02**	**6PRIC1P08**	**6PRIC2P02**	**6PRIC1P08**	*1UNIC3P03*
6PRIC1P04	*6PRIC2P04*	**6PRIC1P04**	**6PRIC1P08**	**3ESOC1P09**	**3ESOC2P06**	**3ESOC1P09**	**3ESOC2P07**	*1UNIC3P04*
6PRIC1P05	~~*6PRIC2P05*~~	~~***3ESOC1P05***~~	**3ESOC2P05**	~~**3ESOC1P05**~~	**3ESOC2P07**	~~**3ESOC1P05**~~	**3ESOC1P06**	**1BTOC2P15**
6PRIC1P06	*6PRIC2P06*	**3ESOC1P06**	*3ESOC2P06*	**3ESOC1P07**	**3ESOC1P06**	**3ESOC1P07**	**3ESOC2P05**	**1BTOC2P09**
6PRIC1P07	**6PRIC1P07**	**3ESOC1P07**	**3ESOC2P07**	**3ESOC2P01**	**3ESOC2P05**	**3ESOC2P01**	**3ESOC2P09**	*1UNIC3P07*
6PRIC1P08	**6PRIC1P08**	**3ESOC1P08**	**6PRIC1P02**	*1BTOC1P08*	**3ESOC2P09**	**1BTOC1P08**	**1BTOC2P09**	*1UNIC3P08*
6PRIC1P09	**6PRIC1P09**	**3ESOC1P09**	**3ESOC2P09**	**3ESOC1P08**	*1BTOC2P09*	**3ESOC1P08**	**1BTOC2P10**	**1UNIC2P15**
		6PRIC2P02	*3ESOC2P10*	*1BTOC1P10*	*1BTOC2P10*	**1BTOC1P10**	**1BTOC2P12**	*1UNIC3P10*
			6PRIC1P09	*1BTOC1P11*	*1BTOC2P11*	**1BTOC1P11**	**6PRIC1P07**	*1UNIC3P11*
				1BTOC1P12	*1BTOC2P12*	~~**1BTOC1P13**~~	**1BTOC2P13**	**6PRIC1P03**
				~~*1BTOC1P13*~~	*1BTOC2P13*	*1UNIC1P13*	*1UNIC2P13*	**3ESOC2P03**
				6PRIC1P09	**6PRIC1P09**	*1UNIC1P14*	**6PRIC1P09**	*1UNIC3P14*
				~~*1BTOC1P15*~~	*1BTOC2P15*	**1BTOC2P11**	*1UNIC2P15*	

Tabla 2: Distribución de ítems en los diferentes cuestionarios

La aplicación del cuestionario definitivo se llevó a cabo a lo largo del mes de febrero del curso 2004/05; la parte del currículo impartida en cada nivel hasta ese momento se presenta en la tabla siguiente lo que nos permite apreciar el tipo de imágenes que podrían contaminar las respuestas de los estudiantes. Así, los conocimientos mínimos comunes a todos los niveles corresponden a la noción de conjunto numérico y número decimal mientras que el concepto de límite sólo es conocido por los estudiantes de 2BTO y 1UNI.

6º PRI	Números y operaciones. Potencias y raíces Múltiplos y divisores Los números negativos Los números decimales. Operaciones	**4º ESO**	El número real. La recta real Polinomios y fracciones algebraicas Ecuaciones, inecuaciones y sistemas Semejanza
1º ESO	Números naturales y divisibilidad Números enteros Números decimales Proporcionalidad	**1º BTO**	Números reales Álgebra Trigonometría
2º ESO	Repaso de aritmética Raíces y potencias Proporcionalidad Lenguaje algebraico	**2º BTO**	Matrices y determinantes Vectores en el espacio Sistemas de ecuaciones
3º ESO	Repaso de aritmética Progresiones Polinomios y ecuaciones	**1º UNI**	Un asignatura de primer cuatrimestre: Licenciatura de Matemáticas: Análisis Matemático Ingenierías: Cálculo o Métodos Matemáticos Licenciatura en Químicas: Matemáticas

Tabla 3: Currículo impartido hasta la aplicación de los cuestionarios

4.2. LA ENTREVISTA

Con el fin de obtener información complementaria a la aportada por los resultados de los cuestionarios que permitiese la validación de estos (Kerlinger, 1982) se diseñó y desarrolló una entrevista con algunos de los sujetos que participaron en esta experiencia, basándonos fundamentalmente en los textos de Sierra (1988) y Cohen y Manion (1994). La entrevista *proporciona el acceso a lo que es "el interior de la mente de una persona" haciendo posible la medida de lo que una persona sabe (conocimiento o información), de lo que le gusta o disgusta (valores y preferencias) y de lo que piensa (actitudes y creencias)* (Tuckman, 1972). El objetivo específico de este instrumento es el de permitir que los sujetos puedan matizar las ideas más recurrentes registradas en la aplicación de la prueba escrita tales como definición de punto, equivalencia entre infinitos, naturaleza del infinito, concepciones del continuo y su relación con el infinito, naturaleza de un proceso de división indefinida, etc.

Se decidió que la entrevista fuese semiestructurada por la flexibilidad que ofrece su aplicación y la posibilidad de modificar el guión base según el desarrollo de la misma, aún manteniendo el objetivo para el que fue preparada. Durante la entrevista no se corrige al sujeto indicando sus errores; en su lugar se pretende provocar la contradicción con declaraciones anteriores o con su interlocutor. Para evitar la mediación excesiva e inductora en los diálogos por parte del entrevistador, se organizaron las entrevistas entre parejas de estudiantes, en general del mismo nivel y, si era posible, enfrentados en algunas de sus respuestas con el fin de que fuesen ellos los que utilizasen sus propios argumentos para refutar y resolver contradicciones. Si bien es cierto que en alguno de los casos no ha sido fácil que entablasen una discusión autónoma sobre la cuestión en debate, sí podemos decir que en las ocasiones en que ha ocurrido ha resultado una experiencia reveladora, recogiéndose perspectivas que no se manifestaron explícitas en la lectura de los cuestionarios y que, sin duda, ayudan en la interpretación de comportamientos generalizados[2]. Tras la presentación de la entrevista, se informaba a los estudiantes que se grabaría el diálogo garantizándoles la absoluta confidencialidad del mismo y su uso exclusivo para los fines de la investigación. A continuación, el investigador comenzaba dando lectura a una respuesta concreta y a continuación el autor debía justificarla con cierta profundidad; tras esto su interlocutor debía apoyar o rebatir dicha postura. En caso de que el diálogo se estancase se introducía algún elemento adicional, un ejemplo equivalente o un gráfico o figura, que pudiese crear nuevas perspectivas de la discusión. La entrevista se desarrolló normalmente en una sala pequeña o despacho, facilitada por algún miembro del equipo directivo del centro, con el fin de evitar interrupciones; por otra parte, el hecho de que estuviesen presentes dos estudiantes, en la mayor parte de los casos del mismo grupo, ha contribuido a eliminar desde el comienzo de la entrevista la tensión natural que suele suceder al encuentro entre dos personas desconocidas y edades dispares.

El guión de partida correspondiente a cada entrevista estaba personalizado para cada uno de los sujetos, como se puede apreciar en algunos ejemplos recogidos en el *Apéndice V*, y giraba en torno a determinadas preguntas del cuestionario escrito y sus respuestas, atendiendo a la inconsistencia de estas últimas, a su incoherencia con otras respuestas, a su originalidad, a la referencia de modelos tácitos, a los obstáculos que pudieran originarlas, etc. En ocasiones se les recordaba lo que habían respondido por escrito -unos dos meses antes aproximadamente- con el fin de observar sus comportamientos pero, en general, se les pedía que comenzasen respondiendo de nuevo a fin de localizar contradicciones, la adquisición de un cierto grado de madurez que entonces no se daba o bien de constatar un cierto nivel de estabilidad o resistencia en sus concepciones. El sujeto dispuso durante el transcurso de la entrevista de los enunciados correspondientes al cuestionario que respondió por escrito.

Se realizaron un total de 34 entrevistas a 68 alumnos de Educación Secundaria y Bachillerato; el hecho de no entrevistar a niños de Educación Primaria radica en su actitud reservada ante una persona desconocida y una grabadora y el breve espacio de tiempo de que se disponía, insuficiente para crear ciertos lazos de empatía que permitiesen un diálogo no meramente formal. La duración de las entrevistas osciló entre 25 y 35 minutos. La distribución de las mismas por niveles y por tipos de cuestionarios se presenta en la Tabla 4; por su parte, la trascripción de algunas de las entrevistas grabadas se recoge en el *Apéndice V* y los resultados más significativos de las mismas en el capítulo 6.

	nº sujetos	C1	C2
1ESO	8	2	6
2ESO	10	4	6
3ESO	10	5	5
4ESO	10	4	6
1BTO	14	7	7
2BTO	16	6	8

Tabla 4: Distribución de entrevistas

La entrevista aportó también, como se verá en el capítulo 6, algunos cambio de actitud de los estudiantes frente a sus respuestas escritas; se trata de los efectos de la *tarea de conexión* (Garbin y

2. En determinados casos uno de los sujetos de la pareja entrevistada presentaba un carácter dominante frente al otro, lo que suponía una servidumbre clara que se manifestaba al corroborar el segundo la mayor parte de las opiniones del primero.

Azcárate, 2000) que realiza el entrevistador facilitando la creación de vínculos entre contextos diferentes o, en general, entre distintas áreas del esquema conceptual.

4.3. CUESTIONARIO PARA EL PROFESORADO

El cuestionario entregado al profesorado consta de dos partes como se puede apreciar en el *Apéndice IV*. En la primera de ellas se solicita que indique los contenidos del currículo impartidos hasta la fecha de aplicación del cuestionario para estudiantes, con el fin de poder valorar la influencia de la instrucción recibida recientemente; y en la segunda se requerían la editorial del texto utilizado en cada nivel así como el tipo de referencias que introduce habitualmente el profesor en el aula sobre el concepto de infinito; este tipo de información se considera de gran importancia ya que nos puede orientar sobre el origen de algunos de los obstáculos didácticos como se recoge en el capítulo 6. Este cuestionario no es exhaustivo pero nos permite apreciar determinados comportamientos del profesorado recogidos en Sbaragli (2003 y 2004) e incluidos en el capítulo anterior.

4.4. ELECCIÓN Y DISTRIBUCIÓN DE MUESTRAS

La selección de la muestra en una investigación de tipo cualitativo no tiene el propósito de representar a una población con el objeto de generalizar los resultados. Su intencionalidad es ampliar el abanico y rango de los datos tanto como sea posible, a fin de poder obtener la máxima información de las múltiples realidades que pueden ser descubiertas y facilitar la posibilidad de generar una teoría adecuada a las condiciones y valores locales. En nuestro caso que se ha conjugado una metodología cualitativa con una cuantitativa se han utilizado muestras con un grado de representatividad aceptable.

El muestreo ha sido incidental, aprovechando los elementos de la población que eran fácilmente accesibles. No obstante, pese a que la facilidad para la realización ha sido un factor determinante, se ha conseguido una representatividad aceptable finalizando el muestreo cuando ya no se obtuvo nueva información de las unidades de análisis. La redundancia o saturación de información se convirtieron en el criterio principal para dar por finalizado el muestreo. Al no ser aleatorias las muestras obtenidas por este sistema, la generalización de los resultados obtenidos debe realizarse con la suficiente prudencia, si bien se ha procurado que los centros tuviesen unas características diversas: barrios más y menos favorecidos, mayor y menor prestigio del centro en cuanto a sus resultados académicos, profesorado más y menos comprometido, titularidad pública y privada, etc.; de esta manera se podría comprobar la influencia de estos aspectos en los resultados obtenidos.

	Centros			
	PRI	SEC	UNI	Profesores
Cuestionario previo	0	2	1	9
Cuestionario definitivo	10	10	4	34
Total	**10**	**12**	**5**	**43**

Tabla 5: distribución de centros

En la tabla 5 se presenta la distribución de centros que han participado y de profesores que respondieron los cuestionarios correspondientes. Los centros de Educación Primaria eran todos de titularidad pública de dos localidades diferentes, los de Educación Secundaria eran todos de titularidad pública, menos uno de titularidad privada, de cinco localidades diferentes y los centros universitarios corresponden a Universidades de titularidad pública de cinco localidades diferentes. Los estudiantes de 4ESO que realizaron el cuestionario cursaban la opción B de la asignatura de Matemáticas, mientras que los de bachillerato pertenecían a la modalidad de Ciencias de la Naturaleza; por su parte, los universitarios cursaban Ingeniería Técnica de Informática de Sistemas, Licenciatura de Matemáticas, Licenciatura de Químicas, Ingeniería Superior de Telecomunicaciones, Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones e Ingeniería Superior de Informática. A pesar de haber transcurrido sólo un cuatrimestre, en el nivel universitario se han detectado diferencias significativas, que se especificarán en el capítulo 5, entre el alumnado de la Licenciatura de Matemáticas de dos universidades diferentes y el resto de estudiantes universitarios de la muestra donde las categorías establecidas presentan una homogeneidad evidente. En la Tabla 6 se presenta la distribución y tamaño de las muestras utilizadas en cada uno de los cuestionarios; en total, participaron en esta investigación un total de 2112 sujetos.

		Cuestionario previo	Cuestionario definitivo			
		Total	C1	C2	C3	Total
Nivel I	6 PRI	0	103	102		205
	1 ESO	48	104	107		211
	2 ESO	51	114	113		227
		99	**321**	**322**		**643**
Nivel II	3 ESO	41	113	104		217
	4 ESO	51	114	113		227
		92	**227**	**217**		**444**
Nivel III	1 BTO	41	120	111		231
	2 BTO	47	115	120		235
		88	**235**	**231**		**466**
Nivel IV	1 UNI	41	75	91	73	239
	Total	**320**				**1792**

Tabla 6: Distribución y tamaño de las muestras

4.5. ANÁLISIS DE DATOS.

El análisis de datos ha comenzado mediante la tabulación de las respuestas íntegras de cada sujeto para cada ítem y nivel con el fin de facilitar la definición de categorías y su estudio comparativo. En el *Apéndice VII* se incluyen algunos fragmentos de dicha tabulación. Las categorías que emergen deben comprobarse con los últimos datos y modificarse y redefinirse hasta llegar a un sistema satisfactorio. El proceso ha finalizado, como ya se ha indicado, cuando los datos dejaron de generar nuevas percepciones. A continuación se han confeccionado las tablas de frecuencias y porcentajes que se han traducido en histogramas con el fin de ofrecer una imagen más inmediata y clara de la evolución de cada una de las categorías a través de los niveles considerados. Por último, se ha llevado a cabo un análisis descriptivo e interpretativo de los resultados obtenidos que constituyen la parte esencial de los próximos capítulos 5 y 6.

Se ha aplicado la prueba χ^2 a las tablas de contingencia que relacionan el *nivel educativo*, es decir la edad en buena aproximación, con las diferentes *categorias de cada ítem*, con el fin de determinar si existe una relación estadísticamente significativa entre ambas variables y, en consecuencia, establecer su dependencia o independencia. Puesto que el estadístico χ^2 mide la diferencia entre el valor que debiera resultar si las dos variables fuesen independientes y el que se ha observado en la realidad, cuanto mayor resulte esa diferencia mayor será la relación entre ambas variables. La dependencia a la que nos referiremos en el capítulo 5 y en las conclusiones entre los modelos intuitivos detectados y el nivel educativo se basa en valores de $p < 0.005$, en todos los casos.

ANEXO: FÁCSIMIL DE LOS CUESTIONARIOS PROPUESTOS A LOS ESTUDIANTES

6 PRI + (1+2) ESO	Cuestionario C1

Nombre y apellidos													**Edad**		
Curso		**Grupo**		**Calificación en matemáticas en: 2002-03**						**2003-04**					
Nivel educativo de la madre	**PRI**		**SEC**		**UNI**		**y del padre**	**PRI**		**SEC**		**UNI**			
Profesión de la madre					**y del padre**										

1. Imagina el siguiente juego entre dos personas. Cada una dice, cuando es su turno, un número. Gana aquél que diga el número más grande.
a) ¿Preferirías ser tú el que comenzases el juego?, ¿por qué?

b) ¿Cuánto durará el juego?, ¿por qué?

2. Considera un número positivo cualquiera; a continuación lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final?, ¿por qué?

3. Imagínate que del conjunto de todos los números naturales {1, 2, 3, 4, 5,...} borramos un millón de números.
a) ¿Cuántos quedan?, ¿por qué?

b) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que contendrá más números:
{1, 2, 3, 4,...} ó {1.000.001, 1.000.002, 1.000.003,...}?, ¿por qué?

c) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que contendrá más números:
{1, 2, 3, 4,...} ó {3, 6, 9, 12,...}? ¿por qué?

4. a) ¿Existe algún número entre 1,9 y 2? ☐ Si. Escribe alguno ☐ No. ¿Por qué?

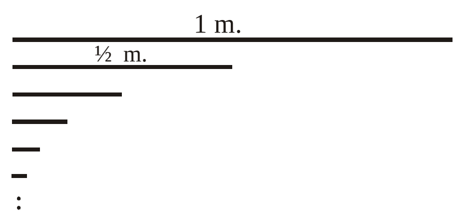
b) ¿Y entre $1,\overset{\frown}{9}$ y 2? ☐ Si. Escribe alguno ☐ No. ¿Por qué?

5. ¿Puedes realizar la siguiente resta: 7,424242... - 3,151515... ?. Si es posible escribe el resultado. De lo contrario explica porqué.

6. Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos y **<u>explica tu respuesta</u>**:

- **a)** Número de estrellas
- **b)** Número de granos de arena en la Tierra
- **c)** Números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
- **d)** Número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm. de lado
- **e)** Número de células que forman el cuerpo humano

7. Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían? ¿Y en uno de 30 cm de lado? **<u>Explica tus respuestas</u>**



8. Si tienes el conjunto de alambres de la figura, donde la longitud de cada trozo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, obtendrás un alambre más largo:

¿Cuánto medirá el alambre cuando los hayas unido todos?

- ***a)*** 2 metros
- ***b)*** Una longitud tan grande que no se puede medir
- ***c)*** 3 metros
- ***d)*** Infinito

<u>Explica tu respuesta</u>.

9. Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puedes realizar un dibujo sobre el infinito.

6 PRI + (1+2) ESO	Cuestionario C2

Nombre y apellidos		**Edad**											
Curso		**Grupo**		**Calificación en matemáticas en: 2002-03**		**2003-04**							
Nivel educativo de la madre	**PRI**		**SEC**		**UNI**		**y del padre**	**PRI**		**SEC**		**UNI**	
Profesión de la madre		**y del padre**											

1. Imagina el siguiente juego entre dos personas. Cada una dice, cuando es su turno, un número distinto de cero **-pueden ser números enteros o decimales, pero siempre positivos-**. Gana aquél que diga el número más pequeño.

a) ¿Preferirías ser tú el que comenzases el juego?, ¿por qué?

b) ¿Cuánto durará el juego?, ¿por qué?

2. Supón que divides un segmento por la mitad y te quedas con una de las partes. Si esta operación la repites todas las veces que desees, ¿qué obtendrás al final? **Justifica tu respuesta**.

3. ***a)*** ¿Existe algún número entre 1,9 y 2? ☐ Si. Escribe alguno ☐ No. ¿Por qué?

b) ¿Y entre $1,\widehat{9}$ y 2? ☐ Si. Escribe alguno ☐ No. ¿Por qué?

4. ¿Cuánto mediría la línea más larga que se pueda dibujar? Explica tu respuesta**.**

5. Considera la siguiente sucesión de números: 0,1 0,01 0,001 0,0001 0,00001 · · ·

Si continuamos escribiendo números, ¿crees que se llegará a alcanzar el 0?

☐ Si. ¿Cuándo? ☐ No. ¿Por qué?

6. Observa estas dos sucesiones de números:

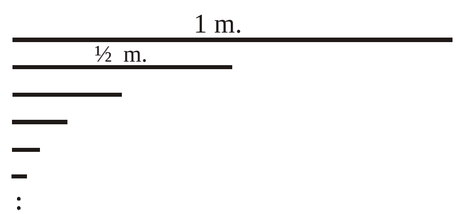
A: 1, 2, 3, 4, 5, 6,....
B: 4, 8, 12, 16, 20, 24,....

que continúan indefinidamente. ¿Cuál de las siguientes respuestas es la correcta?

a) La ***A*** alcanzará el valor más grande
b) La ***B*** alcanzará el valor más grande
c) Las dos alcanzarán un valor tan grande como queramos
d) Otra respuesta. Indícala

Explica tu respuesta.

7. Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. Indica qué cantidad de puntos cabrán. ¿Y en uno de 30 cm de lado? **Explica tus respuestas**



8. Si tienes el conjunto de alambres de la figura, donde la longitud de cada trozo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, obtendrás un alambre más largo:

¿Cuánto medirá el alambre cuando los hayas unido todos?

a) 2 metros
b) Una longitud tan grande que no se puede medir
c) 3 metros
d) Infinito

Explica tu respuesta.

9. Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puede realizar un dibujo sobre el infinito.

(3+4) ESO	Cuestionario C1

Nombre y apellidos		Edad									
Curso		Grupo		Calificación en matemáticas en: 2002-03		2003-04					
Nivel educativo de la madre	PRI		SEC		UNI		y del padre	PRI		SEC		UNI	
Profesión de la madre		y del padre									

1. Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm. de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrán? ¿Y en uno de 30 cm. de lado? **Explica tus respuestas**.

2. Imagínate que al conjunto de todos los números naturales {1, 2, 3, 4, 5,...} le quitamos un millón de números.

a) ¿Cuántos quedan?, ¿por qué?

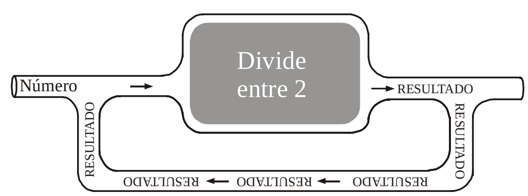
b) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números:

{1, 2, 3, 4,...} ó {1.000.001, 1.000.002, 1.000.003,...}?, ¿por qué?

c) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números:

{1, 2, 3, 4,...} ó {3, 6, 9, 12,...}?, ¿por qué?

3. La siguiente máquina divide entre 2 el número que introduzcas; el resultado lo vuelve a dividir entre 2 y así sucesivamente; sólo se detiene cuando alcanza el resultado más pequeño posible. ¿Cuál será ese resultado?; ¿estará funcionando durante mucho tiempo?, ¿por qué?



4. ¿Existe algún número entre $1,\widehat{9}$ y 2? ☐ Si. Escribe alguno ☐ No. ¿Por qué?

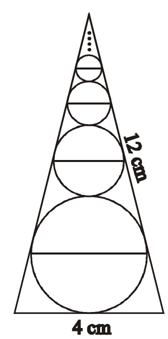
5. ¿Cuál es el resultado de dividir 5 entre 0? **Explica tu respuesta**.
¡Atención!: si utilizas la calculadora ten cuidado, debes explicar lo que aparece en la pantalla, no sólo copiarlo

6. Considera un bombo de lotería enorme con todos los números naturales. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un 5?, ¿y la de extraer alguno de los números que hay entre 1 y 10.000.000? **Justifica tu respuesta**.

7. Dada la suma $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, su resultado, según se va añadiendo una nueva fracción,

a) crece indefinidamente ***b)*** decrece indefinidamente
c) se acerca indefinidamente a un cierto número ***d)*** otra respuesta; indicar cuál
Justifica tu respuesta

8. ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños?
a) una cantidad finita, ¿cuál?
b) una cantidad infinita, ¿por qué?
c) no se puede saber, ¿por qué?



9. Observa la siguiente sucesión de números, donde el denominador sólo puede ser un número natural:

$$\text{¿}Origen? \cdots \frac{1}{35}, \frac{1}{34}, \frac{1}{33}, \frac{1}{32}, \cdots \text{¿}Final?$$

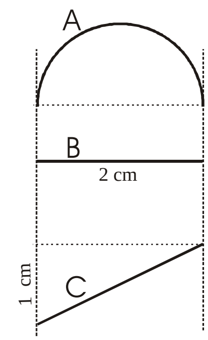
¿Tiene origen y final? Si es así, ¿qué números son esos? ¿Cuántos números hay entre el origen y el final?, ¿por qué?

10. Considera un segmento que lo divides por la mitad y te quedas con una de las partes. Si esta operación la repites todas las veces que desees, ¿qué se obtendrá al final? **Justifica tu respuesta**.

(3+4) ESO	Cuestionario C2

Nombre y apellidos		Edad											
Curso		Grupo		Calificación en matemáticas en: 2002-03		2003-04							
Nivel educativo de la madre	PRI		SEC		UNI		y del padre	PRI		SEC		UNI	
Profesión de la madre		y del padre											

1. Compara las líneas A, B y C de la figura.
a) ¿Cuál de ellas es más larga A, B o C? ***b)*** ¿Cuál de ellas contiene más puntos A, B o C?
Justifica tu respuesta.

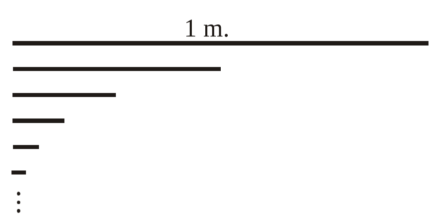


2. Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos y **justifica tu respuesta**:

a) Número de estrellas
b) Número de granos de arena en la Tierra
c) Números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5,...\}$
d) Número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm de lado
e) Número de células que forman el cuerpo humano

3. ¿Es posible encontrar un número decimal que multiplicado por 9 de como resultado 1?. Si es posible indica qué número es ese y cómo lo has obtenido; de lo contrario, **justifica tu respuesta**.

4. Si tienes el conjunto de segmentos de la figura, donde la longitud de cada uno es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, obtendrás un segmento más largo. ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos?



a) 2 metros
b) Una longitud tan grande que no se puede medir
c) 3 metros
d) Infinito
Explica tu respuesta.

5. ¿Cuál es el resultado de $0,\widehat{9} \times 0,\widehat{9}$? **Explica tu respuesta**

6. ¿Cuál es el número decimal más pequeño entre 2 y 3, si excluyes a ambos? Si es posible averiguarlo indica cuál es dicho número; si no es posible, explica porqué.

7. Considera la suma $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots$; su resultado

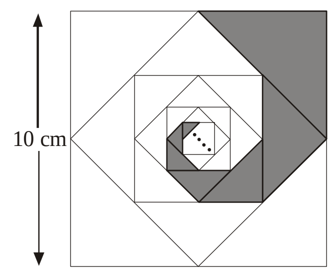
a) es un número finito, ¿cuál? ***b)*** es un número infinito, ¿por qué? ***c)*** no se puede calcular, ¿por qué?

8. Considera un número positivo cualquiera; a continuación lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente, muchas veces. ¿Qué resultado se obtendrá?; ¿por qué?

9. La suma de las áreas de los triángulos sombreados de la figura es:

a) Finita ***b)*** Infinita ***c)*** No se puede calcular

<u>Justifica tu respuesta</u>.



10. Considera el siguiente número periódico: $2,\overline{131}=131131131...$

a) ¿Cuántas veces aparecerá el 1 a lo largo de toda su parte decimal?, ¿y el 3?

b) ¿Aparecerá alguno de ellos más veces que el otro? **<u>Explica tu respuesta</u>**.

11. Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puedes realizar un dibujo sobre el infinito.

(1+2) BTO	Cuestionario C1

Nombre y apellidos								Edad	
Curso		Grupo		Calificación en matemáticas en: 2002-03		2003-04			
Nivel educativo de la madre	PRI		SEC		UNI		y del padre	PRI		SEC		UNI	
Profesión de la madre		y del padre							

1. Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían. ¿Y en uno de 30 cm de lado? **<u>Explica tus respuestas</u>**.

2. Imagínate que al conjunto de todos los números naturales {1, 2, 3, 4, 5,...} le quitamos un millón de números.

a) ¿Cuántos quedan?, ¿por qué?

b) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números:

{1, 2, 3, 4,...} ó {1.000.001, 1.000.002, 1.000.003,...}?, ¿por qué?

c) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números:

{1, 2, 3, 4,...} ó {3, 6, 9, 12,...}?, ¿por qué?

3. Considera un segmento que lo divides por la mitad y te quedas con una de las partes; ésta la vuelves a dividir y te quedas con una de las mitades; si esta operación la repites todas las veces que desees, ¿qué se obtendrá al final? **<u>Justifica tu respuesta.</u>**

<u>4.</u> Observa la siguiente sucesión de números, donde el denominador es siempre un número natural:

$$\text{¿}Origen? \cdots \frac{1}{35}, \frac{1}{34}, \frac{1}{33}, \frac{1}{32}, \cdots \text{¿}Final?$$

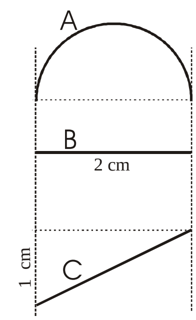
¿Tiene origen y final? Si es así, ¿qué números son esos?; de lo contrario expón tus razones.

5. ¿Tiene algún significado la expresión $\frac{5}{0}$? **<u>Explica tu respuesta</u>**.

6. Dada la suma $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, su resultado, según se va añadiendo una nueva fracción,

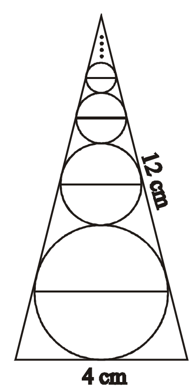
a) crece indefinidamente ***b)*** decrece indefinidamente
c) se acerca indefinidamente a un cierto número ***d)*** otra respuesta; indicar cuál
Justifica tu respuesta

7. Compara las líneas A, B y C de la figura.
a) ¿Cuál de ellas es más larga A, B o C? ***b)*** ¿Cuál de ellas contiene más puntos A, B o C?
Justifica tu respuesta.



8. ¿Puedes situar infinitos segmentos dentro de un segmento dado, AB, de longitud *l*?; si es posible indica cómo, de lo contrario justifica tu respuesta.

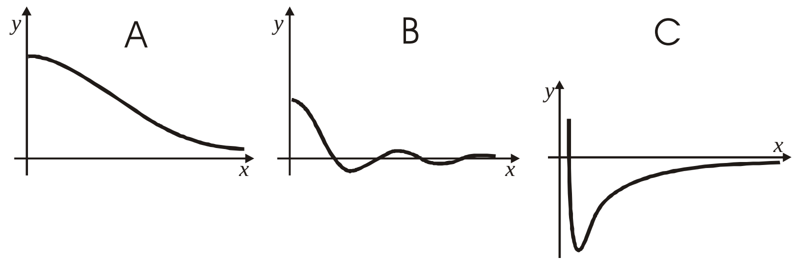
9. ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños?
a) una cantidad finita, ¿cuál?
b) una cantidad infinita, ¿por qué?
c) no se puede saber, ¿por qué?



10. ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, 4)?
Justifica tu respuesta.

11. Lanzamos un dado infinitas veces y apuntamos el resultado. ¿Cuántos unos habrán salido?, ¿y doses?, ¿y múltiplos de 2? ¿Cuál de los tres conjuntos anteriores contiene más elementos?
Justifica tus respuestas.

12. Explica qué les ocurre a las siguientes gráficas para valores muy grandes de *x*. ¿Tienen algo en común sus comportamientos para tales valores?



13. Describe el comportamiento de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x = 0$.

14. Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito.

15. Averigua el valor del siguiente límite: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n}$ ¿Qué significa el resultado que has obtenido?

(1+2) BTO	Cuestionario C2

Nombre y apellidos										Edad	
Curso		Grupo		Calificación en matemáticas en: 2002-03				2003-04			
Nivel educativo de la madre	PRI		SEC		UNI		y del padre	PRI		SEC		UNI	
Profesión de la madre					y del padre						

1. Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos y **<u>justifica tu respuesta</u>**:

a) Número de decimales de B

b) Número de estrellas

c) Número de granos de arena sobre la Tierra

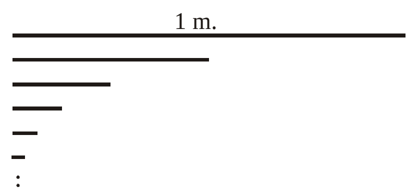
d) Números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5,...\}$

e) Número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm de lado

f) Números reales, $\mathbb{R}$

2. ¿Existe algún número entre $1{,}\widehat{9}$ y 2? ☐ Si. Escribe alguno ☐ No. ¿Por qué?

3. Si tienes el conjunto de segmentos de la figura, donde la longitud de cada uno es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, obtendrás un segmento más largo. ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos?



a) 2 metros ***b)*** Un valor muy próximo a dos metros

c) 3 metros ***d)*** Infinito **e)** Una longitud muy grande

f) Otra respuesta

<u>Explica tu respuesta</u>.

4. ¿Cuál es el número más pequeño entre 2 y 3, si excluimos a ambos? Si lo has podido averiguar, explica el proceso que has seguido; de lo contrario, justifica tu respuesta.

5. Considera la suma $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} + \cdots$; su resultado

a) es un número finito, ¿cuál? **b)** es un número infinito, ¿por qué? **c)** no se puede calcular, ¿por qué?

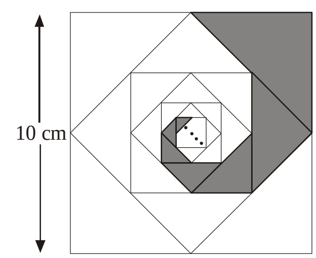
6. Considera un bombo de lotería enorme con todos los números naturales. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un 5?, ¿y la de extraer alguno de los números que hay entre 1 y 10.000.000? **<u>Justifica tu respuesta</u>**.

7. ¿Cuál es el resultado de $0,\widehat{9} \times 0,\widehat{9}$? **<u>Explica tu respuesta</u>**

8. La suma de las áreas de los triángulos sombreados de la figura es:

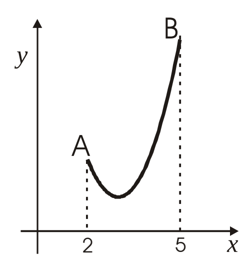
a) Finita ***b)*** Infinita ***c)*** No se puede calcular

<u>Justifica tu respuesta</u>.



9. ¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos; en caso contrario, justifica tu respuesta.

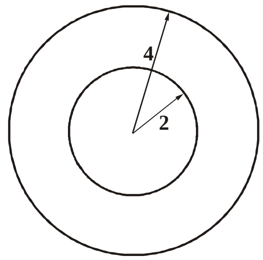
10. Dada la función $y = (x-3)^2 + 1$, definida en el conjunto de los números reales, de la cual se ha representado el tramo de curva AB en la figura adjunta, ¿dónde hay más puntos, en el intervalo [2, 5] de la variable *x* o en el tramo de curva AB? **<u>Justifica tu respuesta</u>**.



11. ¿Es correcta la expresión 4 + 5 = 4? Si lo es, ¿significaría esto que en un hotel gigantesco con infinitas habitaciones, todas ocupadas, se podrían alojar cinco personas más? Explica tu respuesta.

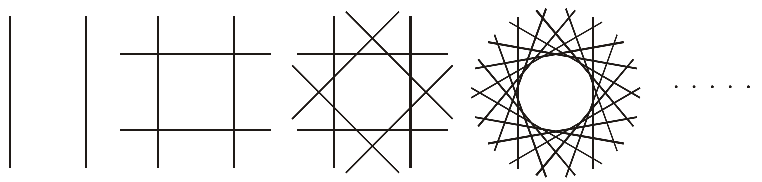
12. ***a)*** ¿Cuántos valores (x, y), reales, satisfacen la ecuación x + 2y **-** 3 = 0? ¿Qué significa dicho resultado?
b) Si *x* sólo pudiese tomar valores en el intervalo [3, 5], ¿cuántas soluciones tendría ahora dicha ecuación?
c) ¿En cuál de los dos casos anteriores se obtiene un número mayor de soluciones, en **a)** o en **b)**?, ¿por qué?

13. ¿Cómo podrías demostrar que las dos circunferencias siguientes contienen la misma cantidad de puntos?



14. Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito.

15. Si observas el proceso siguiente, parece que rotando sucesivamente un par de rectas paralelas se puede obtener un círculo. ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.



1 UNI	Cuestionario C1

Nombre y apellidos						**Edad**	
Curso		**Grupo**		**Calificación en matemáticas en: 2003-04**		**2004-05**	
Centro en el que estudiaste el Bachillerato							

1. Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían. ¿Y en uno de 30 cm de lado? **Explica tus respuestas**.

2. Imagínate que al conjunto de todos los números naturales, $\mathbb{N}$, le quitamos un millón de números.

a) ¿Cuántos quedan?, ¿por qué?

b) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números:

{1, 2, 3, 4,...} ó {1.000.001, 1.000.002, 1.000.003,...}?, ¿por qué?

c) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números:

{1, 2, 3, 4,...} ó {3, 6, 9, 12,...}?, ¿por qué?

3. Considera un segmento que lo divides por la mitad y te quedas con una de las partes; ésta la vuelves a dividir y te quedas con una de las mitades; si esta operación la repites todas las veces que desees, ¿qué se obtendrá al final? **Justifica tu respuesta.**

4. Observa la siguiente sucesión de números, donde el denominador es siempre un número natural:

$$\text{¿}Origen? \cdots \frac{1}{35}, \frac{1}{34}, \frac{1}{33}, \frac{1}{32}, \cdots \text{¿}Final?$$

¿Tiene origen y final? Si es así, ¿qué números son esos?; de lo contrario expón tus razones.

5. ¿Tiene algún significado la expresión $\frac{5}{0}$? **Explica tu respuesta**.

6. Dada la suma $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, su resultado, según se va añadiendo una nueva fracción,

a) crece indefinidamente ***b)*** decrece indefinidamente

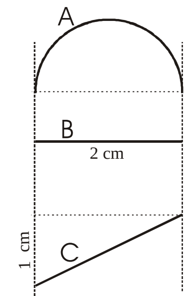
c) se acerca indefinidamente a un cierto número ***d)*** otra respuesta; indicar cuál

Justifica tu respuesta

7. Compara las líneas A, B y C de la figura.

a) ¿Cuál de ellas es más larga A, B o C? ***b)*** ¿Cuál de ellas contiene más puntos A, B o C?

Justifica tu respuesta.



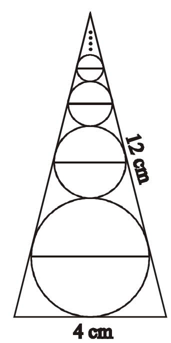
8. ¿Puedes situar infinitos segmentos dentro de un segmento dado, AB, de longitud *l*?; si es posible indica cómo, de lo contrario justifica tu respuesta.

9. ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños?

a) una cantidad finita, ¿cuál?

b) una cantidad infinita, ¿por qué?

c) no se puede saber, ¿por qué?



10. ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, 4)?

Justifica tu respuesta.

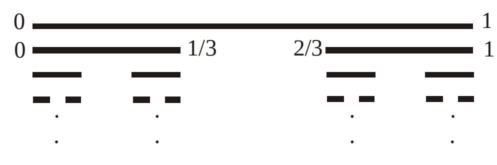
11. Lanzamos un dado infinitas veces y apuntamos el resultado. ¿Cuántos unos habrán salido?, ¿y doses?, ¿y múltiplos de 2? ¿Cuál de los tres conjuntos anteriores contiene más elementos?

Justifica tus respuestas.

12. Describe el comportamiento de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$, definida en $\mathbb{R}$, cuando $x = 0$.

13. ¿Cómo introducirías el concepto de infinito a un estudiante de 2º de E.S.O.?

¿Y a uno de 2º de Bachillerato?



14. Si realizamos el proceso indicado en la figura un número infinito de veces,
a) ¿cuántos segmentos quedarán y cuál será su longitud?
b) ¿cuántos segmentos se habrán borrado?
c) ¿es comparable el conjunto de segmentos que quedan y el de segmentos que se han borrado?, ¿cuál tendrá mayor número de segmentos?

15. ¿Es correcta la expresión 4 + 5 = 4? Si lo es, ¿significaría esto que en un hotel gigantesco con infinitas habitaciones, todas ocupadas, se podrían alojar cinco personas más? Explica tu respuesta.

1 UNI	Cuestionario C2

Nombre y apellidos						Edad	
Curso		Grupo		Calificación en matemáticas en: 2003-04		2004-05	
Centro en el que estudiaste el Bachillerato							

1. Ordena de menor a mayor, según el número de elementos que contienen, los siguientes conjuntos.

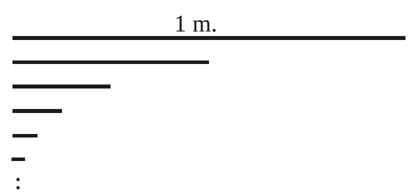
$A = \{x\ 0\mathbb{N}: 1 \# x \# 10\}$ $B = \{x\ 0\mathbb{Q}: 1 \# x \# 10\}$ $C = \{x\ 0\mathbb{R}: 1 \# x \# 10\}$

$D = \{x\ 0\mathbb{R}: 1 \# x \# 100\}$ $E = \{x\ 0\mathbb{N}: 1 \# x < \infty\}$

<u>Justifica tu respuesta</u>.

2. ¿Existe algún número entre $1{,}\widehat{9}$ y 2? ☐ Si. Escribe alguno ☐ No. ¿Por qué?

3. Si tienes el conjunto de segmentos de la figura, donde la longitud de cada uno es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, obtendrás un segmento más largo. ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos?



a) 2 metros ***b)*** Un valor muy próximo a dos metros

c) 3 metros ***d)*** Infinito **e)** Una longitud muy grande

f) Otra respuesta

<u>Explica tu respuesta</u>.

4. Considera la suma $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} + \cdots$; su resultado

a) es un número finito, ¿cuál? **b)** es un número infinito, ¿por qué? **c)** no se puede calcular, ¿por qué?

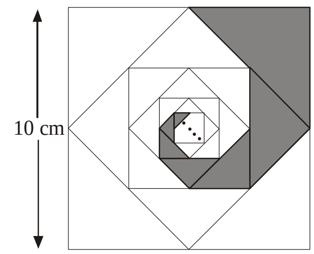
5. Imagina un gran bombo de lotería con todos los números naturales. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un 5?, ¿y la de extraer alguno de los números que hay entre 1 y 10.000.000? **<u>Justifica tu respuesta</u>**.

6. ¿Cuál es el resultado de $0,\widehat{9} \times 0,\widehat{9}$? **Explica tu respuesta**

7. La suma de las áreas de los triángulos sombreados de la figura es:

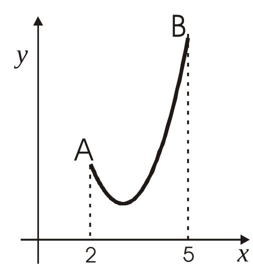
a) Finita *b)* Infinita *c)* No se puede calcular

Justifica tu respuesta.



8. ¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos; en caso contrario, justifica tu respuesta.

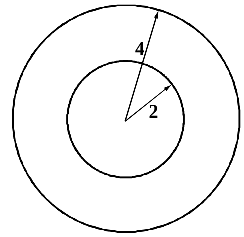
9. Dada la función $y = (x-3)^2 + 1$, definida en el conjunto de los números reales, de la cual se ha representado el tramo de curva AB en la figura adjunta, ¿dónde hay más puntos, en el intervalo [2, 5] de la variable *x* o en el tramo de curva AB? **Justifica tu respuesta**.



10. ***a)*** ¿Cuántos valores (x, y), reales, satisfacen la ecuación x + 2y - 3 = 0? ¿Qué significa dicho resultado?
b) Si *x* sólo pudiese tomar valores en el intervalo [3, 5], ¿cuántas soluciones tendría ahora dicha ecuación?
c) ¿En cuál de los dos casos anteriores se obtiene un número mayor de soluciones, en **a)** o en **b)**?, ¿por qué?

11. Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían. ¿Y en uno de 30 cm de lado? **Explica tus respuestas**.

12. ¿Cómo podrías demostrar que las dos circunferencias siguientes contienen la misma cantidad de puntos?



13. Alguien ha encontrado que $1^3 = 1^2$, $1^3 + 2^3 = (1+2)^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$ y a partir de estos tres ejemplos afirma que los números naturales cumplen esta curiosa propiedad:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots)^2$$

¿Te parece adecuado este método de generalización a partir de tres casos?, ¿qué harías tu para estar convencido de que esa propiedad se cumple siempre?

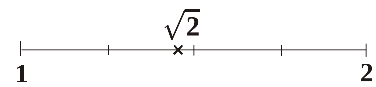
14. Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito.

15. Cuando falta un minuto para las doce de la noche, una lámpara se enciende durante 1/2 minuto, se apaga 1/4 de minuto, se vuelve a encender durante 1/8 de minuto, se apaga por 1/16 y así sucesivamente. A las doce en punto se presiona un interruptor que deja la lámpara fija en el estado en que se encuentre en ese momento final. ¿Estará encendida o apagada? Explica tu respuesta.

1 UNI	Cuestionario C3

Nombre y apellidos				**Edad**	
Curso		**Grupo**		**Calificación en matemáticas en: 2003-04**		**2004-05**	
Centro en el que estudiaste el Bachillerato					

1. Sea $C = \sqrt{2}$. Dividimos el intervalo [1, 2] en cuatro partes iguales y nos quedamos con aquel subintervalo que contenga a C. A continuación repetimos este proceso con el nuevo intervalo y así sucesivamente. ¿Llegará un momento en que uno de los puntos de las divisiones coincida con C? **<u>Justifica tu respuesta</u>**.



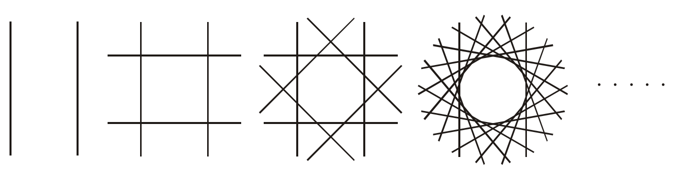
2. ¿Crees que la expresión $0 \times \infty$ tiene algún significado?; ¿qué puedes decir de su resultado? **<u>Justifica tu respuesta</u>**

3. ¿Cómo demostrarías que hay la misma cantidad de números naturales que de números impares?

4. Si efectuamos la suma de los infinitos términos $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, su resultado

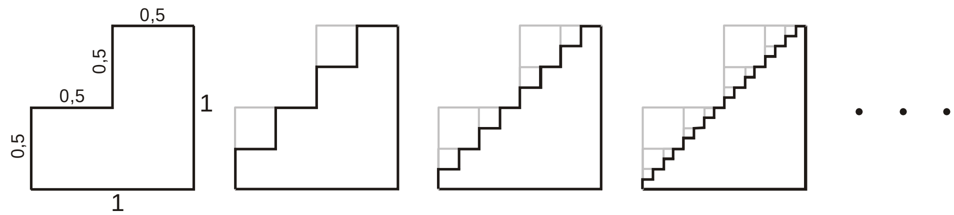
a) Es infinito ***b)*** Es 2 ***c)*** Se acerca todo lo que queramos a un cierto valor, ¿a cuál?
d) Otra respuesta, ¿cuál?
<u>Justifica tu respuesta</u>.

5. Si observas el proceso siguiente, parece que rotando sucesivamente un par de rectas paralelas se puede obtener un círculo. ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.

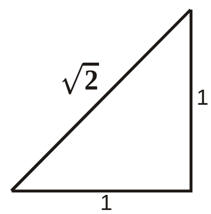


6. ¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos.

7. Observa el proceso siguiente en el que la longitud de la escalera siempre mide 2.



Esta podría ser una forma de "aproximarnos" a la hipotenusa del triángulo rectángulo



pero en tal caso surge una aparente contradicción $\sqrt{2} = 2$. Intenta explicar dicha contradicción.

8. Intenta escribir una definición, lo más rigurosa posible, de infinito.

9. Cuando falta un minuto para las doce de la noche, una lámpara se enciende durante 1/2 minuto, se apaga 1/4 de minuto, se vuelve a encender durante 1/8 de minuto, se apaga por 1/16 y así sucesivamente. A las doce en punto se presiona un interruptor que deja la lámpara fija en el estado en que se encuentre en ese momento final. ¿Estará encendida o apagada? Explica tu respuesta.

10. Se va a celebrar un sorteo en el que se extraerá, al azar, un número real. ¿A qué apostarías?
a) A que sale un número natural **b)** A que sale un número racional **c)** A que sale un número irracional
<u>Justifica tu respuesta</u>.

11. ¿Cómo demostrarías que hay el mismo número de puntos en los intervalos [0, 1] y [2, 5] de $\mathbb{R}$?

12. Imagínate que al conjunto de todos los números naturales, $\mathbb{N}$, le quitamos un millón de números.
a) ¿Cuántos quedan?, ¿por qué?

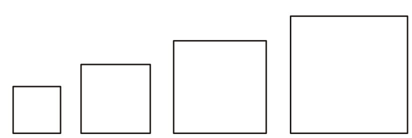
b) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números:
{1, 2, 3, 4,...} ó {1.000.001, 1.000.002, 1.000.003,...}?, ¿por qué?

c) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números:
{1, 2, 3, 4,...} ó {3, 6, 9, 12,...}?, ¿por qué?

13. ¿Es posible encontrar un número decimal que multiplicado por 9 de como resultado 1? Si es posible, indica qué número es ese y cómo lo has obtenido; de lo contrario, justifica tu respuesta.

14. Dada la siguiente familia de cuadrados, cual de las siguientes afirmaciones es correcta. **Justifica tu elección**.

a) El número de puntos que cabe dentro de cada cuadrado depende del tamaño de los puntos
b) Todos los cuadrados contienen en su interior infinitos puntos
c) Todos los cuadrados contienen infinitos puntos pero a medida que aumenta el tamaño del cuadrado el número de puntos es mayor
d) Otra respuesta (indicar)



Capítulo 5

ANÁLISIS CUANTITATIVO DE RESULTADOS: EVOLUCIÓN NIVELAR Y MODELOS INTUITIVOS

Podría hallarme atrapado en una cáscara de nuez y considerarme rey del espacio infinito.

Hamlet

A lo largo del presente capítulo se exponen los resultados del tratamiento de datos y se efectúa un primer análisis cuantitativo de los mismos. El objetivo de éste es el de establecer los patrones de evolución por niveles, así como su grado de estabilidad, en el comportamiento de los sujetos frente a los tópicos establecidos como definidores del desarrollo cognitivo de infinito. Dichos patrones nos permitirán, a su vez, distinguir los diferentes modelos intuitivos detectados a lo largo de este estudio.

5.1. CONCEPTOS Y DEFINICIONES.

Para este análisis cuantitativo es preciso introducir algunos conceptos que nos permitirán describir globalmente el comportamiento de las categorías establecidas en cada caso. Además se incorporarán a estas definiciones otras ya recogidas en capítulos anteriores pertenecientes a investigaciones de otros autores que constituyen la base del trabajo que nos ocupa.

Modelo intuitivo tácito. Cuando nos enfrentamos a una noción que es intuitivamente inaceptable, tendemos a crear deliberada o inconscientemente, sustitutos de dicha noción que sean intuitivamente más accesibles y que Fischbein denomina *modelos intuitivos tácitos* (MIT), que para abreviar llamaremos modelos intuitivos. En ocasiones, frente a un conflicto cognitivo en el que pugnen dos o más modelos intuitivos, uno de ellos prevalece y se le denomina *dominante*.

Recordemos que un modelo intuitivo es, dada su naturaleza, de tipo sensorial, es decir, puede ser percibido, representado o manipulado como cualquier otra realidad concreta[1].

Intuiciones primarias e intuiciones secundarias. Como se ha visto en el capítulo 2, las *intuiciones primarias* (IP) se definen como intuiciones que se desarrollan en los individuos independientemente de cualquier sistema de instrucción como un efecto de la propia experiencia personal. Por su parte, las *intuiciones secundarias* (IS) se definen como aquellas que se adquieren no a través de la experiencia, sino mediante algún tipo de intervención educativa; este tipo de intuiciones se generan cuando el conocimiento pasa de formal a intuitivo.

Esquema conceptual nivelar. La definición de esquema conceptual, de Tall y Vinner, permite estudiar la evolución de un concepto en un sujeto particular a lo largo de su formación matemática durante un periodo determinado de tiempo o bien establecer una descripción instantánea de dicho esquema en el momento en que se lleva a cabo la investigación; en cualquiera de los casos este *esquema conceptual individual* (ECI) no aporta información sobre comportamientos colectivos de grupos de individuos con ciertos rasgos comunes. A partir de esta noción, definiremos *esquema conceptual nivelar* (ECN) o *colectivo* como el esquema conceptual de un grupo de individuos de una misma edad o un mismo nivel educativo[2]. Pertenecerán a dicha estructura cognitiva colectiva todas las imágenes mentales así como propiedades y procesos asociados al concepto que presenten tanto características comunes como diferenciales significativas de los individuos que constituyan el colectivo considerado; también formarán parte de la misma aquellas singularidades que establezcan un vínculo con niveles inferiores o superiores.

Elemento del esquema conceptual nivelar. Se denominará elemento del esquema conceptual nivelar (EECN) a cada una de las imágenes, propiedades o procesos asociados al concepto de infinito, en cualquiera de las representaciones posibles, que tenga una presencia porcentual significativa, a partir del 5%, en el patrón de evolución correspondiente. Desde un punto de vista general distinguiremos los siguientes tipos de elementos:

- **Elemento propio.** Aquel que en cada nivel educativo supera el 15%. Este tipo de elementos será el que defina el esquema conceptual principal de cada uno de los niveles considerados, como se verá en el capítulo 6.
- **Elemento emergente.** Aquel que, a lo largo de la evolución temporal, presenta porcentajes bajos, en torno al 5%, en los niveles inferiores y elevados, por encima del 20%, en los superiores. Los elementos emergentes corresponden la mayor parte de las veces a intuiciones primarias que acaban convirtiéndose en numerosas ocasiones en intuiciones secundarias por efecto del proceso de enseñanza.
- **Elemento residual.** Representa la situación inversa al elemento emergente, es decir, corresponde a aquellos elementos que presentan porcentajes superiores al 20% en los niveles superiores y menores del 5% en los inferiores.

---

1. En el capítulo 2 ya hemos visto que Tall considera que a lo largo de nuestro desarrollo nuestras experiencias establecen nuevas estructuras en el cerebro que se utilizarán para dotar de sentido a experiencias posteriores; a dichas estructuras previas las denomina *met-before* que presentan cierta semejanza con los modelos intuitivos de Fischbein.

2. Podría definirse también para unas condiciones de aprendizaje equivalentes correspondientes a una región, país, sistema educativo, época, etc.

- **Elemento impropio.** Aquel que, aún teniendo presencia en todos los niveles, no supera el 5% en ninguno de ellos.

Patrón de evolución nivelar. Cada una de las categorías establecidas en el análisis que sigue da lugar a un histograma, o serie, que representa su comportamiento temporal. Denominaremos *patrón de evolución nivelar* (PEN) al perfil de dicha serie. Nos indica el tipo de monotonía de la misma y la rapidez con que se incorpora o desaparece un determinado elemento del esquema conceptual; puede presentar diferentes tendencias que aparecen representadas en la Fig. 1:

- Creciente: categoría A
- Decreciente: categoría B
- Creciente/decreciente: categoría C
- Invariante: categoría D
- Indefinido (o irregular): categoría E

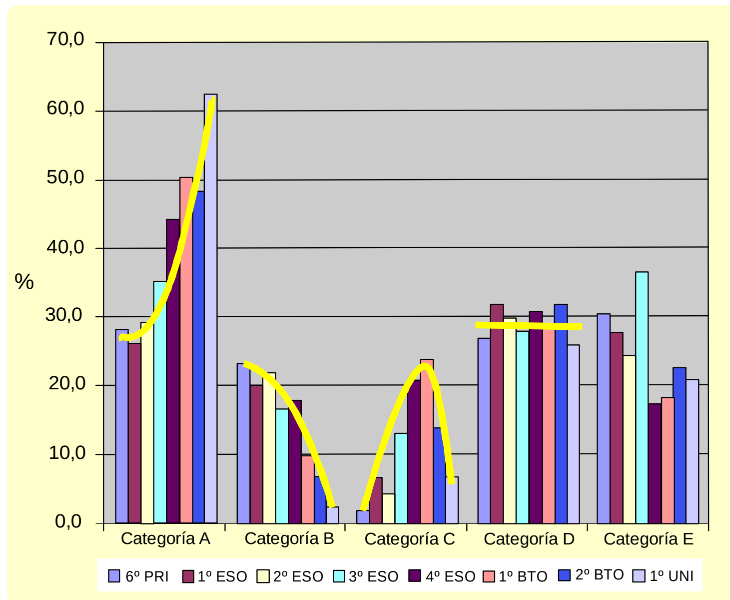


Fig. 1: Patrones de evolución nivelar

Grado de estabilidad. Nos indica el balance porcentual entre los elementos de una serie temporal. Distinguiremos cuatro grados de estabilidad:

- Grado 1. Alto: si la variación porcentual en una serie o una parte de una serie es igual o inferior al 5%. Este grado corresponde al patrón de evolución invariante.
- Grado 2. Medio: si oscila entre el 5% y el 10%
- Grado 3. Bajo: si oscila entre el 10% y el 15%
- Grado 4. Nulo: en cualquier otro caso se dirá que no existe estabilidad del patrón de evolución o bien que es nula.

En cada uno de los apartados siguientes hay una cuestión básica –que se ha aplicado a todos los niveles- en torno a la que gira el análisis principal que recoge los aspectos comunes a todas las edades consideradas; posteriormente se añaden los datos de otras cuestiones que guardan relación con la básica pero aplicadas a diferentes niveles que nos indicarán las peculiaridades de cada uno de ellos.

5.2. CARDINALIDAD Y EQUIPOTENCIA. INFINITO ACTUAL

5.2.1. CONTEXTO NUMÉRICO. ASPECTOS COMUNES.

El tópico más recurrente en las investigaciones sobre el concepto de infinito es, sin duda, el de explorar la vertiente actual de dicha noción a través de la comparación de conjuntos de números o de puntos. Con el fin de ubicar el presente trabajo en dicho contexto, los cuestionarios que se han diseñado contienen diferentes perspectivas de dicho tópico.

6PRIC1P03. En primer lugar consideramos esta cuestión que debieron responder individuos de todos los niveles. En el gráfico 1 se recogen las categorías establecidas para el apartado *a)* de esta pregunta[3].

6PRIC1P03	***Todos los niveles***

Imagínate que al conjunto de todos los números naturales, {1, 2, 3,4, 5, ...}, le quitamos un millón de números.

a) ¿Cuántos quedan?, ¿por qué?
b) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números {1, 2, 3, 4, 5, ...} ó {1.000.001, 1.000.002, 1.000.003, ...}?, ¿por qué?
c) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que tendrá más números {1, 2, 3, 4, 5, ...} ó {3, 6, 9, 12, ...}?, ¿por qué?

Aunque el porcentaje de sujetos que reconoce explícitamente la infinitud de $\mathbb{N}$, sin que se solicite en la pregunta, es considerable, variando desde el 53,4% en 6PRI hasta el 90,1% en 1UNI, se observa en el gráfico 1 cómo quedan modificados tales resultados a la hora de asociar un cardinal al conjunto resultante de eliminar un millón de elementos. Se pueden reconocer tres actitudes que formarán parte del esquema conceptual correspondiente y que se repetirán a lo largo del presente análisis. En primer lugar, están aquellos estudiantes de actitud claramente finitista que asimilan el infinito a un *número muy grande* pero finito –modelo intuitivo *indefinido primario*-, siendo su porcentaje despreciable a partir de 4ESO. En segundo lugar, se encuentran aquellos estudiantes para los que la peculiaridad de un conjunto infinito es su *indefinición* –modelo intuitivo *indefinido secundario*- expresada fundamentalmente de dos

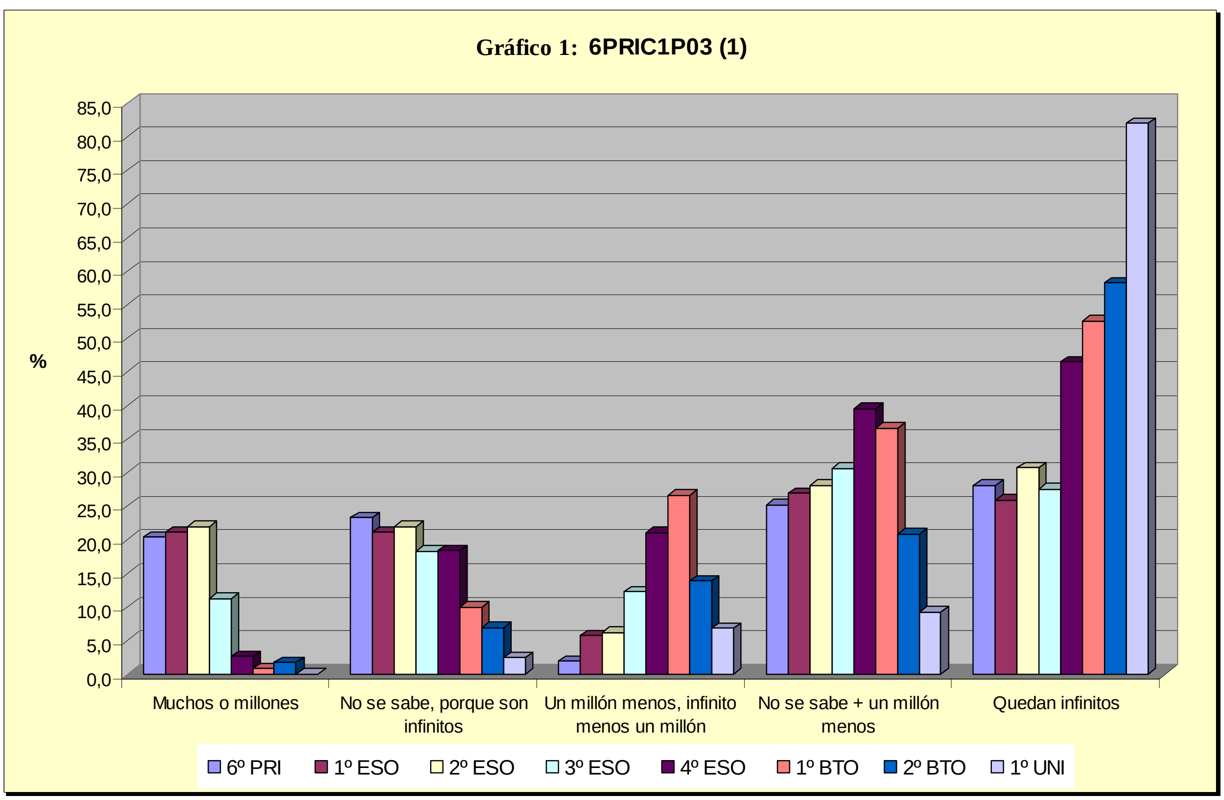


Gráfico 1: 6PRIC1P03 (1)

3. Las tablas con los porcentajes correspondientes se pueden consultar en el *Apéndice VI*, identificándose con la misma nomenclatura que el título de cada gráfico. Respecto de los fondos de color de los histogramas: el color rosado corresponde a las distribuciones de las respuestas de los sujetos bien sean propias de ellos o elegidas entre las propuestas por el enunciado; el color azulado recoge las distribuciones de las justificaciones dadas a una de las respuestas propias o elegidas; y, por último, el color anaranjado presenta distribuciones comparativas entre las respuestas a diferentes ítems.

maneras: “no se sabe” y “un millón menos”; ambas aparecen separadas y agrupadas en el gráfico anterior[4]. En la primera de ellas, se considera el conjunto no como un ente en sí, sino como una cadena o sucesión de la que no se sabe dónde acaba y que, en consecuencia, impide realizar operación alguna con él; en el segundo caso, se admite la operación pero no el resultado dada la indefinición del contenido del conjunto de partida. Se trata de una perspectiva potencial del infinito. Por último, hallamos el *modelo intuitivo infinito = infinito*, establecido por Fischbein, donde se aprecian tres niveles, 6PRI + (1+2+3) ESO, 4ESO + (1+2) BTO y 1UNI, con diferencias porcentuales significativas entre ellos; esta perspectiva actual del infinito como objeto sólo alcanza su plena asimilación en el nivel universitario[5]. Este modelo se podría interpretar también en términos de *conservación* (Falk et al., 1986 y Falk, 1994) y, aunque la idea piagetiana de conservación no supone la adición o sustracción de nada, quizás se debería prestar una cierta consideración psicológica a este concepto de conservación[6].

En consecuencia, a la vista de los resultados representados en el gráfico 1, deducimos que el patrón de evolución de la actitud finitista es estable hasta 3ESO, nivel en el que hay una disminución significativa para convertirse en un elemento residual a partir de 4ESO. El modelo intuitivo infinitista de indefinición también se mantiene estable incluso hasta 3ESO y tras un máximo en 4ESO presenta un patrón de evolución claramente decreciente sin llegar a alcanzar valores despreciables en ninguno de los niveles. Por último, la actitud infinitista actual presenta, como se ha indicado, tres regiones muy diferenciadas; una con un elevado grado de estabilidad durante los cuatro primeros niveles, otra también muy estable entre 4ESO y 2BTO y, finalmente, 1UNI.

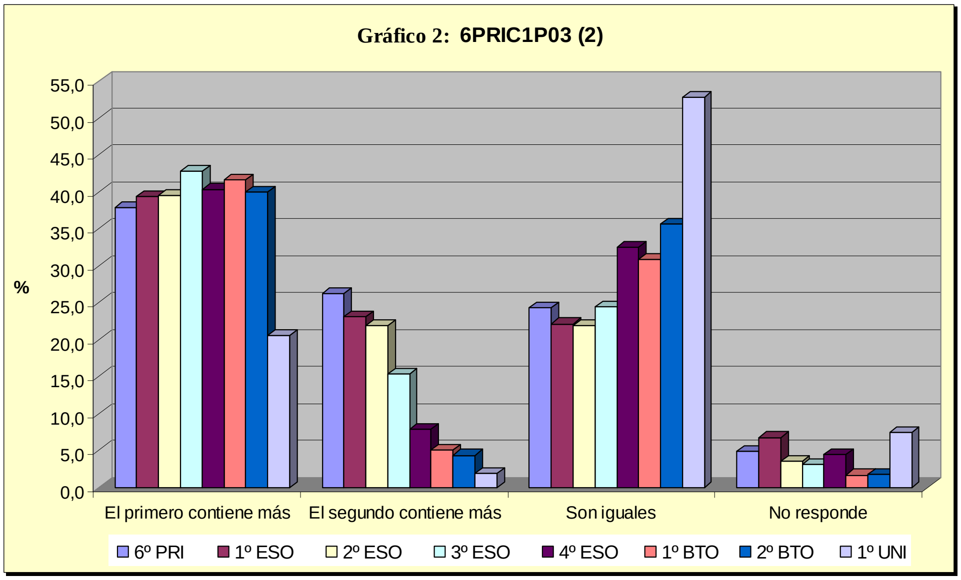
El primer apartado supone, de alguna manera, una comparación entre dos conjuntos pero puesto que tal requerimiento no es explícito, se plantea la segunda pregunta. En el gráfico 2 se presenta la distribución de las respuestas. Como podemos observar, sólo uno de los niveles, 1UNI, alcanza el 50% en una de las categorías. Si comparamos estos resultados con los del gráfico anterior destaca el hecho de que, a pesar del reconocimiento de la infinitud de ambos conjuntos, la pauta “el todo es mayor que la parte” implícita en la respuesta “el primero contiene más”, que denominaremos *modelo intuitivo de inclusión*, influye de manera dominante a excepción del nivel universitario. El patrón de evolución de esta categoría presenta una elevada estabilidad en torno al 40 % desde los once a los dieciocho años. En cuanto a la categoría “son iguales” que admite la equivalencia entre los dos conjuntos, podemos distinguir tres estadios diferenciados: hasta 3ESO, desde 4ESO hasta 2BTO y 1UNI.

---

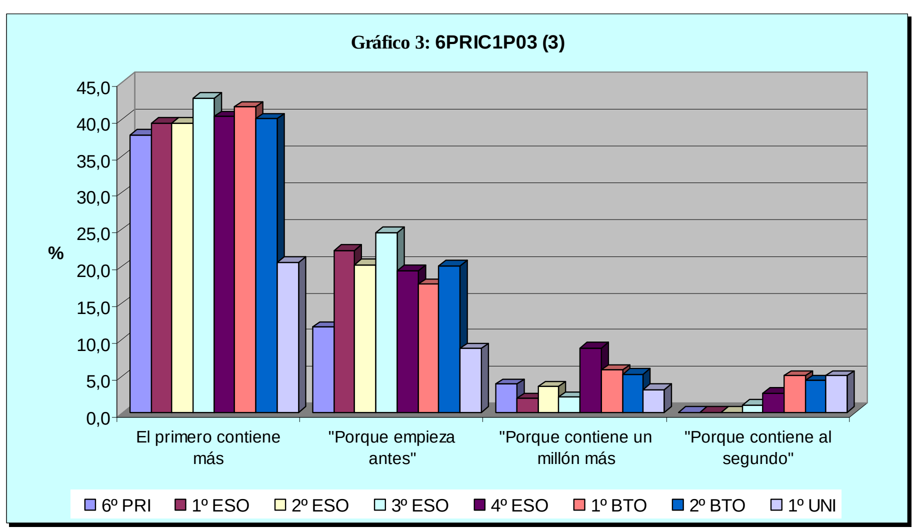
4. En Boero et al. (2003) se recogen algunas ambigüedades (también consideradas por Monaghan (2001): en particular la frase “no puedo contar todos los números” podría significar “no tengo suficiente tiempo para contar todos los números, hay demasiados” o bien “no puedo llegar hasta el último número”. Otra ambigüedad depende del uso de “infinito” como nombre (“infinity” en inglés) y como adjetivo (“infinite” en inglés). El adjetivo “infinito” es empleado tanto para el número 1,111… como para la sucesión de los números naturales: 1, 2, 3,…

5. Sbaragli (2004), siguiendo a Arrigo y D’Amore (2002), denomina a este fenómeno “aplanamiento” o “uniformidad” (“flattening”) y ha sido ya tratado en otras publicaciones (Waldegg (1993), Tsamir y Tirosh (1994), Fischbein, Jehiam y Cohen (1995). Consiste en considerar que todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad, es decir que se podría establecer una correspondencia entre todos los conjuntos infinitos. La literatura sobre este tema ha mostrado que una vez que los estudiantes han aceptado que dos conjuntos tales como $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, por ejemplo, tienen el mismo cardinal, bien con la ayuda del investigador bien del profesor, es mucho más común que los estudiantes tiendan a considerar como cierta la generalización de que todos los conjuntos infinitos deben tener el mismo cardinal. Para Arrigo y D’Amore (1999, 2002), este error no se debe sólo a obstáculos epistemológicos, cuya evidencia encontramos en la historia de las matemáticas, sino que también se debe a obstáculos didácticos.

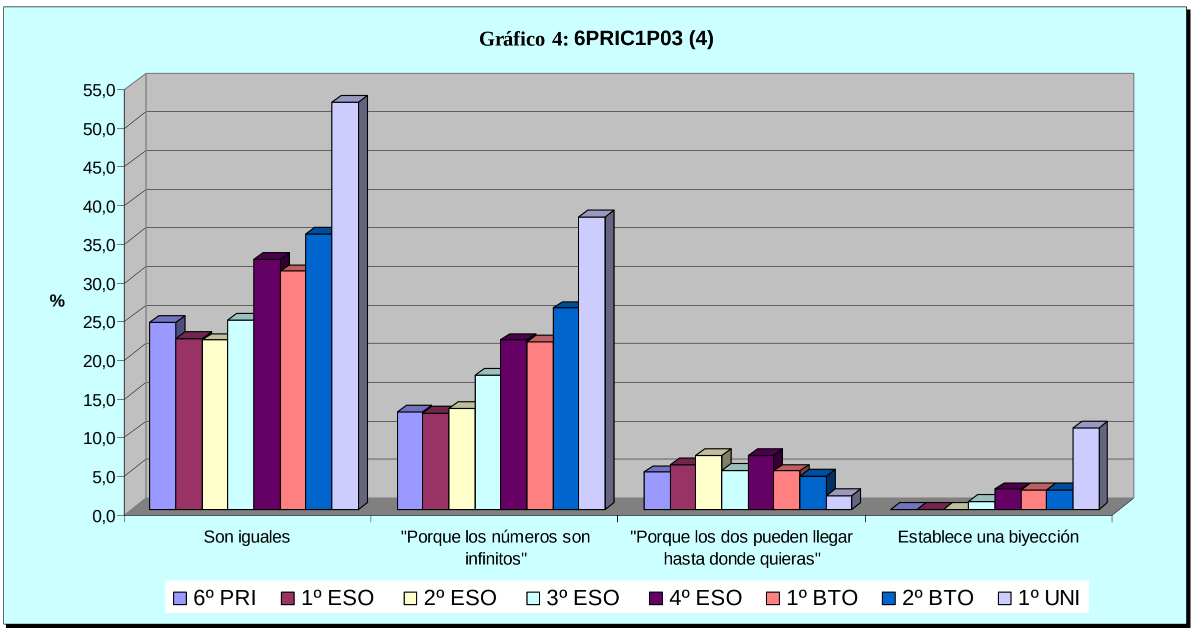
6. En Singer y Voica (2003) se recoge una cuestión equivalente bajo un contexto geométrico: *Si de un eje cortamos un segmento de 1 Km. de longitud, obtenemos otro eje. ¿Cuál es más largo?* Una de las respuestas “sería lo mismo… el primer eje debería ser más largo porque tienen 1 Km. más pero esto parece lo mismo que cuando comparamos el conjunto de los números racionales entre 2 y 5 y el correspondiente a 2 y 3 que había los mismos en ambos…”



En el gráfico 3 se presentan las razones más significativas aportadas por los estudiantes respecto a las dos primeras categorías. En la que se recoge con la denominación "el primero contiene más", todas ellas corresponden a diferentes versiones del *modelo intuitivo de inclusión* recogido en diversas investigaciones ya consideradas en el capítulo 3 y heredado de la fuerte influencia ejercida por la relación entre conjuntos y subconjuntos finitos propios. Observamos que el argumento con mayor presencia se basa en que "el primer conjunto empieza antes" aunque su patrón de evolución es claramente irregular con grado nulo de estabilidad. Tras esta irregularidad encontramos la contradicción latente entre la interpretación potencial y actual de la noción de infinito. Por un lado, la expresión "empezar antes que" supone entender el conjunto como una sucesión dinámica de elementos mientras que, por otro, la idea de "contener más que", implícita en dicho argumento, nos lleva a considerar el conjunto y su subconjunto como entes únicos entre los que se puede establecer una relación de inclusión. Por su parte, la elección del segundo conjunto sólo es de destacar hasta 3ESO, convirtiéndose en un elemento residual en los niveles superiores; en la mayor parte de los casos se justifica porque "los números son más grandes" o incluso porque "tienen más cifras"; por lo tanto, la representación de ambos conjuntos en este enunciado ha inducido a un buen número de sujetos a una transposición en los términos de la pregunta "¿en qué conjunto hay más?" por "¿en qué conjunto son mayores?". Este hecho abunda, de nuevo, en la idea de proceso ya que se considera que el infinito es un objetivo a alcanzar y que, por lo tanto, con números mayores se alcanzará antes. La íntima relación entre la naturaleza espacial –*estar contenidos en* o *hallarse en*- y temporal –*llegar antes a, empezar, terminar*- de los elementos de un conjunto será una de las ideas más recurrentes a lo largo de este trabajo.

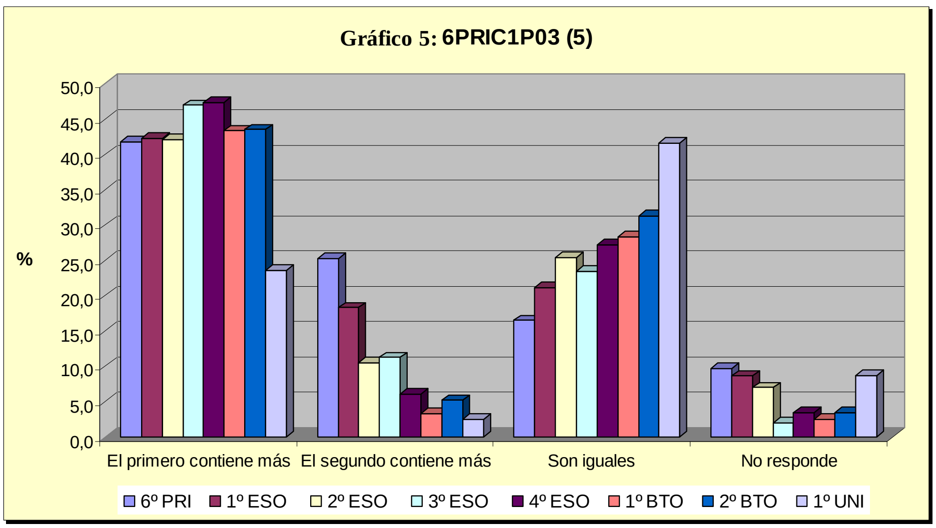


En lo que se refiere a la equivalencia de estos dos conjuntos, véase el gráfico 4, la mayor parte de los sujetos se remiten al *modelo intuitivo infinito = infinito* ya mencionado y se reproducen las mismas regiones de estabilidad en el patrón de evolución ya indicadas anteriormente pero con porcentajes más reducidos. Bajo esta representación se favorece la interpretación actual del infinito que, al menos a partir de 4ESO, se convierte en un elemento propio del esquema conceptual. Por otro lado, una pequeña parte de los estudiantes se afirma en el carácter dinámico o potencial del conjunto como una sucesión de números que continúa indefinidamente para justificar la equivalencia de cardinales; en este caso sólo importa el final de dicha sucesión que se supone es el mismo para cualquier colección secuencial de números; esta categoría no arroja valores significativos en ninguno de los niveles pero es de destacar su elevado grado de estabilidad que asegura su presencia a cualquier edad. Por último, podemos ver que sólo en 1UNI



comienza a tener valores significativos el porcentaje de individuos que establece una correspondencia uno a uno dotando al infinito de su carácter actual, lo que hasta ese momento supone un elemento emergente que aún no queda consolidado como un elemento propio del esquema conceptual en el nivel universitario considerado.

El tercer apartado de este ítem modifica una de las condiciones de los conjuntos a comparar con el fin de actuar sobre las posibles justificaciones a la hora de elegir uno u otro conjunto como el de mayor cardinal. Ahora el conjunto que se sustrae de $\mathbb{N}$ es infinito a diferencia del millón de números del caso anterior. En el gráfico 5 se pueden observar los resultados obtenidos para las mismas categorías del apartado (*b*) recogidas en el gráfico 2 que conviene tener presente. A pesar de este cambio, los patrones de evolución no varían significativamente y sólo lo hace de manera sensible el grado de estabilidad de cada una de las categorías. Así, para la categoría “el primero contiene más” la estabilidad de las respuestas pasa de grado 1 a 2 convirtiéndose en relevante la irregularidad de la distribución lo que supone una mayor presencia de modelos contradictorios tales como el modelo intuitivo de inclusión y el de infinito = infinito. Por su parte, la segunda categoría también conserva el patrón de evolución decreciente encontrado en el apartado (*b*) si bien ha perdido el tramo de estabilidad entre 6PRI y 2ESO y presenta ahora una cierta irregularidad. En este caso, el argumento “porque son números mayores” ofrece porcentajes inferiores aún a los recogidos en el caso anterior. Y, finalmente, en cuanto a la respuesta “son iguales” también reproduce el patrón de evolución ya encontrado en el gráfico 2 pero, no obstante, hemos de destacar una caída en el nivel 1UNI de casi un 15% y de un 8% en 6PRI en el presente caso. Si comparamos los porcentajes de la categoría “no responde” podemos hallar una explicación para esta variación en 6PRI pues el mayor grado de abstracción ha provocado un incremento en el número de sujetos que no han respondido. En cambio, en el nivel universitario que ha mantenido este porcentaje hemos de buscar la explicación bajo otro punto de vista. Si se interpretan ambas cuestiones como una “sustracción” de elementos de N, en el primer caso se trata de un conjunto finito mientras que en el segundo es infinito; esto que en niveles inferiores puede crear una ligera incertidumbre en niveles superiores sugiere la indeterminación ∞ - ∞ y, en consecuencia, un mayor grado de indecisión del alumno a la hora de adoptar una postura ante un salto conceptual importante. Por otra parte, como ya se ha visto en el Capítulo 3, Duval (1983) mantiene que la dificultad para reconocer la biyección entre los elementos de un conjunto infinito y los de uno de sus subconjuntos propios se halla en un *obstáculo de desdoblamiento,* lo que supone que ciertos elementos son interpretados desde puntos de vista diferentes, es decir parecen intervenir dos veces. Así el número “6” interviene en la sucesión de los naturales como el entero “sucesor de 5” mientras que en la sucesión de los múltiplos de tres lo hace como el entero “segundo múltiplo de 3”. Los hallazgos de Duval sugieren que las decisiones de los estudiantes relacionados con la equivalencia de dos conjuntos infinitos están determinadas no sólo por la relación entre ambos conjuntos sino también por su representación.



Los gráficos 6 y 7 nos permiten profundizar algo más en las distribuciones anteriores. En esta ocasión si comparamos los resultados del gráfico 6 con los correspondientes del gráfico 3 se pone de manifiesto el predomino de la interpretación secuencial de los conjuntos para justificar esta respuesta. Así, las expresiones “el primero contiene más porque va de uno en uno”, “porque no se salta números” o bien “porque empieza antes” son las más recurridas. Una vez más la idea de proceso asociada al infinito potencial sirve a los estudiantes para eludir la contraintuitiva equipotencia de ambos conjuntos. Pero también podemos interpretar los argumentos anteriores como una forma de entender la inclusión de un conjunto en otro mayor lo que implicaría una versión actual de infinito. Evidentemente, desde esta óptica se produce una disminución porcentual considerable de la respuesta “porque empieza antes”, como se puede observar en el gráfico 6. En el próximo capítulo, donde se analizará con mayor profundidad el uso del lenguaje de los estudiantes en relación con el infinito, volveremos a retomar este aspecto. Otro hecho importante es el elevado grado de estabilidad, excluyendo el nivel universitario, que se da en esta ocasión en las dos primeras categorías comentadas frente a las correspondientes en el apartado (*b*).

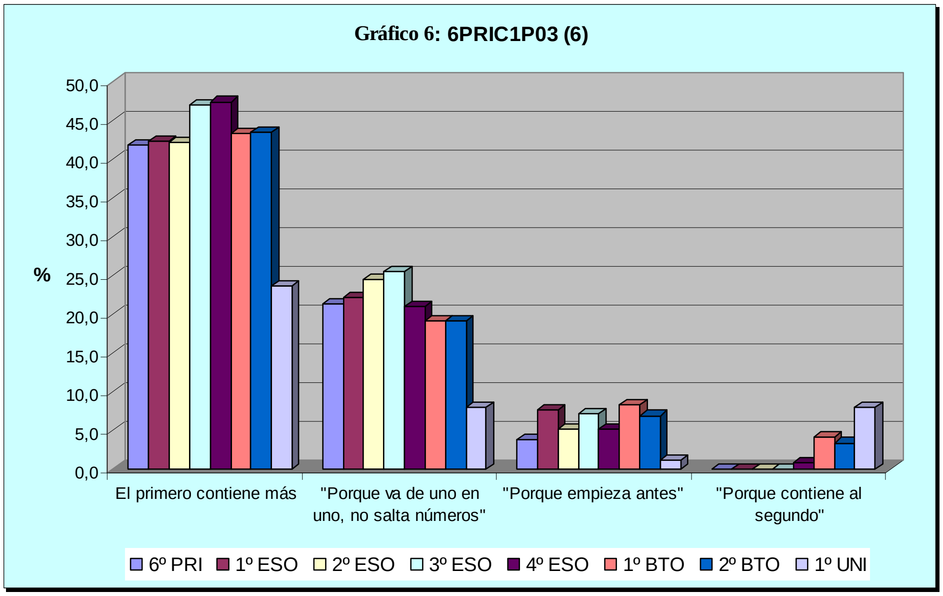


Gráfico 6: 6PRIC1P03 (6)

Y en cuanto a la categoría "son iguales", véase el gráfico 7, debemos destacar el hecho de que desaparece como un posible argumento el carácter dinámico de ambas colecciones numéricas. Las dos razones principales aportadas por los estudiantes conservan sus patrones de evolución con la ya comentada reducción porcentual en 1UNI. También es posible observar una mayor regularidad, en sentido creciente, en el patrón de evolución de la categoría "porque los números son infinitos" que descubre una vez más el modelo intuitivo de equivalencia entre todos los conjuntos infinitos. En el gráfico 8 se pueden apreciar más claramente las diferencias entre las respuestas del apartado (*b*), las tres primeras series, y del apartado (*c*), las tres últimas. La primera serie de cada uno de los apartados, "ambos infinitos", indica los porcentajes de aquellos estudiantes que admiten la infinitud de ambos conjuntos pero sin llegar a establecer la equivalencia y la tercera serie, "ambos igual", nos indica aquellos que afirman la equivalencia pero no aportan justificación alguna. En general, han influido en las respuestas el hecho de que la diferencia entre ambos conjuntos fuese una cantidad finita o que fuese infinita, especialmente en 1UNI en las dos primeras categorías. En particular, es destacar dicha influencia en la categoría "ambos infinitos"; si bien es cierto que no se pregunta por el cardinal de los conjuntos, el patrón de evolución modifica notablemente si no su carácter creciente, sí los valores que alcanza así como el grado de estabilidad que es elevado en los cuatro primeros niveles del apartado (*b*) y en los cuatro últimos del apartado (*c*). También se ve alterada la estabilidad en la categoría "ambos igual porque son infinitos" y, por último, en la serie "ambos igual" que presenta en el primer caso un patrón de evolución irregular, si bien con un grado de estabilidad medio, hay

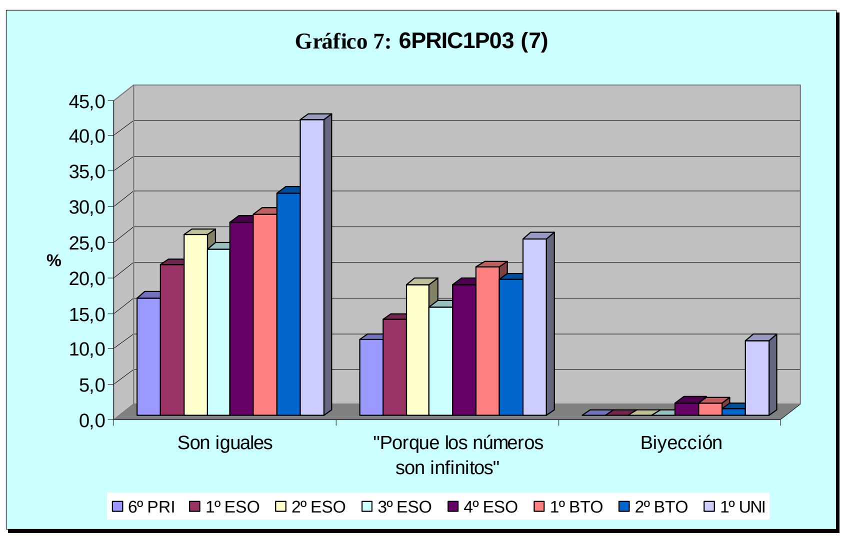
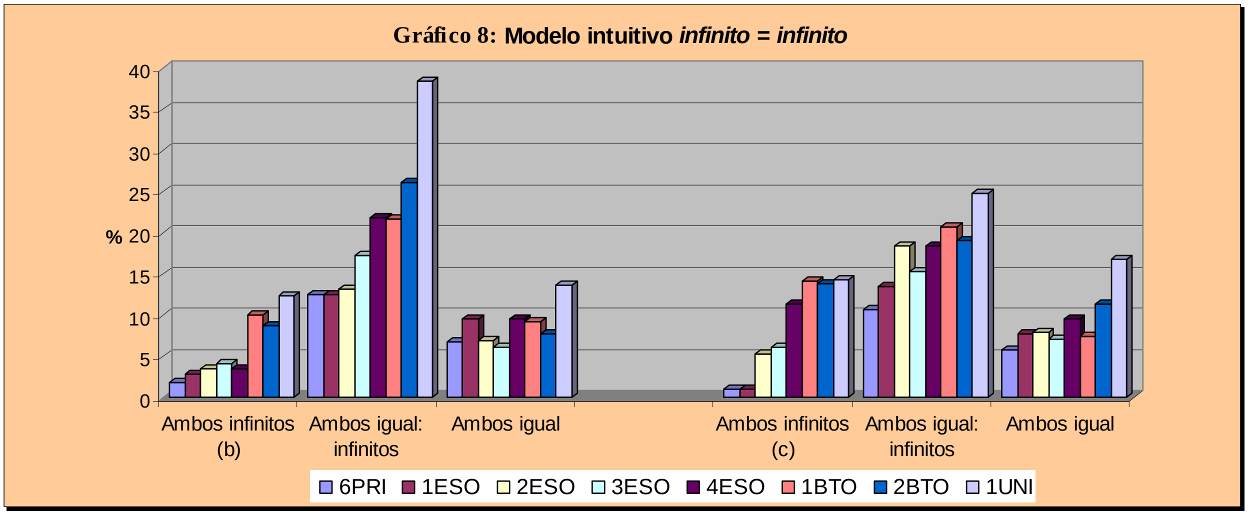


Gráfico 7: 6PRIC1P03 (7)

una redistribución pasando a un patrón creciente que mantiene prácticamente su grado de estabilidad. En consecuencia, junto a la dependencia del contexto, y de la representación de los conjuntos, detectada en numerosas investigaciones ya referidas es preciso constatar que dentro de un mismo contexto existe una dependencia de variables más finas que actúan sobre los modelos intuitivos.



Podemos concluir, por lo tanto, que frente a la comparación de conjuntos infinitos discretos, el modelo intuitivo predominante para justificar un orden entre ellos es el de la extensión del principio inclusión del caso finito, mientras que si se trata de demostrar la equivalencia se recurre la igualdad, a veces aproximada, entre infinitos. Tsamir (1999) también recoge estos dos métodos como los más utilizados por los sujetos de su investigación, futuros profesores, mientras que apenas hicieron uso de la correspondencia 1:1. Existe un rechazo a usar el criterio de la biyección para comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos propios, aun en el caso de que haya habido una instrucción al respecto (Waldegg, 1996). Por otra parte, algunos estudiantes utilizan diferentes métodos según el problema en cuestión que aborden, despreciando las consecuencias de las incompatibilidades resultantes (Tsamir, 1999); se trata, como ya hemos visto, del fenómeno de *compartimentalización* del conocimiento (Amit y Vinner, 1990), es decir, el tratamiento de cada problema como uno nuevo, ignorando las conexiones existentes con un marco de referencia común. Así hay sujetos que mientras en un caso mantienen que “los conjuntos infinitos no se pueden comparar” en otro concluyen que el número de elementos de dos conjuntos es o bien el mismo o bien diferente.

Otras investigaciones. Un gran número de autores plantean en sus investigaciones la comparación de conjuntos numéricos infinitos (Borasi, 1985; Fischbein, 1989; Waldegg, 1996; Turégano, 1996; Tirosh y Tsamir, 1996; Tsamir, 1999; Monaghan, 2001; Singer y Voica, 2003; Sbaragli, 2004). Consideraremos algunos de los resultados registrados por estos autores con el fin de establecer una referencia con los presentados anteriormente; los cuestionarios correspondientes a aquellas publicaciones que no recogen resultados porcentuales se pueden consultar en el Capítulo 3. Fischbein et al. (1979) solicita de los sujetos de su investigación la comparación entre los números naturales y los pares. En la tabla siguiente podemos ver cuáles son las categorías que establecen estos autores y sus porcentajes. En este estudio, sólo un 10 % de los sujetos considera que los dos conjuntos son “igualmente numerosos”[7] porque (1) en ambos “hay un número infinito de elementos”, (2) si consideramos sólo un conjunto limitado, ℕ es mayor, de lo contrario los conjuntos son “igualmente numerosos” o infinitos y (3) podemos encontrar una correspondencia uno a uno entre los dos conjuntos -0,4 %-. Por su parte, ℕ es mayor que 𝔻 para un 70% de los estudiantes porque (1) en ambos grupos hay un número infinito de elementos pero ℕ contiene a 𝔻, (2) ℕ contiene a 𝔻 -más de la mitad lo justifican de esta manera- y (3) hay más elementos en ℕ ya que ℕ es un conjunto infinito. Resultados similares obtienen Moreno y Waldegg (1991). La comparación de estos resultados con los obtenidos en nuestro estudio para edades correspondientes no arroja diferencias cualitativas, pero si algunas cuantitativas; si unimos las dos primeras categorías que aparecen en la tabla, observamos que son algo inferiores a las de nuestras categorías “ambos infinitos” y “ambos son iguales: infinitos” para el caso c). Las diferencias en la categoría “el conjunto de los números naturales es mayor” son significativamente superiores en el caso de Fischbein et al. (1979).

Considera el conjunto de los números naturales N = {1, 2, 3, 4,...} y el conjunto de los números pares D = {2, 4, 6, 8,...} ¿Cuál de los dos conjuntos contiene más elementos? Explica tu respuesta	**Fischbein et al. (1979)**				
Edad	**10-11**	**11-12**	**12-13**	**13-14**	**14-15**
N	**46**	**58**	**152**	**104**	**110**
Hay un número infinito de elementos en ambos conjuntos	2,2	5,2	5,3	3,8	4,6
Hay un número infinito de elementos en ambos conjuntos pero no se cuál es el mayor	10,9	5,2	5,3	2,9	4,6
El conjunto de los números naturales es “el mayor”	60,9	77,6	63,2	80,8	73,4
El conjunto de los números pares es “el mayor”	10,9	6,9	15,7	8,7	4,6
No responde	15,1	5,1	15,7	3,8	12,8

Waldegg (1996), en lo que se refiere a conjuntos discretos, recoge los porcentajes de aciertos que aparecen en la tabla adjunta. Para Moreno y Waldegg (1991) uno de los conflictos a los que se enfrenta un estudiante cuando comienza a tratar con conjuntos infinitos es aceptar que el todo puede ser igual a una de sus partes. En la raíz del conflicto se haya la experiencia cotidiana en la que evidentemente el todo siempre es mayor que cualquiera de sus partes. Esta experiencia determinará el esquema conceptual que genera el individuo. En esta ocasión los porcentajes de sujetos que reconocen la biyección entre los conjuntos propuestos son muy superiores a los obtenidos en nuestro estudio.

15 a 18 años			**Waldegg (1996)**
Conjuntos	**Dificultad**	**Preguntas**	**Aciertos (%)**
Naturales / Pares	Estructura de “fila”	¿Hay una biyección? ¿Qué biyección? ¿Son “iguales”?	48 39 32
Naturales / Enteros pares	No hay primer elemento	¿Son ifninitos? ¿Hay una biyección? ¿Qué biyección? ¿Son “iguales”?	33 95 4 32
Naturales / Potencias de diez	Estructura de “fila”	¿Hay una biyección? ¿Qué biyección? ¿Son “iguales”?	96 56 30
Naturales / Naturales sin el cero	Un solo elemento de “más”	¿Son “iguales”?	47

Turégano (1996) en las cuestiones donde solicita la comparación del conjunto de los números naturales con el conjunto de sus cubos así como con el conjunto de los números pares

7. En este trabajo se dan porcentajes globales de algunos tipos de respuestas, media de todas las edades, lo que supone una dispersión considerable y una importante pérdida de información; no obstante, los autores justifican esta decisión en base a su conjetura y posterior confirmación de la estabilidad que en estas edades presenta el concepto de infinito.

establece las categorías que aparecen en la tabla anterior con los porcentajes indicados. De nuevo en este trabajo se registran respuestas y argumentos semejantes a los hallados en nuestro trabajo: "aunque los dos son infinitos, hay algunos números de $\mathbb{N}$ que no están en $\mathbb{C}$", "los dos son infinitos pero al no tener ninguno de los dos conjuntos un número concreto de elementos, no sabemos cuál tiene más", "son infinitos, pero los naturales tienen más elementos que los pares ya que los naturales son pares e impares", "los dos conjuntos son infinitos porque cada número tiene su cubo", "$\mathbb{N}$ y $\mathbb{C}$ son infinitos ya que ordenados tienen su siguiente", etc. No obstante, las diferencias porcentuales entre ambos son considerables en niveles educativos correspondientes: 1BUP y 3ESO.

14 a 15 años	**n = 89**		**Turégano (1996)**
Comparación de $\mathbb{N}$ y sus cubos		**Comparación de $\mathbb{N}$ y los números pares**	
Los dos conjuntos tienen el mismo número de elementos: infinitos	75,3	Los dos conjuntos tienen el mismo número de elementos: infinitos	53,9
Los dos conjuntos tienen infinitos elementos pero no se sabe cuál tiene mayor número	4,5	Los dos conjuntos tienen infinitos elementos pero no se sabe cuál tiene mayor número	16,9
$\mathbb{N}$ tiene más elementos que el conjunto de sus cubos	2,2	$\mathbb{N}$ tiene más elementos que el conjunto de los pares	21,3
El conjunto de los cubos tiene más elementos que $\mathbb{N}$	3,4	El conjunto de los pares tiene más elementos que $\mathbb{N}$	1,1

Tsamir (1999), por su parte, registra hasta cinco posibles justificaciones para la respuesta "igual" como son "todos los infinitos son iguales", correspondencia uno a uno, inclusión, "los conjuntos infinitos son incomparables" y "los conjuntos acotados, como los segmentos, deben tener menos elementos que los conjuntos que no están acotados, como los números naturales". Tirosh y Tsamir (1996) obtienen que las decisiones de estudiantes de 15 a 18 años sobre si dos conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos dependen bastante de las representaciones específicas de los conjuntos. Por ejemplo, una representación numérica-horizontal como {1, 2, 3, 4,…} y {4, 8, 12, 16,…}, obtiene porcentajes elevados de la respuesta "tienen diferente número de elementos". En torno al 70% de los estudiantes mantienen que ambos conjuntos no son equivalentes y lo justifican a partir de consideraciones del tipo parte-todo. En cambio una representación geométrica consistente en un dibujo esquemático arroja porcentajes elevados, aproximadamente el 80%, del tipo de respuesta "tienen el mismo número de elementos" acompañadas de justificaciones basadas en una correspondencia uno a uno.

16 a 18 años	**Monaghan (2001)**
Contexto numérico	**n=190**
Considera las dos sucesiones de números 1, 2, 3, 4,... y 2, 4, 6, 8,... Hay	
Más en la primera fila	16,3
Más en la segunda fila	2,1
Los mismos en ambas	45,3
No se pueden comparar	34,7

Monaghan (2001) también introduce en su cuestionario la comparación de conjuntos tantos continuos como discretos situados bajo diferentes contextos; en la tabla se recogen los porcentajes correspondientes a un contexto numérico. De estos resultados destacamos su semejanza con el estudio anterior y las notables diferencias con el que nos ocupa y el realizado por Fischbein et al. (1979). Singer y Voica (2003) plantean a estudiantes de 10 a 11 años la cuestión: *¿Cuál de los conjuntos {0, 3, 6, 9, 12, 15,…}* ó *{1, 2, 3, 4, 5,…} tiene más elementos?* Tras la controversia inicial que provocó esta pregunta, la primera reacción fue razonar sobre un caso finito. Con este tipo de argumentos los sujetos mantenían que el segundo conjunto tenía más elementos que el primero. La discusión en el grupo continuó con la afirmación "no hay reglas, de manera que no pueden compararse" y, finalmente, una alumna apuntó algo parecido a una correspondencia entre ambos conjuntos. Para los autores, el debate estimuló su intuición y les condujo a conectar intuiciones con conocimiento.

Sbaragli (2004) encuentra, que frente a la comparación de pares e impares, un 25% de los sujetos, profesores de primaria, mantiene la imposibilidad de comparar conjuntos infinitos o bien no saben responder. Y ante la pregunta ¿hay más múltiplos de 15 ó números naturales?, algo más del 60 % de las respuestas apunta que hay más números naturales y cerca de un 20 % que no se pueden comparar conjuntos infinitos; sólo un 12 % mantiene que los dos conjuntos son infinitos.

5.2.2. CONTEXTO NUMÉRICO. ASPECTOS ESPECÍFICOS.

Las cuestiones que analizaremos a continuación recogen, como ya hemos indicado, peculiaridades del ítem básico o principal que nos permiten profundizar en aspectos particulares.

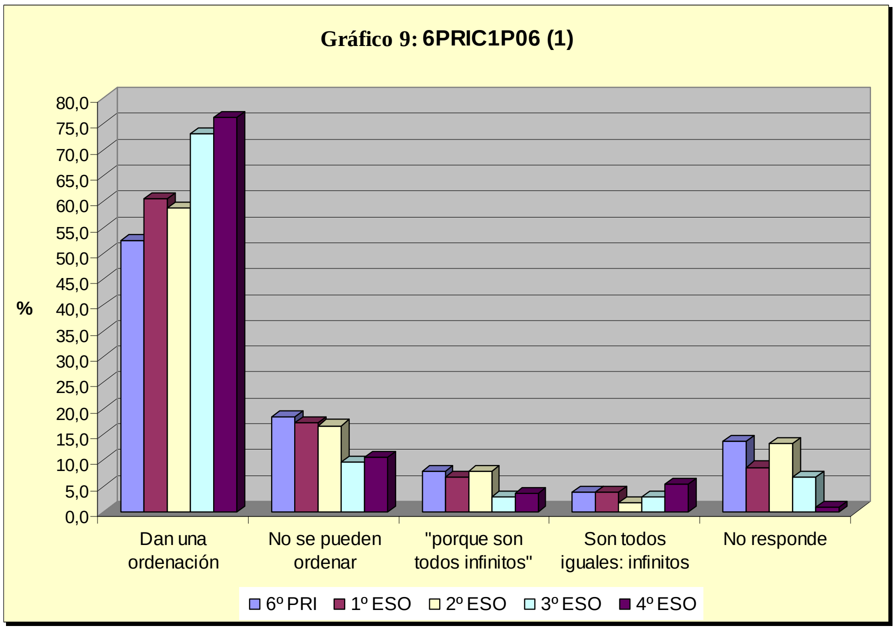
6PRIC1P06	***PRI + ESO***

Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos y explica tu respuesta:
a) Número de estrellas
b) Número de granos de arena en la Tierra
c) Números naturales, {1, 2, 3, 4, 5,...}
d) Número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm. de lado
e) Número de células que forman el cuerpo humano

6PRIC1P06. Normalmente los contextos en los que se solicita la comparación de conjuntos infinitos sólo implican conjuntos infinitos como ocurre, por ejemplo, en todas las situaciones que hemos tratado hasta ahora. Hemos podido comprobar que en tal caso, la distribución de los comportamientos de los sujetos se ajusta a ciertas pautas, los modelos intuitivos. En particular, aquellos que admiten la infinitud de los conjuntos o bien inducen axiomáticamente su equivalencia, *modelo infinito = infinito*, o bien declaran la imposibilidad de resolver el problema debido a la indefinición que supone tal magnitud, *modelo de indefinición*, o bien recurren a la ley finitista del "todo es mayor que la parte", *modelo inclusión*. Es por ello que se ha considerado pertinente situar algún conjunto infinito entre otros finitos aunque muy numerosos, con el fin de observar la influencia que ejerce esta componente sobre los patrones de evolución de los modelos anteriores. Para Falk et al. (1986) el estadio intermedio entre dominar los esquemas de los números finitos y la ruptura que supone el infinito tiene un interés especial: *es preciso considerar el salto discontinuo entre estos dos tipos de conceptos, ya que la emergencia del infinito no tiene un comienzo definido.*

En primer lugar podemos apreciar en el gráfico 9 que entre un 10 y un 20% aproximadamente de los alumnos no dan una ordenación con un patrón de evolución decreciente pero un grado de estabilidad entre medio y alto, mientras que entre un 50 y un 75% sí establecen un orden entre los conjuntos del enunciado con un patrón de evolución claramente creciente y un cierto grado de estabilidad en los tres primeros niveles por una parte y en los dos últimos por otra. Pasemos a considerar algunas de las razones aportadas. De nuevo podemos observar que la mayoría justifica la imposibilidad de ordenación mediante el modelo infinito=infinito, bien "porque son todos infinitos" bien "porque son todos iguales". Resulta, por lo tanto, que uno de cada diez sujetos entre

11 y 15 años, si sumamos las dos series presentes en el gráfico, equiparan conjuntos finitos[8], con un cardinal grande o muy grande, a conjuntos infinitos, en particular al conjunto de los números naturales. El patrón de evolución de dicha categoría es prácticamente invariante, es decir, presenta un grado de estabilidad elevado. Por otra parte, también se halla presente en la categoría "no se pueden ordenar" el modelo que afirma el carácter indefinido del infinito que si bien no se refleja explícitamente en las respuestas de los estudiantes si se ha registrado en las entrevistas[9].

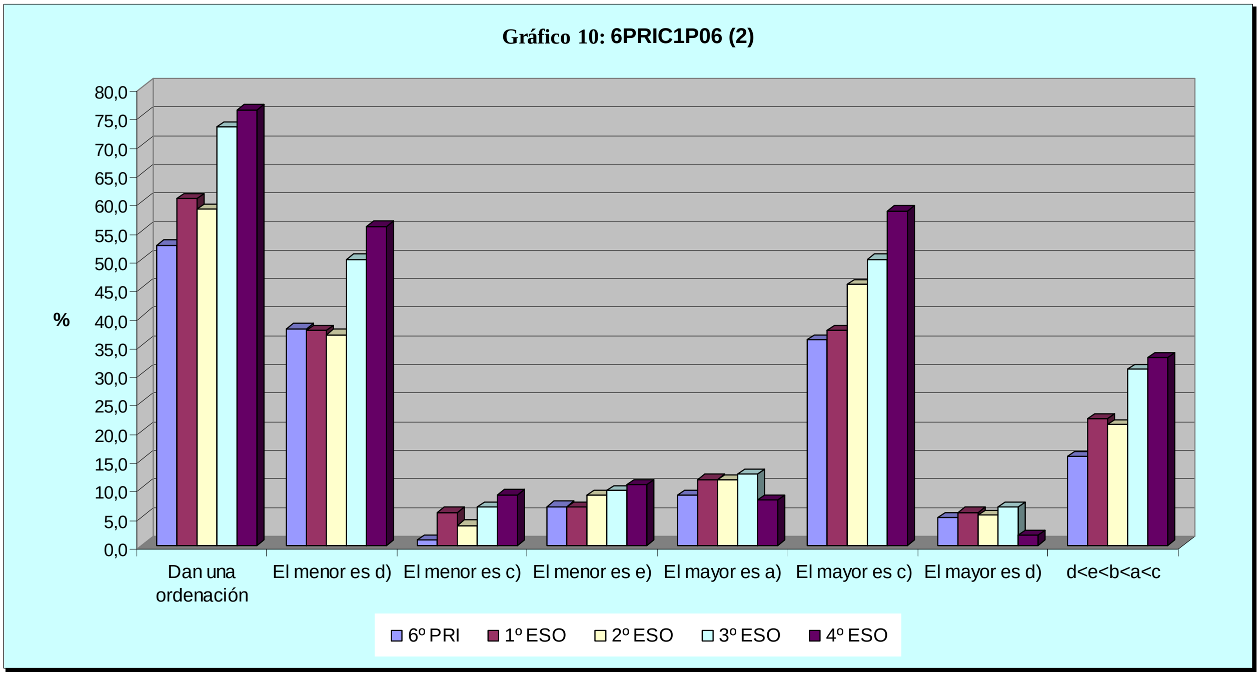


En segundo lugar, analizaremos algunas de las consideraciones que apuntan los estudiantes a la hora de establecer la clasificación de los conjuntos dados. El gráfico 10 pone de relieve dos hechos muy claros: el conjunto de los números naturales es el conjunto más numeroso de todos para un porcentaje bastante significativo de sujetos y el número de puntos en el interior de un cuadrado resulta ser el conjunto que menos elementos contiene. Esto último, especialmente llamativo y frecuente en la literatura relacionada con la divisibilidad indefinida, será considerado con detalle en el próximo apartado sobre comparación de conjuntos continuos. El patrón de evolución de esta categoría presenta un elevado grado de estabilidad en los tres primeros niveles, en torno al 35%, mientras que experimenta un crecimiento considerable en 3ESO y 4ESO. Podemos destacar también que un porcentaje apreciable establece el número de estrellas como el mayor de los conjuntos, sin duda llevados por la idea de que el universo pueda ser infinito, identificando con frecuencia las propiedades del continente con las del contenido. Este aspecto no es desdeñable. Veremos a lo largo de este capítulo que el hecho de que un objeto matemático –sea un conjunto numérico o una figura geométrica- esté acotado o no influirá de manera determinante en la mayor parte de las respuestas recogidas. La asociación de un recinto cerrado con la idea de finitud será un elemento tácito necesario para explicar buena parte de las actitudes de los estudiantes. Por último, se ha añadido también en el histograma la serie correspondiente a la ordenación que presenta mayores frecuencias en todos los niveles, si bien en la mayoría de los casos no se registra justificación explícita alguna de dicha elección:

Puntos en un cuadrado $<$ nº de células $<$ nº de granos de arena $<$ nº de estrellas $< \mathbb{N}$

8. Claramente finitos ya que, por ejemplo, tanto el continente de las células humanas como el de los granos de arena tienen unos límites macroscópicamente bien definidos y el tamaño de aquellos elementos es incluso visible.

9. Es conveniente precisar que la mayor parte de los alumnos que opinan que no se pueden clasificar y no se refieren a la infinitud de los conjuntos dados apuntan la imposibilidad de contar conjuntos tan grandes eludiendo así la posibilidad de una estimación de estas cantidades con el fin de poder compararlas.



Evidentemente, si influye el hecho de que el conjunto considerado esté o no acotado, también influirá el tamaño del mismo; así, vemos en la ordenación anterior que los cuatro primeros conjuntos siguen la pauta de menor a mayor tamaño del continente; lo que ocurre es que la intuición del sujeto ha sustituido la pregunta inicial sobre el número de elementos de cada uno de los conjuntos por otra sobre las dimensiones geométricas de los mismos reduciendo el grado de abstracción. En realidad, podemos comprobar que el conjunto anterior de relaciones entre los cinco conjuntos no es sino una síntesis de las series que aparecen a su izquierda en el gráfico 10. Por otra parte, el porcentaje de sujetos que expresan de manera explícita la infinitud de $\mathbb{N}$ oscila entre el 35% en 6PRI y el 62% en 4ESO incluyendo tanto los que dan una clasificación como los que no lo hacen; estos valores contrastan con los registrados en el ítem 6PRIC1P03, analizado en el apartado anterior, que eran el 53% y el 84% respectivamente. En ninguno de los casos se solicitaba el cardinal de $\mathbb{N}$, pero es obvio que un determinado contexto propicia unos resultados bastante superiores a otro. Ya se ha comentado por diversos autores (Monaghan, Tirosh, Tsamir, Fischbein, Moreno y Waldegg, etc.) que no existen contextos neutros y, en este caso, el hecho de situar $\mathbb{N}$ en un en torno finito induce a los estudiantes a mimetizar sus propiedades con el fin de salvar intuitivamente las diferencias.

Otros autores como Falk y Ben-Lavy (1989) exploran la habilidad de sujetos, de 5 a 12 años, para distinguir entre conjuntos finitos que ellos consideran muy grandes y el conjunto infinito "más pequeño", el conjunto de los números naturales. En la pregunta que se les planteó *¿Hay más de X o de Y?*, *X* e *Y* son sustituidos por diferentes conjuntos como hojas de todos los árboles de los bosques, pelos en la cabeza de toda la gente, granos de arena sobre la tierra, etc. El conjunto considerado mayor en cada etapa se compara a continuación con un nuevo conjunto y, finalmente, el mayor de todos se compara con el conjunto de todos los números. Para los autores no hay una transición gradual desde los números grandes a infinito, sino que, conceptualmente, hay un salto cualitativo. El porcentaje de sujetos que concluye que hay más números que elementos tiene el mayor de los conjuntos finitos, y que da una explicación de ello, experimenta un salto notable a partir de los ocho años y se estabiliza a partir de los once. Según la investigación de Falk y Ben-

Lavy, la mayor parte de los niños piensa que el conjunto de todos los números es un conjunto finito grande pero no necesariamente mayor que el mayor de los conjuntos finitos; esta creencia disminuye abruptamente con la edad y a partir de los 8 años sólo una minoría piensa así y son capaces de verbalizar que los números no tienen fin[10]. Podemos observar que los resultados del tramo de edades coincidente con nuestro estudio, de 6PRI a 2ESO, son muy superiores a los que se recogen en el gráfico 10. La presentación secuencial, comparando parejas de conjuntos, del estudio de Falk y Ben-Lavy puede haber favorecido estos resultados frente a nuestra presentación única que, como ya hemos indicado arriba, puede dotar de cierto mimetismo finitista a ℕ. En nuestro caso, observamos que este salto no es abrupto sino gradual y sólo a partir de los 12 años la mayoría reconoce explícitamente la superioridad de los números naturales frente al resto de conjuntos finitos, si bien desde los 10 años, límite inferior de nuestro estudio, verbalizan que los números no tienen fin. En cuanto a las respuestas recogidas por los autores anteriores podemos decir que son semejantes a las registradas en este trabajo: “hay más números porque nunca terminan; en cuanto a los granos de arena te puede llevar dos mil años el contarlos, pero en algún momento se terminarán”; “hay más hojas porque en cada árbol hay muchas hojas y números hay menos”; “hay más granos de arena porque el mundo está lleno de arena, allí donde vayas puedes ver arena”.

Edad (años)	5 - 7	8 - 10	11 - 12
Hay más números que elementos tiene el mayor de los conjuntos finitos (%)	29,0	72,0	83,0

3ESOC2P10	*(3+4) ESO*
Considera el siguiente número periódico: $2,\overset{\frown}{131} = 2,131131...$ *a)* ¿Cuántas veces aparecerá el 1 a lo largo de toda su parte decimal?, ¿y el 3? *b)* ¿Aparecerá alguno de ellos más veces que el otro? Explica tu respuesta	

3ESOC2P10. Este ítem abunda en la comparación de conjuntos equipotentes con ℕ como en 6PRIC1P03. En primer lugar podemos observar que cuando en dicho ítem se comparó ℕ con ℕ-{1, 2, 3,… 1.000.000}, la respuesta “quedan infinitos” registró unos porcentajes aproximados del 30% y del 50% respectivamente para 3ESO y 4ESO mientras que ahora la correspondiente “los dos aparecen infinitas veces” supera el 40% y el 60% manteniéndose, eso sí, la diferencia entre ambos. En cuanto a la respuesta “el primero contiene más” oscilaba entre un 40%, en el apartado (*b*), y un 50%, en el apartado (*c*), mientras que en esta nueva situación bajo un contexto también numérico pero una representación diferente, la respuesta “el 1 aparece más veces” se encuentran en torno al 40% y, en consecuencia, no hallamos una variación significativa. En cambio, la respuesta “son iguales” o la correspondiente a este caso “los dos aparecen igual: infinitas veces” experimenta una reducción entre un 5% y un 15%; esto nos indica que el hecho de comparar elementos diferentes como en 6PRIC1P03 –aunque la repetición de algunos elementos de lugar al obstáculo de desdoblamiento de Duval- facilitaría la posibilidad de establecer una correspondencia uno a uno, en muy pocos casos, o bien de equilibrar ambos infinitos frente al ítem actual en el que todos los elementos de cada uno de los conjuntos comparados son iguales.

10. En otro experimento, citado en el artículo referido, se pidió a sujetos de 6 a 12 años que representaran los “saltos” entre diferentes conjuntos con el fin de, no sólo comprender que hay más números que granos de arena, sino de comprender que hay infinitamente más números que objetos en cualquier conjunto finito por grande que sea. Hasta los doce años o quizás más allá, los sujetos se conforman con representar la distancia entre un conjunto muy grande y el conjunto de todos los números sobre una escala finita.

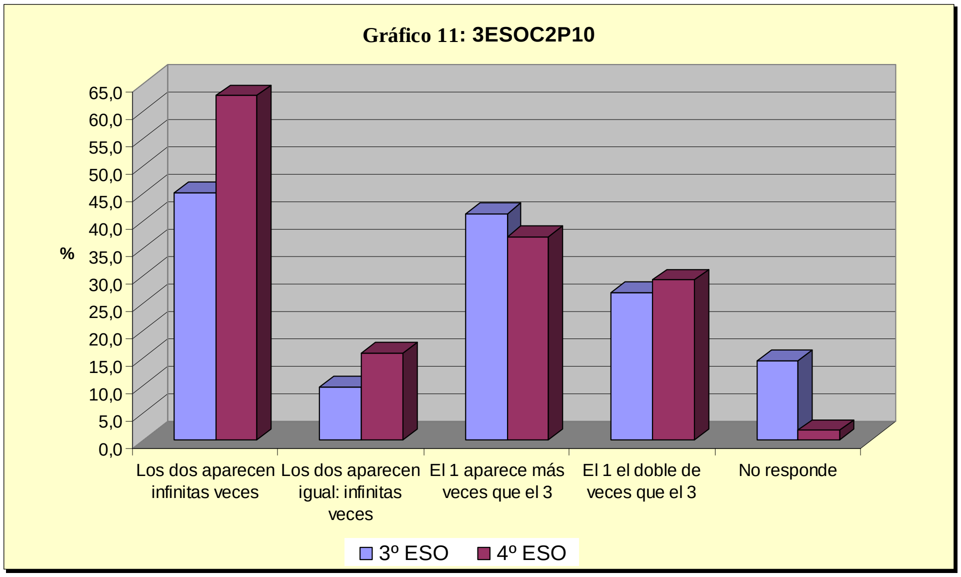


Gráfico 11: 3ESOC2P10

6PRIC2P06	***6PRI + (1+2) ESO***

Observa estas dos sucesiones de números:

A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .

B: 4, 8, 12, 16, 20, 24, . . .

que continúan indefinidamente. ¿Cuál de las siguientes respuestas es la correcta?

a) La *A* alcanzará el valor más grande

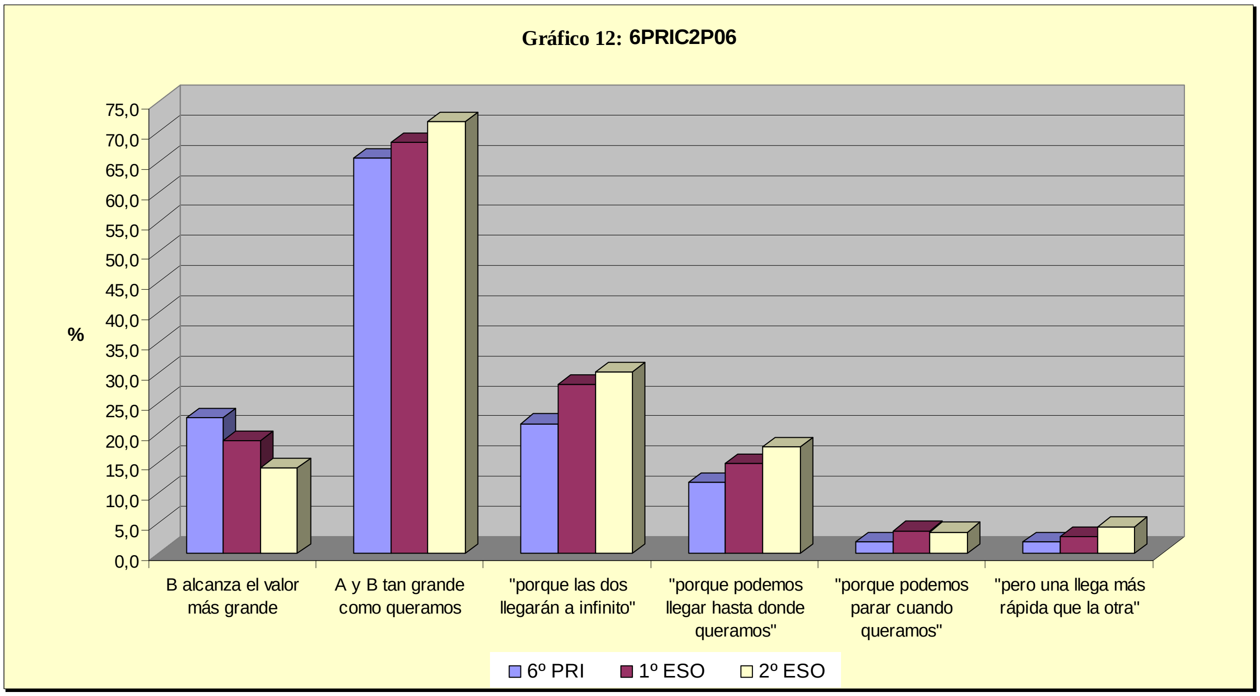
b) La *B* alcanzará el valor más grande

c) La dos alcanzarán un valor tan grande como queramos

d) Otra respuesta. Indícala

Explica tu respuesta

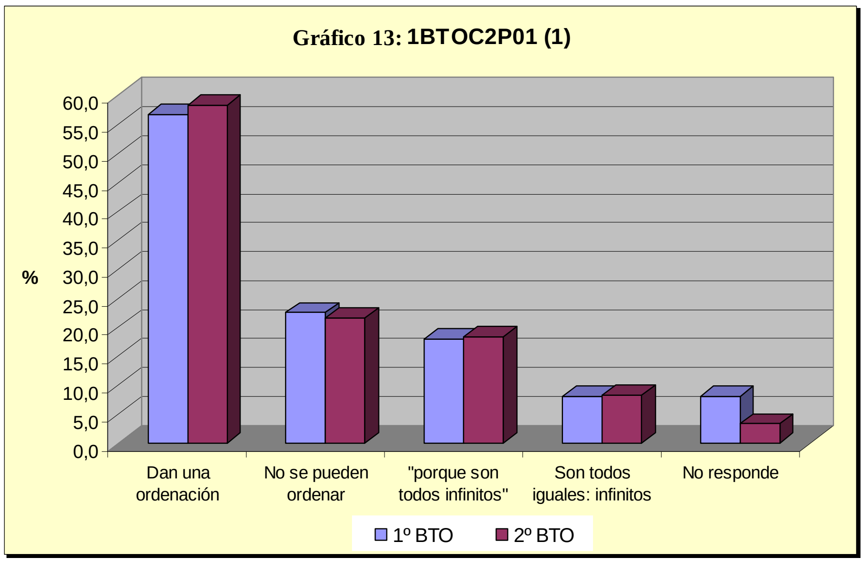
6PRIC2P06. Una de las categorías recogidas en el ítem 6PRIC1P03 basaba la equivalencia entre dos conjuntos infinitos en el hecho de que ambos “pueden llegar hasta donde quieras”. La cuestión que consideramos ahora, 6PRIC2P06, incide en esta interpretación del infinito potencial en los niveles inferiores que viene afectada por los verbos y tiempos utilizados. Situados en este contexto, los sujetos han mostrado una inclinación evidente, con un elevado grado de estabilidad en su patrón de evolución, hacia la equivalencia de ambas sucesiones, a pesar de que a priori no resultaba obvio que pudiesen liberarse del rápido crecimiento de *B* frente al de *A*. Las justificaciones encontradas para la elección del conjunto *B* han girado, en su mayor parte, en torno a la diferencia entre términos sucesivos, “porque en *B* van de cuatro en cuatro”, lo que implícitamente supone un final necesario para ambas colecciones numéricas o lo que es lo mismo, una perspectiva finitista; su patrón de evolución decreciente, aunque con un cierto grado de estabilidad, marca una clara tendencia a convertirse en un elemento residual. Con respecto a la respuesta *c)* que implica el reconocimiento de cierta equivalencia se han recogido los resultados representados en la serie correspondiente del Gráfico 12. Los argumentos más numerosos, “porque las dos llegarán a infinito” y “porque podemos llegar hasta donde queramos”, asumen el carácter infinito de las sucesiones pero además dicho carácter se convierte en una explicación para la equivalencia ya que supone aceptar el modelo *infinito = infinito*. En realidad, si profundizamos en esta idea, podemos deducir que la conjunción de este modelo con el punto de vista potencial o secuencial del infinito contiene cierta esencia finitista que, en el fondo, pretende establecer el infinito como una especie de “estación” de llegada u objetivo alcanzable para cualquier sucesión o conjunto infinitos; se trata del carácter contradictorio detectado de manera temprana en Fischbein et al. (1979) y confirmado en numerosas investigaciones posteriores. Por otro lado, encontramos dentro de esta misma categoría, otros dos tipos de argumentos que aunque no presentan valores significativos, poseen un contenido finitista más claro aún, definido por los dos verbos utilizados, *parar* y *llegar*. Y, por último, vemos surgir de manera incipiente nuevos términos asociados al carácter dinámico del infinito potencial como el de *velocidad* y *rapidez* que serán más frecuentes a medida que consideremos niveles superiores en conexión clara con la noción de límite.



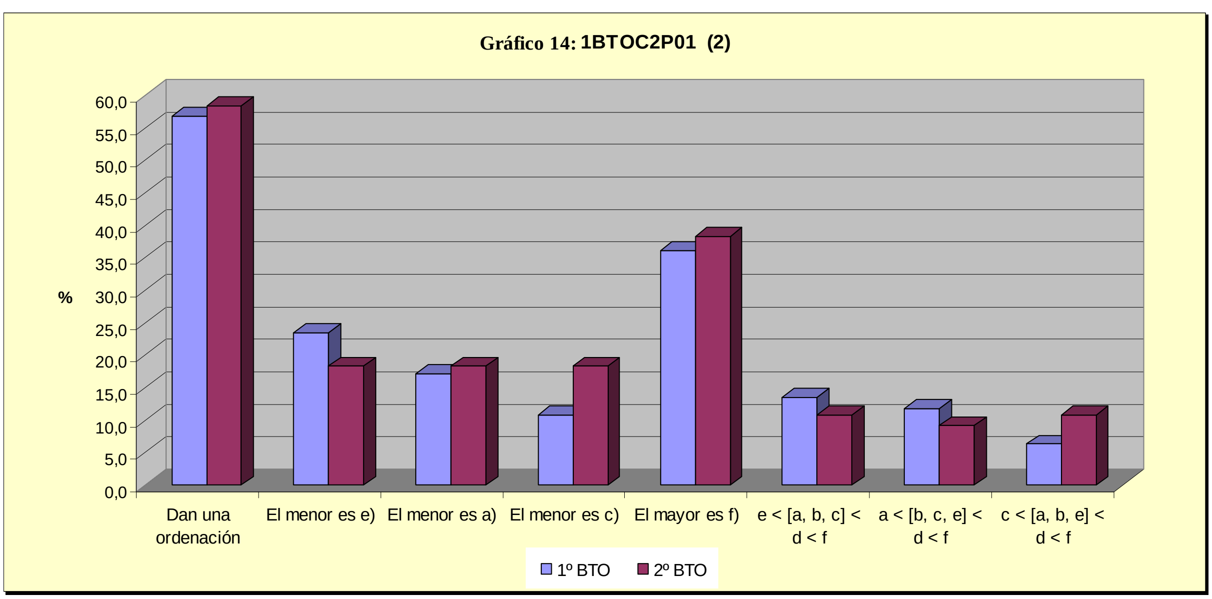
1BTOC2P01. Con el fin de plantear un ítem equivalente al 6PRIC1P06 a un nivel algo superior donde los contenidos respecto a los conjuntos numéricos se han ampliado a lo largo de los cursos anteriores se ha pensado en mantener alguno de los conjuntos finitos e incrementar el de los infinitos mediante esta cuestión. En primer lugar observamos que se han reducido los porcentajes de aquellos sujetos que dan una ordenación con respecto a los niveles superiores del ítem anterior. Es de destacar la estabilidad de todas las categorías establecidas. La categoría "no se pueden ordenar" no sufre variaciones importantes si bien se alinea también con los cursos inferiores del ítem anterior. No obstante, lo más destacado es el fuerte incremento que ha sufrido el porcentaje de estudiantes que considera que todos los conjuntos dados son infinitos: ha pasado de estar sobre el 10% a superar el 25%. En este caso, a diferencia de la cuestión anterior, todos los conjuntos son infinitos salvo dos de ellos con lo que el efecto de transferencia de propiedades, ahora por contrario, es mayor. De cualquier manera el modelo intuitivo *infinito = infinito*, "son todos iguales" y el modelo de *indefinición*, "no se pueden ordenar", vuelven a estar tras las respuestas encontradas, esta vez de manera más pronunciada. En lo que se refiere a las peculiaridades de las clasificaciones recogidas, podemos ver que hay una mayoría, superior al

1BTOC2P01	***BTO***
Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos y explica tu respuesta: *a)* Número de decimales de π *b)* Número de estrellas *c)* Número de granos de arena sobre la Tierra *d)* Números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ *e)* Número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm. de lado *f)* Números reales, $\mathbb{R}$	

35%, que reconoce la prioridad del conjunto de los números reales, seguido del de los números naturales. El número de puntos en el interior de un cuadrado queda relegado en un buen número de casos al menor de los conjuntos, como ya ocurría en el ítem correspondiente para los niveles de educación primaria y secundaria (véase también tablas en el Apéndice VI). Algo semejante ocurre con el número de decimales de π, si bien en este caso la explicación reside en la incomprensión de la irracionalidad de esta constante a la que se le atribuye una cantidad finita de decimales en un gran número de casos. A la vista de todo esto y del gráfico 14 tenemos que las clasificaciones más frecuentes coinciden en que $d < f$ pero muestran unas variaciones muy significativas respecto al



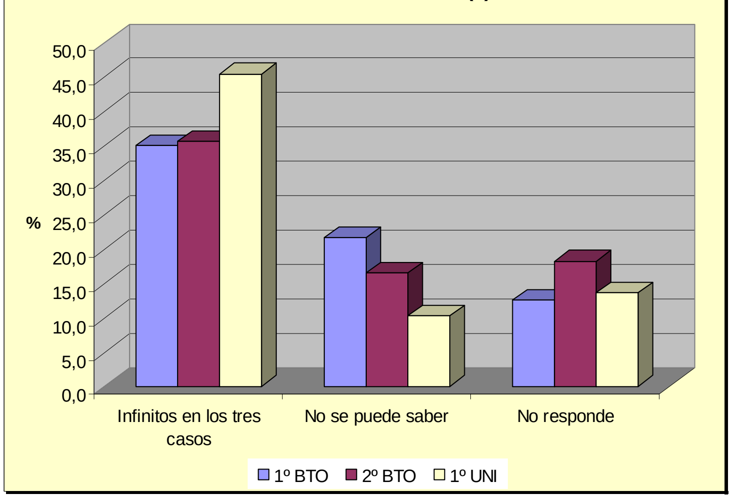
menor de los conjuntos, que oscila entre *e*), *a*) y *c*); no obstante, dentro de éstas, es preciso apreciar que las categorías que presenta una tendencia creciente son aquellas en la que se reconoce el conjunto finito de los granos de arena como el menor de todos: "el menor es c)" y la clasificación "c < [a, b, e] < d < f ".



1BTOC1P11	***BTO + UNI***
Lanzamos un dado infinitas veces y apuntamos el resultado. ¿Cuántos unos habrán salido?, ¿y doses?, ¿y múltiplos de 2?. ¿Cuál de los tres conjuntos anteriores contiene más elementos. Justifica tu respuesta.	

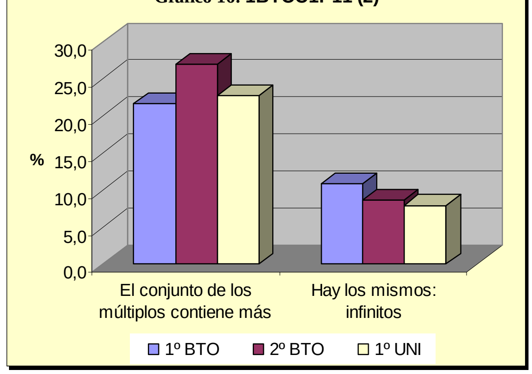
1BTOC1P11. El contexto probabilística contribuye con un obstáculo adicional: la equiprobabilidad de los sucesos de este experiemnto aleatorio. La ausencia de familiaridad con esta propiedad unida a una actitud finitista permite el desarrollo de un modelo intuitivo en el que el azar, y no la regularidad del proceso, controla sus resultados globales. Debido a ello obtenemos dos consecuencias importantes correspondientes a las tres primeras preguntas de este ítem. Por una parte resurge la categoría "no se puede hacer" con porcentajes significativos que en más de la mitad de los casos se atribuye "al azar"; y, por otra, el número de sujetos que no responde es apreciable frente a los ítems considerados hasta ahora. La influencia de los dos modelos imperativos, de *inclusión* e *infinito = infinito*, se presenta en el gráfico 16 donde es evidente el dominio del primero de ellos.

Gráfico 15: 1BTOC1P11 (1)



Por último, en el gráfico 17, podemos observar la influencia del contexto sobre estos dos mismos modelos comparando los resultados del presente ítem con los apartados (b) y (c) del ítem 6PRIC1P03 considerado anteriormente. Como ya hemos visto, la comparación de conjuntos infinitos supone un enfrentamiento pleno de contradicciones entre ambos modelos; así, por ejemplo, el modelo de inclusión, extensión natural del caso finito, implica que el sujeto debe admitir la existencia de diferentes tamaños de infinitud, lo que supone un conflicto cognitivo no despreciable entre elementos consolidados del esquema conceptual. Es posible apreciar cómo el contexto probabilístico afecta especialmente a estos resultados reduciendo considerablemente sus porcentajes, modificando incluso las tendencias de los patrones de evolución así como su grado de estabilidad. Debemos suponer que la familiaridad con $\mathbb{N}$, caso del ítem 6PRIC1P03, un objeto matemático ciertamente interiorizado en estos niveles, permite a los sujetos realizar ciertas acciones sobre el mismo a la hora de establecer relaciones o propiedades del mismo; en cambio, cuando introducimos en el contexto de las preguntas conjuntos infinitos menos habituales como las cifras de un número periódico, un número irracional o los resultados de un sorteo, estamos incrementando la dificultad mediante la incorporación de obstáculos epistemológicos adicionales.

Gráfico 16: 1BTOC1P11 (2)



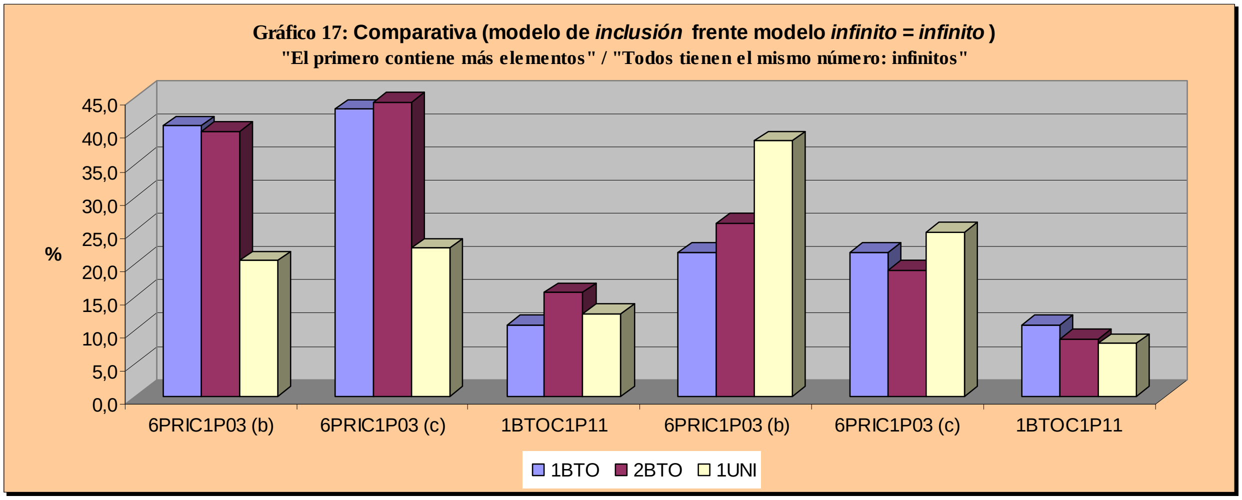


Gráfico 17: Comparativa (modelo de *inclusión* frente modelo *infinito = infinito*)
"El primero contiene más elementos" / "Todos tienen el mismo número: infinitos"

Los siguientes ítems consisten en una extensión hacia elementos más formales de las cuestiones anteriores con el fin de explorar la actitud de los estudiantes universitarios encuestados. Todos ellos giran en torno a la comparación de conjuntos en un contexto numérico bajo diferentes representaciones.

1UNIC2P01. En este caso los ítems 6PRIC1P06 y 1BTOC2P01 se han transformado, reduciéndose a una representación puramente formal, tomando la referencia de Bagni (1998) que se incluye en el capítulo 3. Se ha evitado el uso del concepto de cardinal, incipiente aún en el momento de aplicar el cuestionario, con el fin de evitar la heterogeneidad propia de un primer cuatrimestre universitario de diferentes licenciaturas.

1UNIC2P01	***UNI***

Ordena de menor a mayor, según el número de elementos que contienen, los siguientes conjuntos:

$$\boldsymbol{A} = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 10\}$$
$$\boldsymbol{B} = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq 10\}$$
$$\boldsymbol{C} = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 10\}$$
$$\boldsymbol{D} = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 100\}$$
$$\boldsymbol{E} = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq \infty\}$$

Justifica tu respuesta.

Los resultados más reseñables se han recogido en la tabla siguiente. En primer lugar, debemos destacar que casi el 85% de los estudiantes aportan una ordenación; se reducen sustancialmente las respuestas "no se puede" (2,6%) o "son todos iguales" (5,2%) que hemos encontrado en cuestiones anteriores para niveles inferiores. Aunque cualquiera de las clasificaciones diferentes de A < B = E < C = D[11] se fundamenta en el argumento de la inclusión, de hecho un 19,5% lo recoge explícitamente en su respuesta. Es decir, casi uno de cada cinco estudiantes universitarios utiliza el modelo intuitivo de la *inclusión* para justificar la relación de orden entre conjuntos infinitos. Por otra parte, casi la tercera parte de los sujetos considera que la ausencia de una cota en el conjunto *E* es una condición suficiente para superar al resto de los conjuntos y más de la mitad utiliza este argumento para establecer que *B* < *E*. Por lo tanto, bajo esta

El menor es ***A***	71,4%
El mayor es ***E***	40,3%
El mayor es ***D***	22,1%
$A < B < C < D < E$	31,2%
$A < B < E < C < D$	13,0%
$A < B = E < C = D$	6,5%
$B < E$	54,5%
$E < B$	14,3%
$B = E$	9,1%
Da una ordenación	84,4%
Alude a la inclusión	19,5%
No responde	11,7%

11. Puesto que no se ha introducido el término cardinal en el enunciado, admitiremos la equivalencia de notación entre *Card X* y *X*.

representación de los conjuntos convergen dos modelos intuitivos complementarios. Por una parte el *modelo intuitivo de inclusión* y, por otra, el que denominaremos *modelo intuitivo de acotación*. El primero de ellos, ya se ha presentado con anterioridad y se basa en el axioma euclideo de que "el todo es mayor que sus partes", mientras que el segundo presupone que un conjunto no acotado siempre es mayor que uno acotado. Menos de un 10% reconoce la identidad de los cardinales de B y E, obteniendo valores despreciables los que hacen referencia a una biyección como criterio de comparación de cardinales de conjuntos infinitos. Estos resultados se hallan en la línea de los registrados por Bagni en la referencia indicada.

1UNIC3P10	***UNI***

Se va a celebrar un sorteo en el que se extraerá, azar, un número real. ¿A qué apostarías?
a) A que sale un número natural
b) A que sale un número racional
c) A que sale un número irracional
Justifica tu respuesta.

1UNIC3P10. El elemento probabilístico también se ha introducido en este ítem incluido en uno de los cuestionarios planteados a los estudiantes de nivel universitario. En este caso la comparación entre estos tres conjuntos se plantea de manera indirecta a través de un sorteo. La novedad que aporta este enunciado frente al del ítem 1BTOC1P11 es la diferencia de cardinales entre los conjuntos dados. Los resultados recogidos se presentan en la tabla siguiente. Podemos ver que casi un 14% aún sigue influido por modelo *infinito = infinito*. Por otra, la densidad de los racionales conduce a que los sujetos establezcan su equivalencia con los irracionales y no con los naturales. El hecho de que entre dos naturales encontremos infinitos racionales y que el estudio de esta propiedad no lleve asociado habitualmente la prueba de la equipolencia de ambos conjuntos supone la introducción de un nuevo obstáculo didáctico de difícil erradicación cuando se consolide a lo largo del bachillerato. Por último, conviene señalar que una cuarta parte de los estudiantes recurre al argumento de la *inclusión* para justificar su respuesta, otro de los modelos intuitivos arraigados que supondrá un obstáculo para la comprensión de relaciones más profundas entre los cardinales de conjuntos infinitos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ pero card ($\mathbb{N}$) = card ($\mathbb{Q}$) y, en cambio $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ pero card ($\mathbb{Q}$) < card ($\mathbb{R}$) e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ pero card($\mathbb{I}$) = card($\mathbb{R}$).

Saldrá un número natural	12,3 %
Saldrá un número racional	30,1 %
Saldrá un número irracional	34,2 %
Hay la misma probabilidad para los tres	13,7 %
No responde	5,3 %

1UNIC3P03. Por último, con el fin de provocar la búsqueda de una biyección entre conjuntos equipotentes y, a la vez, medir hasta qué punto el condicionamiento del enunciado puede modificar las frecuencias y las justificaciones aportadas en el ítem anterior, se plantea en 1UNI la cuestión indicada. Para Moreno y Waldegg (1991), cuando un estudiante se enfrenta a la tarea de comparar dos conjuntos infinitos, uno de los cuales es parte del otro, y se le da una relación biyectiva implícita, emerge el conflicto de tener que elegir el criterio bajo el que efectuar dicha comparación; se halla aquí el punto operacional central del uso matemático del infinito actual, por lo que este problema se convierte en la esencia del experimento. El análisis de los resultados evidencia, en primer lugar, que la aceptación de la

1UNIC3P03	***UNI***

¿Cómo demostrarías que hay la misma cantidad de números naturales que de números impares?

Mediante biyección	20,7 %
Porque ambos son infinitos	41,4 %
Porque uno está incluido en el otro y son infinitos	13,8 %
No es cierto, hay más naturales que impares	6,9 %
No responde	13,8 %

propuesta del enunciado se ha incrementado del 40%, en 6PRIC1P03, al 75%, duplicándose también el porcentaje de los dos argumentos principales recogidos en el ítem de referencia; por su parte, el rechazo de tal propiedad ha pasado del 25% al 7%. No obstante, es preciso constatar que las respuestas en blanco, debidas a la contradicción con los modelos intuitivos ya señalados anteriormente, también han aumentado del 8% al 14% aproximadamente. Por último, ante la necesidad de justificar este enunciado contraintuitivo se ha recogido un tercer argumento que se remite a la relación de inclusión entre ambos conjuntos: *Si un conjunto (impares) está dentro de otro conjunto infinito, ambos tienen la misma cantidad de elementos*. De esta manera, lo que debería servir para afirmar la desigualdad de estos dos cardinales es reconvertido bajo la presión del modelo intuitivo *infinito = infinito*.

Sbaragli (2004) presenta la correspondencia entre números pares y números naturales y pregunta sobre la validez de esta demostración de equivalencia. Inicialmente, las reacciones de los profesores de primaria varían entre la duda de la validez (37,5%) y el convencimiento de la misma (62,5%). Recordemos que en el capítulo 3 hemos recogido los resultados de Falk (1994) de un trabajo con estudiantes universitarios en el que más de la mitad de los sujetos mantiene que “hay más números naturales que pares porque este conjunto es una parte del primero y hay algunos números naturales, como 1, 3, 5, etc. que no son pares”, mientras que el porcentaje de estudiantes que admite la correspondencia biyectiva entre los elementos de ambos conjuntos es del 45%; lo reseñable de estos resultados es que sólo el 19% de los sujetos dan una justificación de la primera respuesta, mientras que de la segunda lo hace el 39%. Algunos estudios sobre atribución social ponen de manifiesto que los intentos de explicación de sucesos inesperados son mayor que de aquellos otros esperados.

5.2.3. CONTEXTO GEOMÉTRICO. ASPECTOS COMUNES.

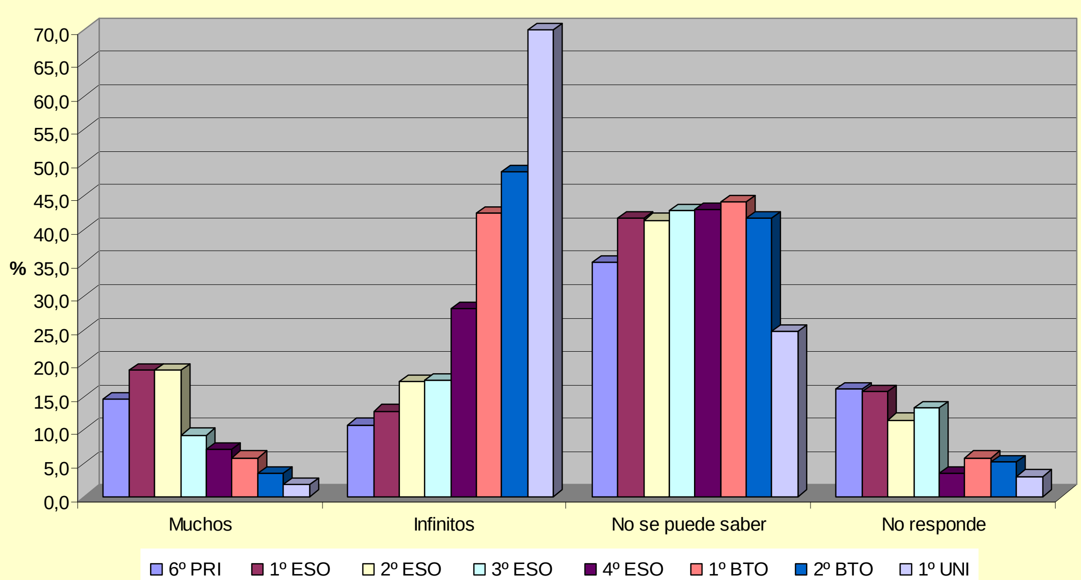
La comparación de conjuntos continuos casi siempre se ha planteado bajo un contexto geométrico mediante el uso de segmentos, líneas, polígonos, etc., salvo excepciones como la última citada en el apartado anterior de Bagni (1998b); es nuestra intención introducir otras representaciones dentro de dicho contexto con el fin de poder explorar la influencia de estas sobre los resultados de los estudiantes. Para Moreno y Waldegg (1991) a la hora de comparar conjuntos de puntos, en segmentos o regiones planas, estos se presentan aislados el uno del otro de manera que a la hora de utilizar el criterio de inclusión, los estudiantes tienen que trasladar mentalmente uno sobre otro. Surgen entonces dos factores potenciales de conflicto en este tipo de cuestiones: (1) los conjuntos a comparar son continuos lo que significa que los métodos de “conteo” utilizados para conjuntos discretos deben modificarse y (2) los conjuntos se encuentran en regiones acotadas de un segmento o un plano, lo que supone como ya hemos visto para conjuntos numéricos un obstáculo para su cuantificar su infinitud. La situación geométrica conduce a métodos de razonamiento que son diferentes de aquellos que se utilizan en el contexto numérico. Por su parte, Mamolo (2007) considera que el enfoque geométrico presenta la ventaja de proporcionar un contexto para investigar el infinito sin la necesidad de introducir representaciones o terminología simbólica poco familiar como ocurre con el enfoque de teoría de conjuntos. Según Tirosh y Tsamir (1996), cuando los conjuntos infinitos están representados en un contexto geométrico, tal como segmentos de diferentes longitudes o cuadrados de diferentes perímetros, los estudiantes reconocen más fácilmente la correspondencia uno a uno que cuando conjuntos semejantes se representan numéricamente.

6PRIC1P07	*Todos los niveles*
Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm. de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían? ¿Y en uno de 30 cm. de lado? Explica tus respuestas.	

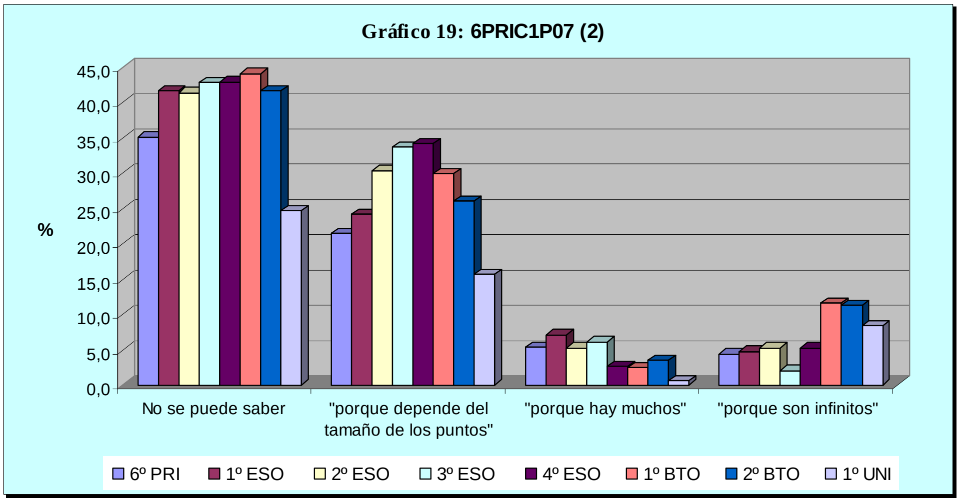
6PRIC1P07. Este ítem, común a todos los niveles, se sitúa en la línea iniciada por Fischbein et al. (1979) y seguida posteriormente por numerosos autores (Tirosh et al., 1985; Moreno y Waldegg, 1991; Turégano, 1996; etc.). En el se solicita el cardinal de un conjunto infinito de puntos y la comparación con otro de dimensiones diferentes.

En el gráfico 18 se recogen los valores registrados en las categorías que se han establecido. La respuesta finitista más explícita, "muchos", "millones", "bastantes", etc., presenta un patrón de evolución decreciente hasta convertirse prácticamente en un elemento residual del esquema conceptual en los niveles superiores. En cambio, la respuesta propiamente infinitista, "infinitos", responde a un patrón de evolución creciente, en particular a partir de 3ESO hasta el cual se da un cierto grado de estabilidad y también un mayor índice de sujetos que no responden. Es preciso observar que hasta el nivel 1UNI no se supera el 50% de estudiantes que admiten la infinitud de este conjunto. Por otra parte, se constata la presencia de una tercera categoría, "no se puede saber", con valores significativos, en torno al 40%, patrón de evolución invariante entre 1ESO y 2BTO y, en consecuencia, un elevado grado de estabilidad. Por último, observamos el elevado porcentaje de sujetos que no responde este ítem en los cuatro primeros niveles debido, sin duda, al fuerte elemento de contradicción que contiene este planteamiento y, por lo tanto, al conflicto que genera (Moreno y Waldegg, 1991).

Gráfico 18: 6PRIC1P07 (1)

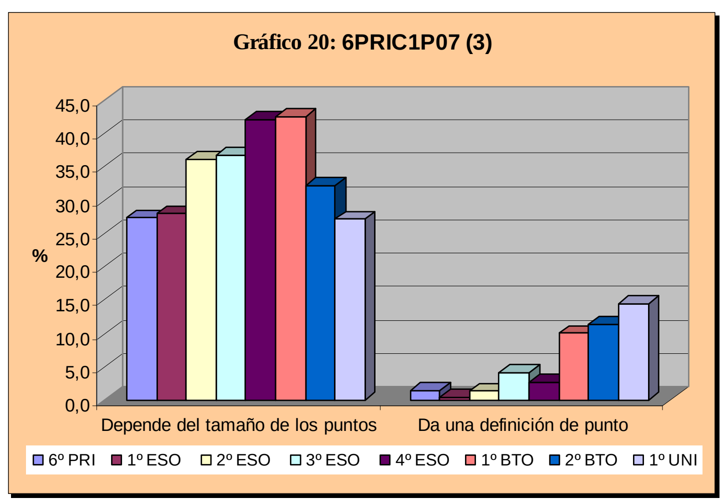


A continuación centraremos nuestra atención en la respuesta "no se puede saber" a la que hemos aludido más arriba. Los argumentos más representativos que utilizan los estudiantes aparecen representados en el gráfico 19. En él encontramos dos posibles justificaciones que aluden de nuevo al *modelo intuitivo de indefinición* del infinito, bien desde una perspectiva finitista como elemento impropio, "porque hay muchos", bien desde la infinitista, "porque son infinitos", y una tercera que dota al punto de una estructura intrínseca con forma, un círculo en la mayor parte de los casos, y dimensiones propias tales como radio, anchura, grosor, etc. Se trata del *modelo intuitivo punto-marca* (Fischbein, 1989)[12]. Evidentemente esto supone un grado de arbitrariedad que explica la incapacidad para obtener un resultado a falta de datos adicionales que definan la geometría del punto. Este modelo intuitivo presenta un patrón de evolución creciente-decreciente y está tan arraigado que incluso en el nivel universitario supera el 15% de los sujetos, manteniéndose como un elemento propio, no residual, del esquema conceptual prácticamente en todos los niveles considerados en este estudio.



La subcategoría "depende del tamaño de los puntos" no es sólo una justificación de la categoría "no lo puedes saber" sino que también se encuentra como consideración o comentario contradictorio en el resto de las categorías recogidas en el gráfico 18. Los valores globales se recogen en el gráfico 20 donde podemos apreciar que el modelo intuitivo en cuestión adquiere un mayor protagonismo, conservando su patrón de evolución. Asimismo, encontramos que a medida que consideramos niveles educativos superiores, el sujeto siente la necesidad de establecer una definición de "punto" con el fin de dotar de cierta solidez a su respuesta.

Turégano (1996), al igual que Fischbein et al. (1979), plantea la cuestión: *Consideremos el segmento AB de un cm. de longitud y un cuadrado de un cm. de lado. ¿Tienen los dos conjuntos el mismo número de elementos?, ¿cuántos? Explica tu respuesta*. La autora recoge respuestas tales como "el número de puntos no se puede contar", "en los dos hay infinitos, pero en el cuadrado más", "en los dos hay infinitos, pero el infinito del cuadrado es mayor que el del segmento", semejantes a las encontradas aquí.

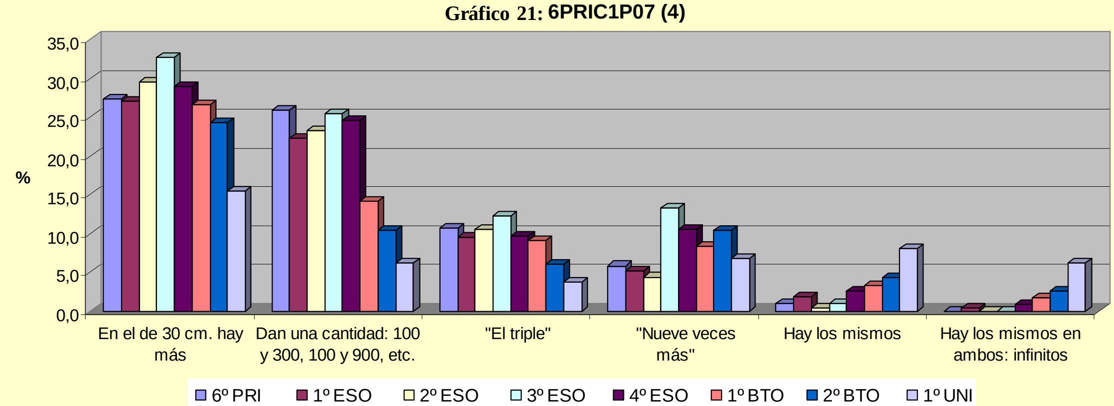


12. En Sbaragli (2004) se analiza minuciosamente el concepto de punto matemático a través de diversas edades, la influencia de los modelos transmitidos por el profesor, el modelo intuitivo del "collar de puntos" que la autora denomina modelo parásito, etc. Según esta autora, durante más de 2000 años los matemáticos han estado intentando introducir un dispositivo lingüístico del uso de palabras simples tales como "punto", "línea", "línea recta", "superficie", "plano", "espacio", sin proporcionar una definición explícita basándose en la hipótesis de que toda la gente que las utiliza tiene una idea de su significado.

Tall (1980c) también se refiere, como hemos recogido en el capítulo 3, a las diferentes intuiciones que tienen los niños sobre la naturaleza de los puntos; entre ellas al tamaño con que se les dota cuando se marcan con la punta de un lápiz. El niño no concibe la noción de número en un sentido *cardinal* sino como un cierto tipo de *medida* y, por lo tanto para él, el número de puntos sobre una línea es proporcional a la longitud de la línea; en consecuencia, no puede comprender ni la diferencia entre el continuo racional y el continuo real ni el hecho de que intervalos reales de diferente longitud tengan el mismo número cardinal. A la vista de esto, Tall propone interpretar las intuiciones del infinito no en el sentido tradicional y contraintuitivo de la cardinalidad, sino en el de los números de medida infinita. El piensa que el hecho de que la medida se muestre más cercana a la intuición se debería a que es una extensión natural de nuestros esquemas relativos a la noción inicial de punto. Una intuición sobre la medida del infinito coincide con la noción de que aunque un segmento tenga infinitos puntos, un segmento con el doble de longitud tendrá el doble de puntos; a esto es a lo que Tall (1980) denomina "medida infinita".

Por otra parte, la segunda pregunta de este ítem plantea la comparación de cardinales propiamente dicha, si bien de manera indirecta. Destaca la irregularidad de las series de este histograma que de nuevo hemos de atribuir al importante número de respuestas en blanco, en este caso superior al de la primera cuestión, y la situación de conflicto provocada debido al hecho de no solicitar la comparación explícitamente en el enunciado sino que viene sugerida por el contexto; en consecuencia, una buena parte de los sujetos se plantean exclusivamente la respuesta a esta pregunta en términos absolutos sin relacionarla con la cuestión anterior. No obstante, sí es posible apreciar ciertas tendencias en las respuestas. Desde luego, hemos de suponer que los porcentajes que daban "infinitos" puntos al contenido del primer cuadrado se mantendrán en este segundo caso, lo que no impide comentarios del tipo "pero el infinito en el de 30 cm. es mayor". Con las reservas mencionadas más arriba observamos que entre el 15% y algo más del 30% de los estudiantes mantienen que en el segundo caso el contenido es mayor. Esta postura viene avalada, por supuesto, por la propiedad de que tal contenido "depende del tamaño de los puntos".

Gráfico 21: 6PRIC1P07 (4)



En cuanto a aquellos que entienden que ambos conjuntos serán equivalentes –contendrán el mismo número de elementos según los términos que estamos utilizando- queda patente su reducido porcentaje. Por lo tanto, si queremos realizar una proyección de estos resultados deberemos tener en cuenta dos supuestos necesarios; en primer lugar, la dependencia del "tamaño de los puntos", es decir el modelo *punto-marca*, y, en segundo lugar, el modelo *infinito* = *infinito*. Estamos muy lejos, en este caso, de la posibilidad de establecer una correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos y el único argumento que puede funcionar para admitir la equivalencia es el de la identidad de infinitos. Por lo tanto, los conjuntos continuos en un contexto geométrico introducen un elemento adicional que dificultad la comprensión entre las relaciones que se puedan establecer entre ellos; en realidad, el hallazgo de una dependencia funcional entre los elementos de ambos conjuntos que pudiera establecer su equivalencia pertenece a un estadio formal muy alejado del conocimiento intuitivo de los estudiantes de estos niveles; este resultado no coincide con las apreciaciones de Tsamir y Tirosh expuestas anteriormente sobre el carácter facilitador del contexto geométrico. Consideramos que esta situación no es un reflejo del obstáculo epistemológico al que se enfrentaron Cantor y sus contemporáneos cuando se estableció la equipotencia entre el conjunto de puntos de un segmento y de un cuadrado. El caso que nos ocupa responde también al modelo intuitivo *punto-marca*, pero la ausencia de otras intuiciones primarias o secundarias impiden a los estudiantes avanzar hacia el establecimiento de una correspondencia entre ambos conjuntos. Bastará con situar un problema equivalente en un contexto funcional para que dichas intuiciones afloren y contribuyan positivamente.

Estos resultados se pueden poner en relación con los obtenidos en los ítems 6PRIC1P06 y 1BTOC2P01 del apartado 5.2.2 en los que se comparaban diferentes conjuntos, entre ellos el número de puntos que contiene un cuadrado. Una de las categorías que presentaba valores significativos era “el menor es el conjunto de puntos que caben en un cuadrado” que oscilaba entre un 20%, aproximadamente, en BTO y un 55% en 4ESO y cuyas justificaciones abundaban en el carácter dimensional de los puntos. Observamos, por lo tanto, cierto grado de coherencia bajo contextos tan diferentes que se traduce, a su vez, en patrones de evolución semejantes del tipo creciente-decreciente.

Finalmente, conviene referir los resultados del ítem 1UNIC3P14 cuyo enunciado se encuentra en el Anexo del capítulo 4. Se trata de una cuestión de respuesta múltiple que recoge las ideas más frecuentes halladas en los cuestionarios previos, a los que se alude en el mencionado capítulo, sobre la cantidad de puntos que contiene un cuadrado. Los resultados registrados se presentan en la siguiente tabla. Si comparamos estos resultados con los que aparecen en los gráficos anteriores podemos ver que las variaciones en 1UNI son muy pequeñas; disminuye ligeramente el valor de la primera y tercera categorías y se incrementa el de la cuarta que no se proponía como respuesta alternativa. No obstante, la suma de las dos primeras categorías pone de manifiesto un porcentaje superior, por encima del 30%, de sujetos que responden bajo el modelo *punto-marca*.

Depende del tamaño de los puntos	19,2 %
El número de puntos aumenta con el tamaño del cuadrado	15,1 %
Todos los cuadrados tienen infinitos puntos	64,4 %
Todos tienen el mismo número de puntos: infinitos	11,0 %
No responde	6,8 %

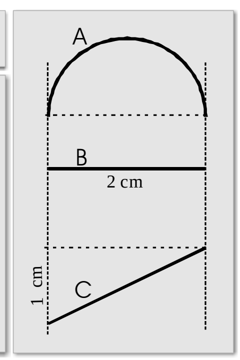
En la línea anterior, Tirosh et al. (1985) plantean un cuestionario a dos grupos de alumnos, uno experimental y otro de control; al grupo experimental se le vuelve a aplicar el cuestionario tras un curso sobre teoría de conjuntos. Se trata de comparar parejas de conjuntos geométricos tales como los puntos que hay en un segmento y un cuadrado, en un plano y una línea, en un cuadrado y un triángulo, etc. En la comparación de un cuadrado con otro cuadrado mayor, estos autores obtienen un 47,4% para la respuesta “contienen el mismo número de elementos” y un 50,0% para la respuesta “contienen diferente número de elementos”, antes del curso sobre teoría de conjuntos.

Podemos observar que existe una diferencia apreciable entre estos porcentajes y los obtenidos en nuestro estudio donde en ese nivel, 4ESO, el valor correspondiente es tan sólo representativo de un elemento emergente. No obstante, el principal argumento para la equivalencia registrado por estos autores es el de que “sólo existe un tipo de infinito y por lo tanto todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos”. Esta idea de equivalencia corresponde, como ya hemos visto a una comprensión intuitiva primaria del infinito como un proceso sin fin[13].

Moreno y Waldegg (1991) establecen un gran paralelismo entre la actitud de Bolzano y la de una buena parte de los estudiantes. A la hora de comparar conjuntos de puntos tales como segmentos, segmentos y cuadrados, etc. cerca de un 60 % de los estudiantes, de 18 a 20 años, mostró una concepción en la que las características geométricas de las figuras determinaban el “tamaño” de los conjuntos correspondientes sin considerar la posibilidad de establecer la conservación de la cantidad. Así, como ya hemos indicado, el nivel de representación se convierte en un obstáculo para acceder a un campo de significado más amplio. Bolzano adopta la misma postura: *Denotemos por E el conjunto de puntos que hay entre a y b, ambos incluidos… El conjunto de puntos en la superficie de un cuadrado de lado ab incluyendo la periferia será E^2…* Sin embargo, a diferencia de Bolzano, los estudiantes de este estudio fueron incapaces de desvincularse de la situación paradójica aquí presente y cuando la biyección entre ambos conjuntos se hizo aparente, sencillamente ignoraron las consecuencias que este hecho implica sobre la numerosidad de los conjuntos.

5.2.4. CONTEXTO GEOMÉTRICO. ASPECTOS ESPECÍFICOS.

3ESOC2P01	*(3+4)ESO + BTO + UNI*
Compara las líneas A, B y C de la figura. *a)* ¿Cuál de ellas es más larga A, B o C? *b)* ¿Cuál de ellas contiene más puntos A, B o C? Justifica tu respuesta.	

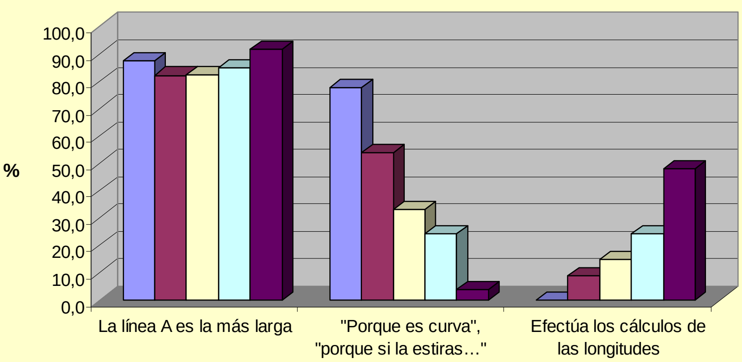


3ESOC2P01. En este ítem se introducen ciertos elementos de referencia como son las líneas auxiliares verticales con el fin de sugerir la biyección entre los puntos de cada una de las líneas. El contexto sigue siendo puramente geométrico pero con ciertos elementos de correspondencia o dependencia funcional. No obstante, la primera de las dos preguntas pretende provocar la contradicción y evaluar así la resistencia del modelo intuitivo *punto-marca*. Los resultados recogidos para esta cuestión revelan que el pensamiento inmediato, propio del conocimiento intuitivo, es un recurso bastante frecuente ya que como podemos ver en el gráfico 22, los porcentajes de estudiantes que determinan las longitudes mediante los cálculos pertinentes son muy bajos, sobre todo en los niveles inferiores; así, la respuesta “la línea A es la más larga porque es curva o porque si la estiras es más larga” alcanza

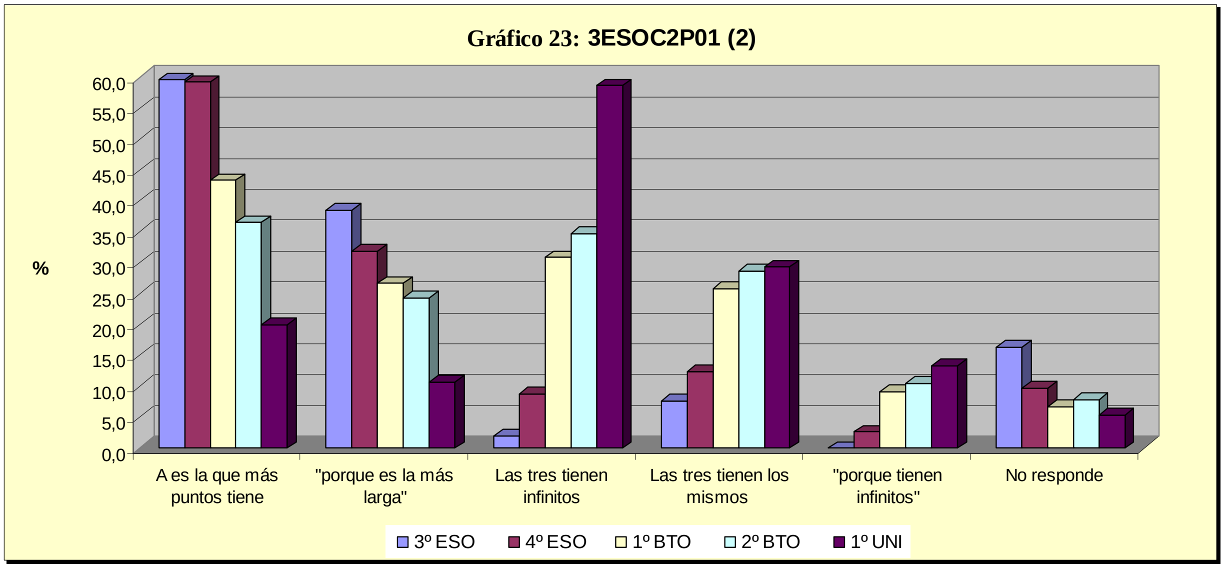
13. En cuanto a la no equivalencia, los estudiantes la justifican mediante tres tipos de argumentos principalmente: (1) un conjunto contiene más elementos que un subconjunto propio, (2) un conjunto no acotado contiene más elementos que uno acotado y (3) un conjunto bidimensional contiene más elementos que un conjunto lineal. Los autores también han detectado un conflicto interno entre dos tendencias: (a) la tendencia a considerar que todos los conjuntos infinitos son equivalentes y (b) la tendencia a comparar los números cardinales de dos conjuntos de acuerdo con el principio “el todo es mayor que sus partes”. El 83,7% de los estudiantes fueron inconsistentes en sus respuestas: por una parte mantenían que todos los conjuntos infinitos son equivalentes mientras que en otras respuestas afirmaban que un conjunto infinito tenía un número cardinal más pequeño que otro conjunto infinito. Sólo el 5,7% de los sujetos fueron conscientes de esta profunda contradicción entre ambas afirmaciones.

frecuencias muy elevadas en 3ESO y 4ESO. Si bien es cierto que este argumento se convierte en un elemento residual, el patrón de evolución de la categoría “la línea A es la más larga” presenta una elevada estabilidad que se basa mayoritariamente en dicha justificación. Por el contrario, el cálculo de longitudes basado en conocimientos elementales para estos niveles sólo comienza a consolidarse en 2BTO como elemento emergente.

Gráfico 22: 3ESOC2P01 (1)



Centrándonos en la segunda pregunta de este ítem, gráfico 23, podemos ver que del 80% aproximadamente que reconocía la mayor longitud de la línea A, el porcentaje de aquellos que establecen una dependencia entre la longitud y el número de puntos oscila entre el 60% en 3ESO y el 20% en 1UNI; no obstante, este argumento sólo se expresa de manera explícita para valores significativamente inferiores, entre un 40 y un 10% aproximadamente. Aunque en este caso apenas hay referencias al tamaño de los puntos como ocurría en el caso del cuadrado, la influencia de tal modelo prevalece con toda su contundencia a la vista de estos resultados, ya que aunque el patrón de evolución es semejante, los valores registrados varían en el caso de “el cuadrado más grande tiene más puntos” entre un 35% y 15% y, en cambio, como hemos visto, ahora lo hacen entre el 60% y el 20%. Por otra parte, el reconocimiento de la infinitud de estos conjuntos de puntos presenta un patrón de evolución temporal claramente creciente a lo largo de los cinco niveles considerados, pero este patrón no encuentra su reflejo en la categoría que establece la equivalencia entre los tres conjuntos de puntos; la estabilización se produce a partir de 1BTO y reduce sus valores, de manera singular en 1UNI. De hecho la respuesta “las tres tienen los mismos porque tienen infinitos” alcanza valores muy poco significativos, aunque ligeramente superiores a los encontrados en el caso de los cuadrados. A pesar de ello, la categoría “tienen los mismos” presenta un diferencia rotunda en ambos ítems. En el ítem correspondiente a la comparación entre cuadrados el patrón de evolución de “tienen los mismos” y el de “tienen los mismos: infinitos” eran prácticamente el mismo, como se puede observar en la tabla correspondiente en el *Apéndice VI*, oscilando entre un 1% y un 8%; en cambio, en el ítem actual se observa, como ya se ha indicado, un diferencia notable entre los valores de uno y otro patrón de evolución pero, en particular, la respuesta “tienen los mismos” oscila entre un 8% y un 30%. Así pues, el nuevo contexto ha facilitado que el modelo *infinito = infinito* incremente de modo significativo los porcentajes de aquellos sujetos que intuyen la equipotencia entre los tres conjuntos de puntos y, a su vez, ha provocado la práctica desaparición de cualquier referencia a la naturaleza de los puntos que componen dichos conjuntos que, no obstante, permanece latente bajo valores tan elevados que señalan la línea más larga como la más numerosa. Sigue siendo la conjunción del modelo intuitivo de *inclusión* junto como el modelo intuitivo *punto-marca* la que predomina en este tipo de representaciones dentro del contexto geométrico.

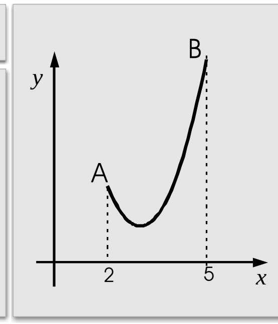


Al igual que ocurría en el ítem 6PRIC1P07, es despreciable la frecuencia de las alusiones a una posible correspondencia entre los puntos de cada línea, a lo sumo un 4% en 1UNI, a pesar de que la figura que acompaña al enunciado aporta elementos facilitadores para el hallazgo de dicha propiedad, como puede ser la marcada verticalidad representada por las líneas auxiliares. No obstante, resulta evidente que este recurso ha funcionado a través de intuiciones secundarias, en conexión con imágenes mentales ya creadas, probablemente intuiciones secundarias, puesto que los valores para la respuesta "las tres tienen los mismos" es muy superior al ítem anterior.

Diversos autores han presentado en los cuestionarios que han aplicado ítems en los que implícita o explícitamente se sugería o presentaba una prueba de la equivalencia entre dos conjuntos. Así, Sbaragli (2004) presenta la demostración gráfica de la equivalencia entre los puntos de dos segmentos de diferente longitud trazando algunas líneas convergentes que cortan a ambos conjuntos y pregunta sobre la validez de esta demostración. El 56,3% quedan convencidos por esta demostración mientras que el 31,3% no están convencidos. La misma autora en el contexto de una investigación sobre las convicciones en torno al concepto de infinito de profesores de educación primaria plantea la cuestión ¿hay más puntos en el segmento AB o en el segmento CD? acompañada de una figura con dos segmentos no paralelos y uno de mayor longitud que el otro. Todos los profesores mantuvieron la convicción de que ambos segmentos tenían un número diferente de puntos, en particular que en el más grande hay más puntos. A este hecho Arrigo y D'Amore (2004) lo denominan *dependencia* de los cardinales transfinitos. En otros estudios ya se ha probado que el alumnado de los últimos cursos de educación secundaria y primer de universidad tienen dificultades con el concepto de continuidad debido al modelo intuitivo persistente de que un segmento es como un "collar de cuentas" (Tall, 1980b; Romero i Chesa y Azcárate, 1994, Arrigo y D'Amore, 1999, 2004). También se podría considerar este error como un obstáculo epistemológico en el sentido de Brousseau (1983), pues se trata de un conocimiento que ha funcionado correctamente en contextos anteriores pero al aplicarlo a nuevas situaciones se convierte en una fuente de problemas y errores. Esto supondrá la generación de obstáculos didácticos por parte de aquellos profesores que presentan dicho obstáculo epistemológico.

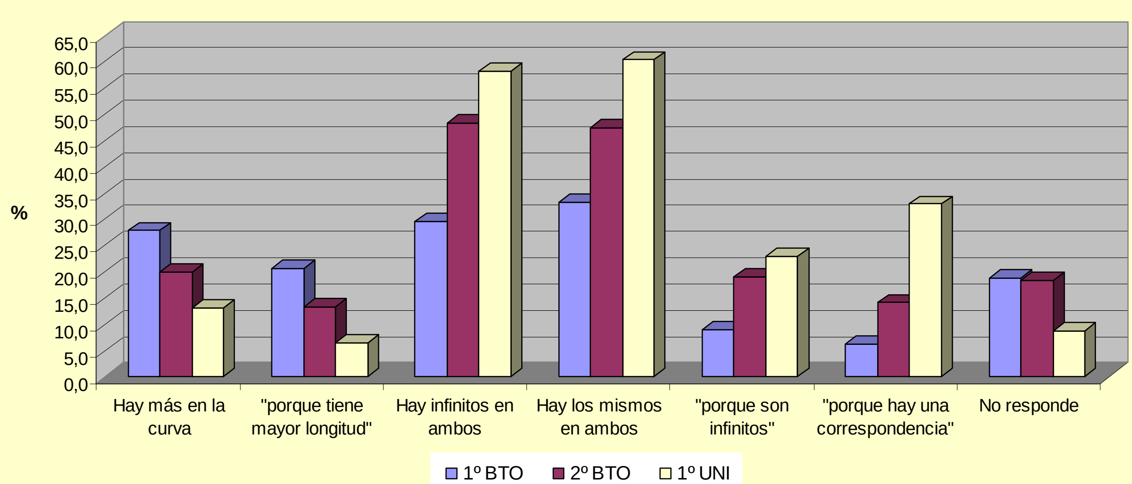
Por su parte, Sierpinska (1989) enumera algunos de los problemas ya mencionados a la hora de comparar el número de puntos contenido en líneas de diferente tamaño o forma: un segmento es un trazo de lápiz y un punto es una marca y, por lo tanto, el número de puntos en un segmento depende de la anchura, longitud y tamaño de los puntos; un segmento no tiene anchura, o bien es tan pequeña que se puede ignorar; los puntos son pequeños o bien puede acordarse cómo son de grandes, digamos 1 mm.; un segmento es una línea acotada por dos puntos, con lo que sólo hay dos puntos en un segmento: sus extremos; una línea está compuesta por segmentos pequeños; una línea está compuesta por pequeños puntos; un segmento es un objeto mental compuesto por infinitos puntos consecutivos que están representados por una línea trazada con ayuda de una regla; los puntos no tienen dimensiones pero se representan con marcas o pequeños segmentos que tienen dimensiones.

1BTOC2P10	***BTO + UNI***
Dada la función $y = (x - 3)^2 + 1$, definida en el conjunto de los números reales, de la cual se ha representado el tramo de curva AB en la figura adjunta, ¿dónde hay más puntos en el intervalo [2, 5] de la variable x o en el tramo de curva AB? Justifica tu respuesta	



1BTOC2P10. La siguiente acción sería incorporar una referencia aún más evidente que induzca al alumno a reparar en la biyección entre los conjuntos dados a partir de intuiciones secundarias asociadas a imágenes propias de la instrucción recibida. Se trata de añadir un sistema de ejes cartesianos como se indica en el enunciado de esta cuestión. Y, en efecto, en esta ocasión bajo una representación funcional, la asociación con el concepto de gráfica de una función, que básicamente consiste en la definición de una correspondencia entre dos variables, les ha permitido a un mayor número de sujetos encontrar la equivalencia entre ambos conjuntos así como utilizar dicha herramienta para justificarla. De hecho, como se aprecia en el gráfico 24, se ha invertido el patrón de evolución de las categorías "hay más en la curva" y "hay los mismos en ambos" con un incremento considerable en los valores del segundo; también podemos observar que este contexto ha roto la estabilidad que encontramos en el ítem anterior para la respuesta "hay los mismos en ambos". El argumento "hay más en la curva porque tiene mayor longitud" se convierte en un

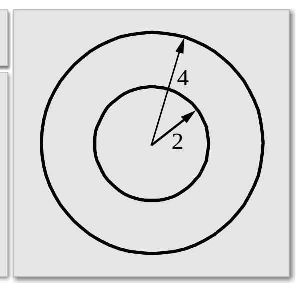
Gráfico 24: 1BTOC2P10



elemento residual a diferencia de lo que ocurre con el ítem anteriormente analizado, mientras que el elemento emergente “hay los mismos porque los puntos de ambos conjuntos se corresponden” se consolida como elemento propio del esquema conceptual bajo esta representación que propicia su utilización para la introducción del infinito actual en conjuntos continuos. Por otra parte, al contrario de lo que ha ocurrido en el ítem 3ESOC2P01, el “tamaño” de los puntos comienza a ser un argumento “incómodo” por evidenciar contradicciones internas y, de hecho, apenas hay referencias al mismo, como máximo un 5% en 1BTO, característico de un elemento impropio.

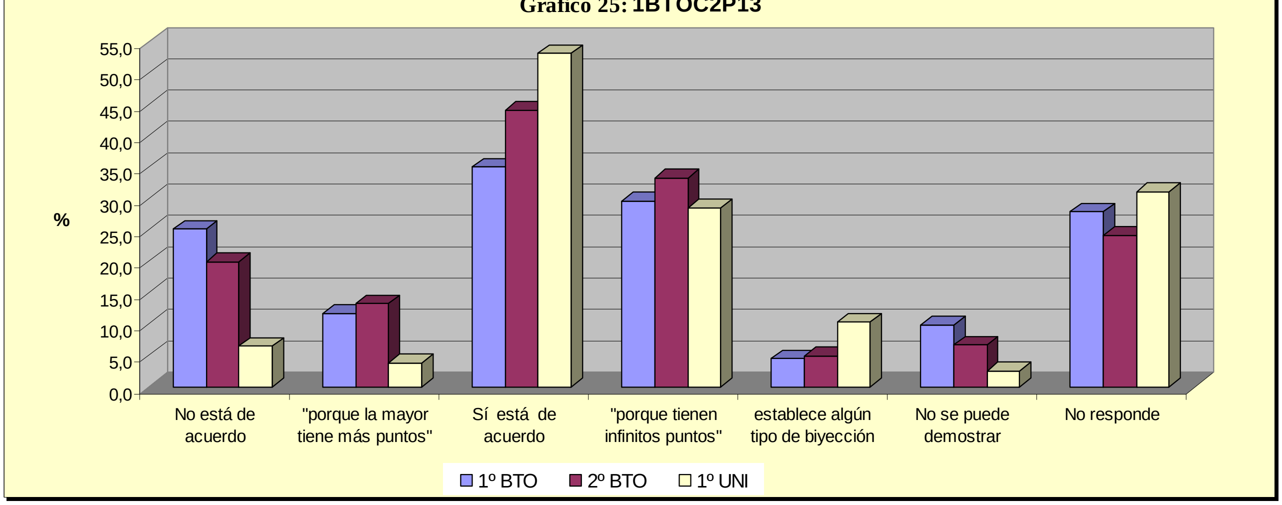
Por último, debemos señalar que ya no es tan infrecuente encontrar alusiones a la adimensionalidad de los puntos para justificar la equipotencia de los conjuntos bien sea desde la identidad de los infinitos bien desde la perspectiva de una biyección. Es preciso constatar el elevado número de sujetos que no responden, casi un 20% en BTO, a pesar de tratarse de tratarse de una representación que ya forma parte habitual del currículo de estos niveles. Hemos de pensar que la contradicción que supone enfrentar el modelo intuitivo *punto-marca*, tan arraigado a la evidencia intuitiva, a la aplicación biyectiva que conduce a la equivalencia de ambos conjuntos ha producido el conflicto cognitivo suficiente para la inhibición en la respuesta en una buena parte de ese porcentaje. Una vez más la compartimentación del conocimiento da lugar a que elementos conocidos por el sujeto, que debería relacionar, permanecen sin relacionar en su pensamiento y si tales elementos son contradictorio se produce un conflicto o confusión al evocarlos simultáneamente (Amit y Vinner, 1990).

1BTOC2P13	***BTO + UNI***
¿Cómo podrías demostrar que las dos circunferencias siguientes contienen la misma cantidad de puntos?	



1BTOC2P13. Esta cuestión es equivalente a la 1UNIC3P03 que se planteó bajo un contexto numérico. El objetivo en introducir un elemento coercitivo que haga ineludible conflicto cognitivo y provoque el establecimiento de una correspondencia uno a uno modificando el tipo de referencias geométricas de los ítems anteriores; en este caso debería ser el centro común de ambas circunferencias. A pesar de la afirmación categórica del enunciado que establece la equipotencia,

Gráfico 25: 1BTOC2P13



los porcentajes de aquellos sujetos que la admiten se mantienen en la línea de la cuestión anterior, si bien las justificaciones que aportan ahora varían sustancialmente, como se puede observar en el gráfico 25. El argumento “porque las dos tienen infinitos puntos” vuelve a incrementarse y alcanza valores en torno al 30% con un patrón de evolución bastante estable; en cambio, la mención de algún tipo de correspondencia entre los puntos de ambas líneas se reduce frente a los obtenidos anteriormente, bien debido a la compartimentación ya mencionada, bien porque la relación entre los puntos de ambos conjuntos no constituye un elemento propio del esquema conceptual.

Al igual que ocurrió con el ítem 1UNIC3P03, frente a la afirmación del enunciado hay un número importante de alumnos en BTO en los que modelo intuitivo *punto-marca* presenta una resistencia notable que les impide aceptar la característica esencial del infinito actual. La mayor parte de ellos puede admitir que ambas circunferencias tienen infinitos puntos –aún bajo la sombra del “tamaño de los puntos”- pero su punto de vista finitista anclado en el modelo *intuitivo* de inclusión “el todo es mayor que la parte”, reforzado por el modelo punto-marca, les hace sucumbir ante la idea de que ambos conjuntos sean equivalentes. Como se puede observar el ítem anterior, 1BTOC2P10, y este se encuentran en el mismo cuestionario, C2, pero esto no ha permitido a los estudiantes extender los recursos allí empleados para resolver esta nueva situación. No obstante, es preciso reconocer que la idea de proyección –que algunos alumnos mencionaban en aquella ocasión- partía de un centro situado en el infinito, lo que suponía el trazado de paralelas, mientras que en este caso el centro implica el uso de radios que establezcan la biyección pertinente lo que implica una correspondencia mucho más contraintuitiva entre un solo punto e infinitos puntos. Por último, debemos subrayar el gran porcentaje de respuestas en blanco; sin duda, lo inhabitual del contexto ha provocado una situación de bloqueo o paralización en el intento de encontrar imágenes a las que asimilar este problema.

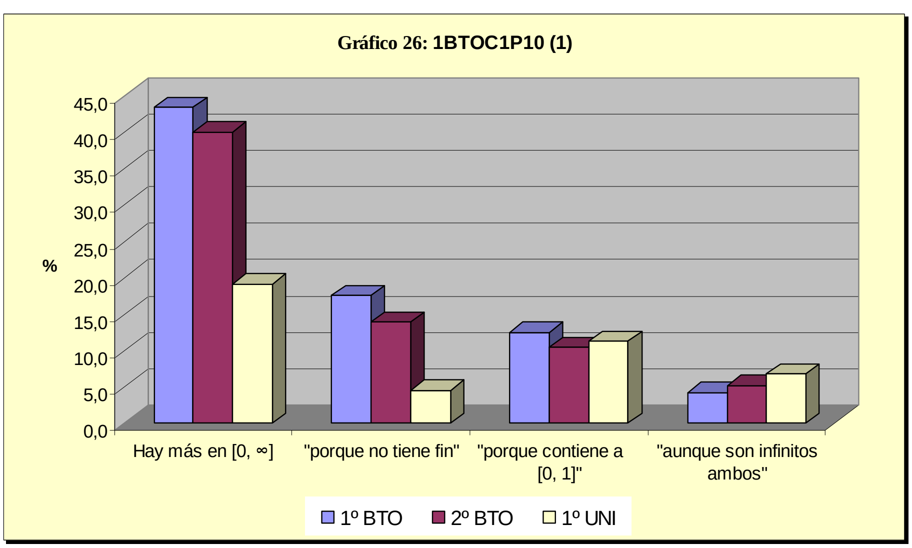
En el trabajo de Waldegg (1996), ya mencionado, se plantea a estudiantes de bachillerato del área físico-matemática diversas cuestiones en las que se solicita la comparación de pares de conjuntos infinitos; algunos de los que se presentan bajo un contexto geométrico arrojan los siguientes resultados:

15 a 18 años		Waldegg (1996)	
Conjuntos	**Dificultad**	**Preguntas**	**Aciertos (%)**
Puntos de un segmento	Continuo / acotado	¿Es infinito?	64
Puntos sobre dos segmentos	Continuo / acotado	¿AB es infinito? ¿CD es infinito? ¿Hay una biyección? ¿Son “iguales”?	47 45 65 43
Cuadrado y semirrecta	Continuo, acotado/no acotado Dimensiones diferentes	¿Puntos del cuadrado infinitos? ¿Puntos de la recta infinitos? ¿Son “iguales”?	58 84 11
Recta y semicircunferencia	Continuo, acotado/no acotado	¿Hay una biyección? ¿Son “iguales”?	72 23
(0, 1) y (0, 2)	Continuo / acotado	¿Hay una biyección? ¿Son “iguales”?	69 47
Círculo y círculo más circunferencia	Continuo / acotado	¿Son iguales?	32
Superficie y recta	Continuo, acotado/no acotado	¿Son iguales?	56

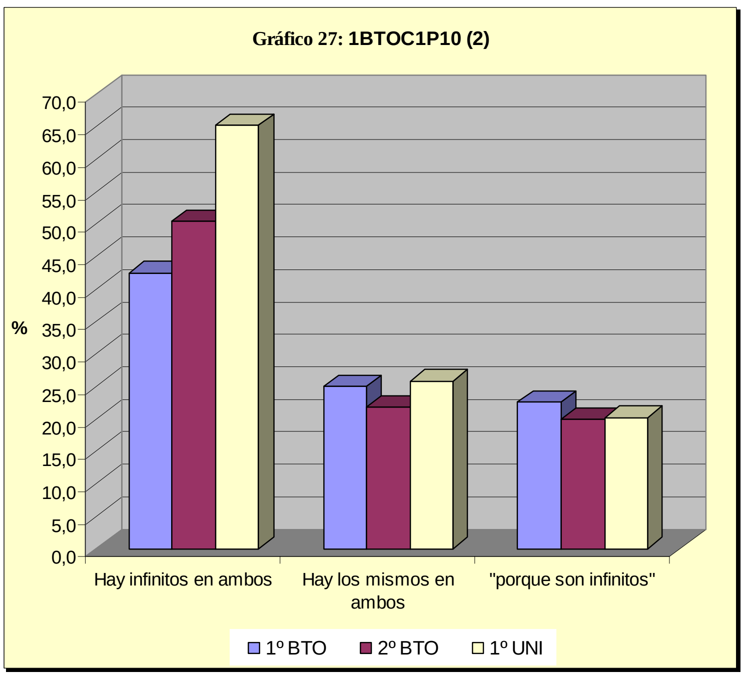
Tras el análisis estadístico de los resultados, la autora destaca algunos hechos. Así, en primer lugar, para conjuntos acotados, sobre todo si están encuadrados en un contexto geométrico, es difícil aceptar que tienen un número infinito de elementos. En segundo lugar, existe un rechazo a usar el criterio de la biyección para comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos propios, aun en el caso de que haya habido una instrucción al respecto. También reflejan lo resultados que el estudiante posee una serie de intuiciones locales respecto del infinito que aplica según la situación; estas intuiciones son localmente coherentes pero globalmente se contradicen. Y, por último, confirma la estabilidad del pensamiento intuitivo señalada por Pozo y Carretero (1987). Esta estabilidad reside en el hecho de que la coherencia local permite a los estudiantes desenvolverse convenientemente en numerosas situaciones que no tienen aparentemente ninguna relación.

1BTOC1P10	*BTO + UNI*
¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, ∞)?	

1BTOC1P10. En el siguiente enunciado se mezclan los contextos numérico y geométrico y se estudia la influencia de este aspecto sobre los resultados anteriores en los que se presentaban ambos por separado. Esto supone la identificación explícita entre punto y número real que hasta ahora debían establecer los sujetos a partir de los vínculos entre las imágenes mentales de sus esquemas conceptuales, prácticamente inexistentes, o bien excesivamente compartimentadas, a la luz de los resultados obtenidos. Por otra parte, este ítem introduce otra novedad como es la comparación de un conjunto acotado con otro no acotado. Para Waldegg (1996) la comparación entre dos conjuntos infinitos se hace más difícil si un conjunto es acotado y el otro no, ya que en este caso, el infinito potencial es un obstáculo para comparar los dos conjuntos. El infinito potencial se hace evidente en el conjunto no acotado que permite disponer de las posiciones necesarias para continuar un proceso mientras que este infinito permanece oculto en el conjunto acotado. En efecto, en primer lugar podemos observar en el gráfico 26 que los porcentajes de aquellos que se inclinan por el conjunto más "extenso" como el más "numeroso" son notablemente superiores a los correspondientes a los tres últimos ítems, recuperando las características del patrón de evolución que se obtuvo en el ítem 3ESOC2P01: la estabilidad de BTO en torno al 40% y el descenso de 1UNI por debajo del 20%. La última categoría que aparece en el gráfico supone un elemento residual de aquellos que diferencian la infinitud de ambos intervalos; también es posible deducir de estos resultados que el intervalo [0, 1] es considerado finito por un elevado porcentaje de estudiantes, en particular en BTO. Este



tipo de argumentos responden al que denominaremos modelo intuitivo *acotado-finito / no acotado-infinito* que consiste en evaluar con una cantidad finita el contenido de conjuntos acotados y con otra infinita los no acotados y que, habitualmente, viene reforzado por el modelo de *inclusión*; observamos en el gráfico 27 que en BTO el porcentaje de estudiantes que reconoce la infinitud de ambos conjuntos no alcanza el 50%. Asimismo, se aprecia en dicho gráfico que la identidad de los infinitos, modelo *infinito = infinito*, sirve para justificar la equivalencia de cardinales de ambos conjuntos, si bien en este caso los porcentajes son claramente inferiores a los obtenidos para 1BTOC2P10 y el patrón de evolución, creciente en aquel caso, presenta ahora una elevada estabilidad en torno al 20%. En esta ocasión sólo se ha registrado una aplicación biyectiva de un alumno de 1UNI que ha dibujado una curva continua y creciente en el intervalo [0, 1) con una asíntota vertical en x=1.



Este tipo de cuestiones también es frecuente en los trabajos que se han consultado. Así, Boero et al. (2003) plantean la cuestión *¿cuántos números hay entre 1 y 2?* a alumnos de 10 a 11 años que ya manejaban números decimales finitos y tenían la experiencia de que 1:3 produce el resultado 0,3333…. Monaghan (2001) presenta bajo un contexto que él denomina de medida la comparación entre los intervalos [0, 1] y [0, 10] que favorece la idea de que "lo que vale para el caso finito también vale para el caso infinito". Así, si consideramos que en [0, 1] están los números 0,1, 0,2, 0,3,… se deduciría que en el intervalo [0, 10] hay diez veces más números que en [0, 1]. El autor registra más de un 30% de estudiantes para los que no es posible comparar estos conjuntos basándose, fundamentalmente, en su infinitud, modelo de *indefinición* que ya se ha citado como resultado de los primeros ítems de este trabajo y que no aparece en el ítem que nos ocupa; conviene destacar la similitud del resultado en la categoría "los mismos en ambos" con el obtenido que se refleja en el gráfico 27.

16 a 18 años	**Monaghan (2001)**
Contexto: medida	**n=190**
Considera todos los números decimales entre 0 y 1 y todos los números decimales entre 0 y 10. Hay	
Más entre 0 y 1	1,3
Más entre 0 y 10	41,6
Los mismos en ambos	25,3
No se pueden comparar	31,6

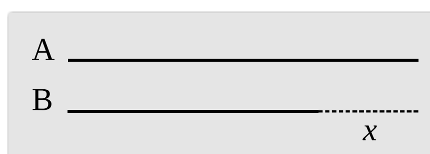
En la línea de Monaghan y con el fin de abundar en dicho tópico, se ha planteado la cuestión 1UNIC3P11: ¿Cómo demostrarías que hay el mismo número de puntos en los intervalos [0, 1] y [2, 5] de $\mathbb{R}$?; este ítem conjuga el contexto geométrico-numérico con el factor coercitivo que supone la afirmación establecida en el enunciado. Los resultados obtenidos se presentan en la tabla siguiente; en ella podemos observar que seis de cada diez estudiantes universitarios aceptan el enunciado y la mayor parte de ellos lo justifica bajo alguna de las versiones del modelo *infinito =*

infinito; sólo un pequeña fracción de sujetos alude a algún tipo de relación biyectiva. Por otra parte, más del 12% rechaza la propiedad enunciada de manera directa o bien indicando que "no se puede demostrar". Podemos comparar estos resultados con los obtenidos en el ítem 1BTOC2P13 en el que se afirmaba la equipotencia entre el número de puntos de dos circunferencias de diferente radio y observar que se da un cierto paralelismo entre los valores de los dos ítems salvo en el argumento "porque ambos tienen infinitos puntos" en el que la representación propuesta en 1UNIC3P11 parece favorecer claramente al modelo *infinito = infinito*. Conviene destacar también que dado que entre los dos intervalos no se puede establecer una relación directa de inclusión no se han registrado respuestas del tipo "hay más puntos en el intervalo más largo" como ocurre en los ítems 1BTOC2P13 y 1BTOC2P10. Todo ello confirma, una vez más, la fuerte sensibilidad de los modelos intuitivos a la representación utilizada incluso dentro de un mismo contexto.

Análisis comparativo	**1UNIC3P11**	**1BTOC2P13**
	n = 73	**n = 77**
Acepta la afirmación del enunciado	61,6	53,2
"Porque ambos tienen infinitos puntos"	49,3	28,6
"Referencias a una aplicación biyectiva"	6,8	10,4
No se puede demostrar	5,5	2,6
Rechazan la afirmación del enunciado	6,8	6,5
No responde	23,3	31,2

Uno de los objetivos de Mamolo (2007), con 24 estudiantes universitarios, es determinar qué tipo de conexión, si la hay, establecen los sujetos entre una representación geométrica del infinito y una numérica. Es decir, la cuestión de si los estudiantes asocian puntos sobre una línea con los valores de la línea numérica considerada. En este estudio se observa que existe una clara desconexión entre puntos sobre la recta real y sus valores numéricos en un nuevo ejemplo de compartimentación. El 70 % de los individuos indicaron que los puntos se hallaban bien donde el segmento comienza y termina o bien allí donde dividían al segmento en partes iguales. Surgieron las nociones de tamaño de los puntos ya que un punto tiene tamaño cuando se realiza con la punta de un lápiz. Así, un "punto microscópico" puede ser asociado al número 0,000….001 mientras que los "puntos grandes" están asociados con números enteros. Una de las cuestiones que plantea este autor es la de comparar el número de puntos de segmentos de diferentes longitudes así como indicar el número de puntos "desaparecidos" en el segmento más corto de los dos:

Ya hemos visto que los segmentos A y B tienen infinitos puntos. Supongamos que la longitud de A es igual a la longitud de B + x, donde x es algún número mayor que cero. También se ha sugerido anteriormente que el segmento de longitud x tiene infinitos puntos. Es decir, los ∞ puntos sobre A menos los ∞ puntos sobre B dan un número ∞ de puntos sobre el segmento de longitud x. Entonces $\infty - \infty = \infty$. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Explica tu respuesta.

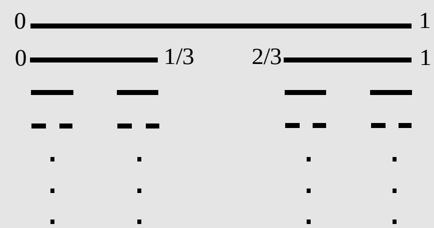


El autor ha recogido respuestas en las que un "número infinito" aparece como un número cuya representación contienen infinitos decimales. Se utiliza el valor de π para justificar la afirmación del enunciado, lo que sugiere una clara desconexión entre los puntos sobre un segmento y los números reales. Esta generalización de las propiedades de ∞ para obtener conclusiones sobre el conjunto de los puntos es un intento de *reducir el nivel de abstracción* al tratar con un conjunto infinito de elementos. Algunas respuestas manifiestan que el segmento con los "puntos desaparecidos" aún tiene infinitos puntos pero "unos pocos menos que el segmento más largo";

esta idea parece consistente con una intuición de la medida infinita de Tall. Este error de no distinguir entre magnitud infinita y representación decimal infinita fue compartida por el 91,7% de los estudiantes. También está extendida la noción común de que el infinito no tiene un valor específico lo que se corresponde con nuestro modelo intuitivo de *indefinición*.

1UNIC1P14. Por último, en el siguiente ítem se conjuga la comparación de conjuntos continuos con la divisibilidad indefinida que abordaremos en el apartado 5.3. El carácter fractal[14] de este enunciado supone una sofisticación que evidentemente no pretende obtener resultados formales sino las respuestas intuitivas de los estudiantes respecto a los dos tópicos indicados.

1UNIC1P14	*UNI*
Si realizamos el proceso indicado en la figura un número infinito de veces, *a*) ¿cuantos segmentos quedarán y cuál será su longitud? *b*) ¿cuántos segmentos se habrán borrado? *c*) ¿es comparable el conjunto de segmentos que quedan y el de segmentos que se han borrado?, ¿cuál tendrá mayor número de segmentos?	



Aquellas categorías de respuestas que han alcanzado los porcentajes más significativos se presentan en la tabla siguiente. A pesar del elevado número de alumnos que no han respondido, uno de cada cuatro, son de destacar algunas ideas que se desprenden de estos datos. En primer lugar, la diferencia entre los que reconocen la infinitud del conjunto de los segmentos que quedan y aquellos otros que lo hacen con el conjunto de los segmentos borrados es superior al 20%; resulta obvio que intuitivamente se ha extrapolado el caso finito a partir de los datos numéricos, pero sobre todo gráficos, de la figura bajo la influencia del modelo de *inclusión*, en esta ocasión una inclusión puramente gráfica; así lo confirma el hecho de que uno de cada cinco sujetos mantenga que "quedan más que los que se han borrado". Se podría esperar que algunos sujetos hubieran transformado el problema geométrico en su equivalente aritmético mediante el término general de una progresión geométrica pero, de nuevo, la compartimentación lo ha impedido: *la conversión e integración de contextos se halla lejos de los hábitos del aula de matemáticas y esto supone un verdadero reto para la investigación y para la didáctica*[15]. También hemos de destacar el bajo porcentaje de sujetos que reconocen la equivalencia y siempre a través del modelo *infinito = infinito*; la dificultad intrínseca a esta cuestión no es despreciable ya que la diferencia entre ambos conjuntos, en cada paso del proceso, es *n* y en este nivel aún es muy poca la familiaridad con el concepto de conjunto numerable. Por lo

1UNIC1P14	UNI
Quedan infinitos	68,0
"Su longitud será cada vez más pequeña"	40,0
"Su longitud será 0"	4,0
Se han borrado infinitos	46,7
Los dos conjuntos contienen los mismos: infinitos	8,0
Quedan más que los que se han borrado	21,3
No responde	25,3

14. Se trata del conocido *conjunto de Cantor* quien lo introdujo en 1883; es un subconjunto fractal del intervalo real [0, 1] que, aparte de su atractivo estético debido a sus extensiones al plano y al espacio, contradice una intuición relativa al tamaño de objetos geométricos: es un conjunto de medida nula pero no es vacío ni numerable.

15. Arcavi, A (2007). Hacia una visión integradora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, Conferencia Plenaria, *XIII Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas,* Granada.

tanto, estos resultados nos indican que el conflicto cognitivo ha enfrentado ambos modelos, presentes en el esquema conceptual, y que aunque la mayor parte de los sujetos ha aceptado el carácter infinito de los dos conjuntos, la intuición ha resuelto a favor de aquel modelo más vinculado a actitudes finitistas; de lo contrario debemos pensar que el alumno establece una diferencia de magnitud entre infinitos, lo cual no viene respaldado por investigación alguna.

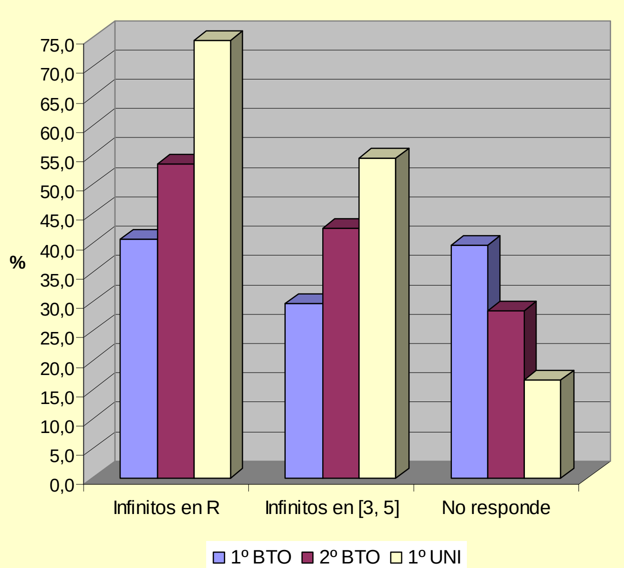
Por último, debemos señalar que hay una presencia importante del infinito potencial, un 40 %, a la hora de expresar el tamaño de los segmentos restantes haciendo uso de expresiones propias de la noción de límite tales como “la longitud será cada vez más pequeña” o “infinitesimalmente pequeña”; por el contrario, a diferencia de lo que observaremos en el apartado 5.3, la respuesta “su longitud será 0” presenta una frecuencia despreciable dado que entraría en contradicción con que “quedan infinitos segmentos”, afirmación que mantienen dos de cada tres estudiantes.

5.2.5. CONTEXTO ALGEBRAICO.

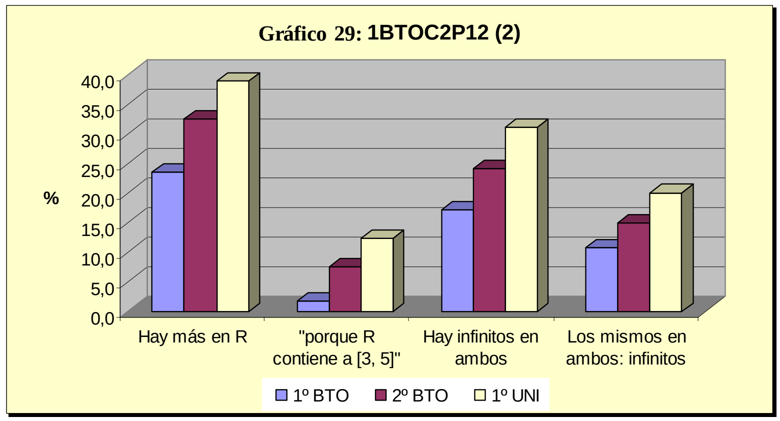
1BTOC1P12	*BTO + UNI*
a) ¿Cuántos valores (x, y), reales, satisfacen la ecuación $x + 2y - 3 = 0$? ¿Qué significa dicho resultado? *b*) Si x sólo pudiese tomar valores en el intervalo [3, 5], ¿cuántas soluciones tendría ahora dicha ecuación? *c*) ¿En cuál de los dos casos anteriores se obtiene un número mayor de soluciones, en *a*) o en *b*)?, ¿por qué?	

1BTOC2P12. En el siguiente ítem se retoma la idea utilizada en el 1BTOC1P10, es decir la comparación de un intervalo acotado con otro que no lo es, pero bajo una presentación más elaborada, con no pocas dificultades añadidas. En primer lugar, la referencia geométrica o funcional se halla implícita en la segunda pregunta del primer apartado y, como veremos, fue prácticamente ignorada; no obstante, con este enunciado se pretende explorar la influencia del contexto algebraico, no muy frecuente en este tipo de investigaciones En segundo lugar, la imagen que asocia a las soluciones de esta ecuación un conjunto infinito de números o puntos no queda al alcance de muchos estudiantes. A pesar de todo ello, podemos ver que los patrones de evolución obtenidos presentan bastantes similitudes con los correspondientes al ítem 1BTOC1P10.

Gráfico 28: 1BTOC2P12 (1)



En las dos primeras series del gráfico 28 podemos apreciar la influencia del modelo intuitivo *acotado/no acotado* en los patrones de evolución correspondientes. Aún manteniéndose la tendencia creciente de ambos, observamos una importante reducción en los porcentajes que reconocen la infinitud del intervalo [3, 5]. El análisis de las respuestas pone de manifiesto que existe una dificultad notable para asociar el intervalo [3, 5] con un subconjunto de $\mathbb{R}$ ya sea de puntos o de números, éste último favorecido en el enunciado; Este ítem, junto con el 1BTOC2P13, es el que presenta un mayor porcentaje de respuestas en blanco, en especial en BTO. La extensión del enunciado, su situación hacia el final del cuestionario y un contexto aún sin consolidar se encuentran entre las principales causas de valores tan elevados. La pregunta “¿qué significa dicho resultado?” pretendía que el alumno identificase la ecuación dada con la de una recta con el fin de facilitar posibles vínculos entre el contexto algebraico y el geométrico o el funcional. Pero, el porcentaje de respuestas que ha reconocido este hecho sólo se ha aproximado al 7% en 1UNI.

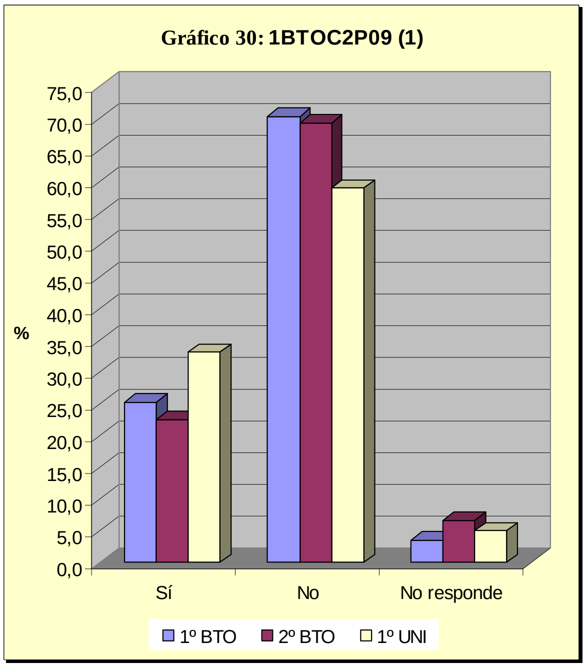


Los resultados correspondientes al apartado *c)* y a las categorías establecidas se han representado en el gráfico 29. El hecho de que uno de los conjuntos no esté acotado ha supuesto que la elección de $\mathbb{R}$ sea mayoritaria en todos los niveles como resultado de una combinación de los modelos *acotado/no acotado* y de *inclusión*, teniendo siempre presente que tales argumentos no se hallan explícitos en la mayor parte de los casos. También es posible observar cómo al responder a este tercer apartado en el que se plantea la comparación de ambos conjuntos de soluciones, la respuesta “hay infinitos en ambos” reduce considerablemente sus porcentajes respecto al ítem 1BTOC1P10, como se puede apreciar coparando estos resultados con los del gráfico 27. Esto se debe al hecho de que aún reconociendo tal carácter en ambos conjuntos, un buena parte de los sujetos mantiene que “aunque los dos son infinitos, $\mathbb{R}$ contiene más”, lo que supone una novedad respecto a los conjuntos numéricos no acotados, considerados con anterioridad, ya que en esta ocasión el modelo intuitivo *infinito* = *infinito* no presenta la solidez suficiente como para imponerse al modelo acotado/no acotado y esto se traduce en la pérdida de estabilidad en el patrón de evolución respecto a 1BTOC1P10. Incluso dentro de la categoría “hay más en $\mathbb{R}$” el argumento “porque $\mathbb{R}$ contiene a [3, 5]” sólo alcanza valores significativos en 1UNI. Otro peculiaridad que conviene destacar de este ítem es que los patrones de evolución de las categorías “hay los mismos en ambos: infinitos” y “hay más en $\mathbb{R}$” no son complementarios sino que presentan la misma tendencia creciente. Esto también supone una anomalía con respecto a todos los ítems considerados hasta ahora en los que ambos patrones eran complementarios o bien presentaban un elevado grado de estabilidad en una de las dos categorías. Hemos de pensar en el elevado número de sujetos que no responden para justificar este comportamiento de los resultados. Por su parte, los porcentajes de estudiantes que admiten la equipotencia son bajos con respecto a los valores que hemos encontrado en otras cuestiones, siendo en esta ocasión la identidad de los infinitos la única justificación que se apunta.

5.2.6. SOBRE LOS *TAMAÑOS* DE INFINITO.

1BTOC2P09	*BTO + UNI*
¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos; en caso contrario, justifica tu respuesta.	

1BTOC2P09. En todos los ítems anteriores los estudiantes han tenido que comparar dos o tres conjuntos infinitos. En sus respuestas se ha podido observar que entre las actitudes infinitistas existen dos posturas claramente diferenciadas: "todos los infinitos son iguales" o bien "unos infinitos son mayores que otros". Con el fin de establecer un ítem de control se presentó este que ahora consideramos. Los resultados registrados, véase gráfico 30, nos ofrecen algunos matices que debemos incorporar a los que hemos obtenido hasta ahora. En primer lugar, parece que la influencia del modelo *infinito = infinito* da lugar a unas frecuencias sensiblemente superiores a cualquiera de las obtenidas en todos los ítems de comparación de conjuntos, con un grado de estabilidad medio en su patrón de evolución, si bien éste presenta una tendencia decreciente. No obstante, si precisamos un poco más los diferentes tipos de argumentos que aducen los estudiantes, podemos apreciar la diversidad de sus razones en el gráfico 31. Entre ellas, en torno a un 20% expresa de manera explícita y muy estable dicho modelo, aunque no sería muy arriesgado proyectar estos valores a un porcentaje mayor de sujetos dado el gran número de estudiantes que no justifica su respuesta. Por otra parte, los términos "incalculable" e "ilimitado", que nos remiten al modelo de *indefinición* de infinito, les permiten eludir la contradicción que supone esta elección, si bien presentan en su patrón de evolución cierta tendencia a convertirse en elementos residuales. El infinito como "el número más grande" queda reducido, en estos niveles educativos, a elementos residuales pero quizás de manera latente que podría resurgir tras algún tiempo de alejamiento del contacto cotidiano con las matemáticas.



Recordemos que para Gardiner (1985) la persistencia de errores de este tipo se debe a no tener presente que dichos errores no son matemáticos, confundiendo la psicología de los procesos infinitos con las matemáticas de los procesos infinitos.

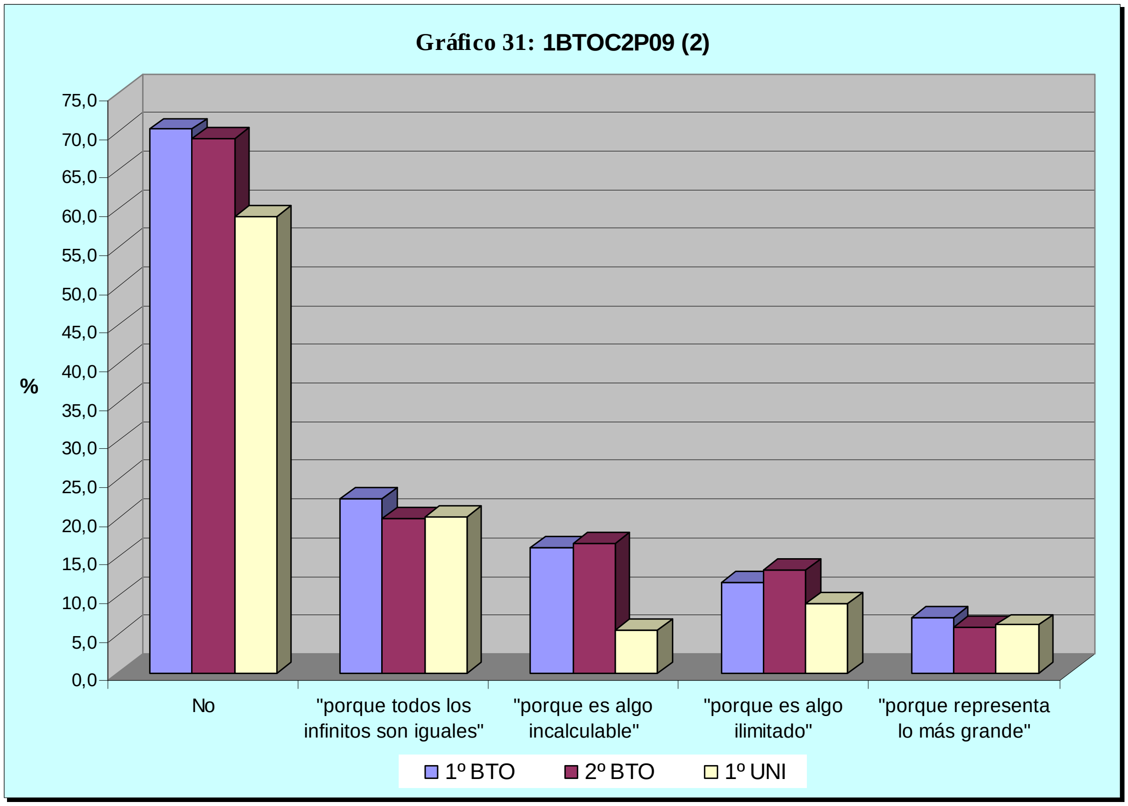


Gráfico 31: 1BTOC2P09 (2)

La respuesta afirmativa, que inicialmente podía sorprender por no encajar con los resultados analizados hasta ahora, queda minusvalorada ya que un porcentaje no despreciable en BTO considera que $+\infty$ y $-\infty$ son dos tamaños diferentes de infinito. El hecho de ignorar el valor absoluto nos indica, en parte, la naturaleza que estos sujetos le otorgan al infinito; la extensión natural de los números enteros y la imagen "el infinito es el número más grande" les ha conducido a establecer estos dos tamaños. Sólo en 1UNI cerca del 10% es capaz de distinguir entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ como dos conjuntos de cardinal diferente.

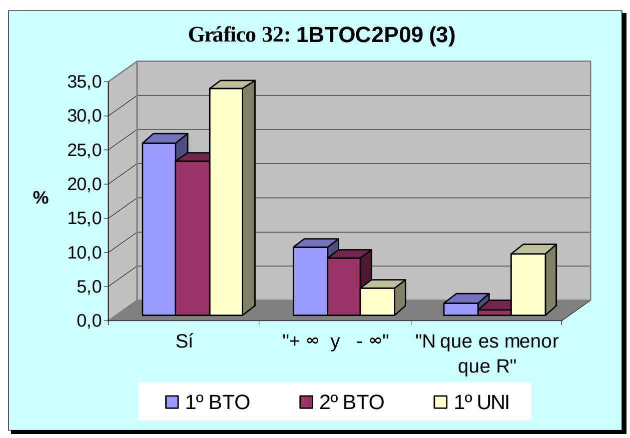


Gráfico 32: 1BTOC2P09 (3)

En consecuencia, este ítem nos ha proporcionado una síntesis representativa de la incidencia que tienen la mayor parte de los modelos intuitivos propuestos hasta ahora sobre la actitud de un sujeto frente a la magnitud de infinito. Se puede observar que en el esquema conceptual conviven modelos aparentemente antagónicos que son fruto del carácter contradictorio genuino de este concepto; así, por ejemplo, la herencia finitista, en su versión euclidiana, "el todo es mayor que las partes" se halla en la mayor parte de las respuestas del tipo "sí hay diferentes tamaños de infinito"; por el contrario, los modelos *infinito* = *infinito* o de *indefinición* inducen a la equivalencia entre todos ellos bajo la idea de un infinito actual, alcanzable o al menos imaginable, o bien de un infinito potencial, difuso, hacia el que se dirigen conjuntos convertidos en series cuya "convergencia" se convierte en su denominador común. A la vista de los resultados anteriores es evidente que la sofisticación académica de establecer diferentes cardinales entre conjuntos infinitos, tales como Card (ℕ) < Card (ℝ) del gráfico 32, queda fuera de los textos y, prácticamente, del alcance de la mayoría de los sujetos.

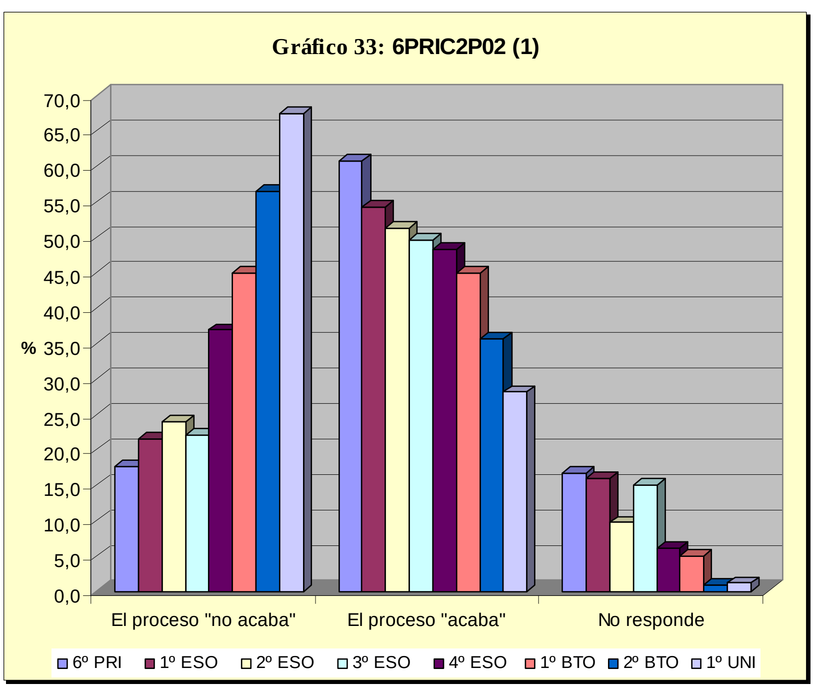
5.3. DIVISIBILIDAD INDEFINIDA Y CONTINUIDAD. INFINITO POTENCIAL.

Piaget e Inhelder (1948) tratan, como ya se ha mencionado en el capítulo 3, el concepto de divisibilidad indefinida tanto de objetos físicos como matemáticos así como la naturaleza del "último elemento" de dicha partición. Estos autores afirman que sólo en el periodo de las operaciones formales el sujeto puede imaginar el límite en el proceso de división indefinida de un segmento como un punto. Este resultado ya matizado por numerosos autores (Fischbein et al. 1979; Turégano, 1996; Garbín y Azcárate, 2002; Fernández y Solano (2005), etc.) nos ha llevado a incluir en los cuestionarios del presente trabajo la siguiente cuestión con el fin situar a los sujetos de nuestra muestra en dicho contexto.

5.3.1. CONTEXTO GEOMÉTRICO. ASPECTOS COMUNES.

6PRIC2P02	***Todos los niveles***
Supón que divides un segmento por la mitad y te quedas con una de las partes. Si esta operación la repites todas las veces que desees, ¿qué obtendrás al final? Justifica tu respuesta.	

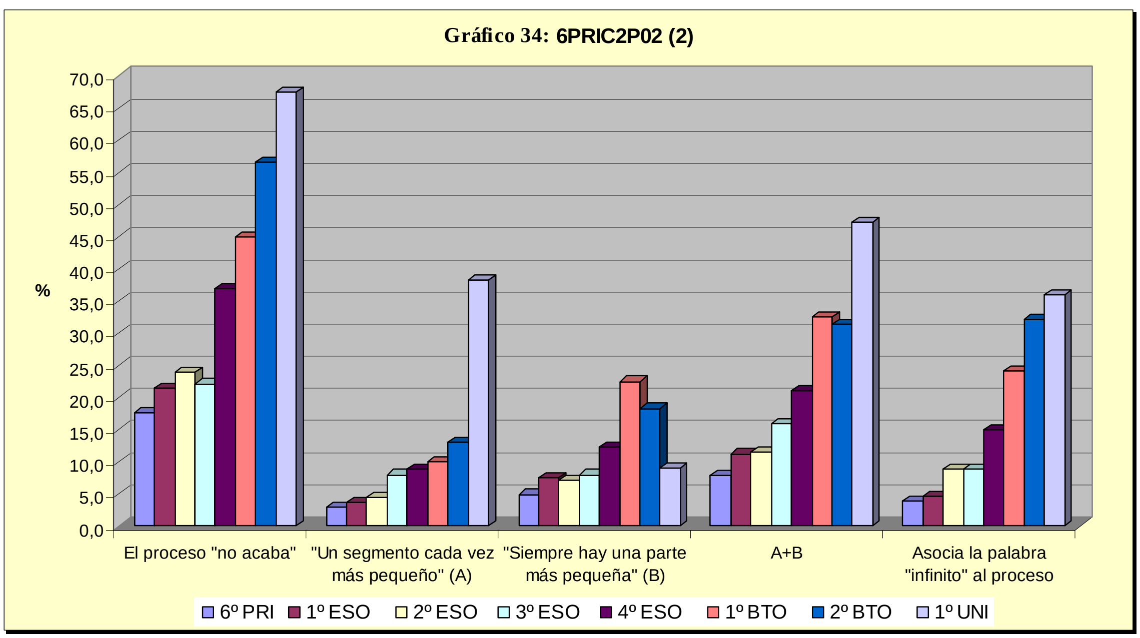
6PRIC2P02. Antes de analizar la naturaleza del resultado del proceso propuesto, que es el objeto de este ítem, es conveniente reparar en la actitud previa de los sujetos frente a este tipo de situaciones. Observamos en el gráfico 33 que frente al carácter finitista del enunciado inducido por la pregunta con sentido finalista, unos porcentajes cada vez más elevados, a partir de 4ESO, comienzan a ignorar o revelarse contra tal elemento inductor y, en consecuencia, el patrón de evolución de la categoría "el proceso no acaba" presenta, tras un periodo de marcada estabilidad en los primeros niveles, una tendencia claramente creciente como resultado de la introducción en el proceso de instrucción del vocabulario propio de la noción clásica de límite[16]. Por su parte, el patrón de evolución correspondiente a la perspectiva opuesta ofrece un perfil complementario, si bien más suave, sin llegar a bajar del 25 %, lejos de convertirse en un elemento residual mostrando hasta qué punto el modelo finitista permanece anclado en las experiencias materiales cotidianas. Se puede observar una franja con un grado de estabilidad desde 1ESO hasta 1BTO, justo donde se produce la inversión entre los porcentajes de ambas



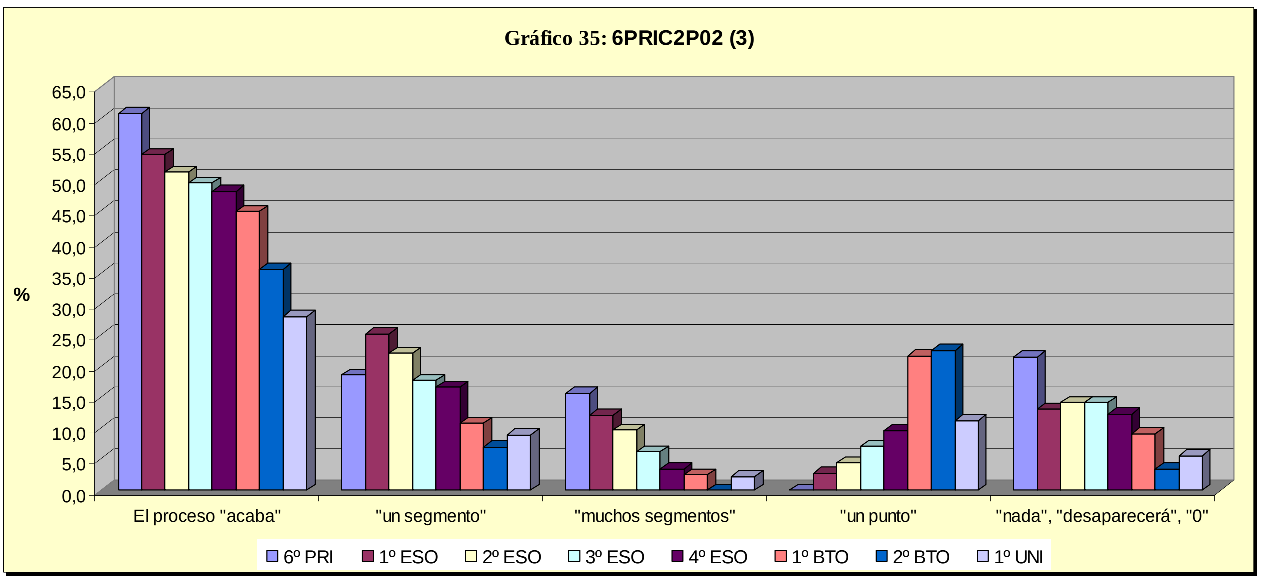
16. El currículo de 3ESO y 4ESO contempla el concepto de sucesión y, en particular, de progresión aritmética y geométrica.

categorías, o lo que es lo mismo entre las actitudes finitista e infinitista.

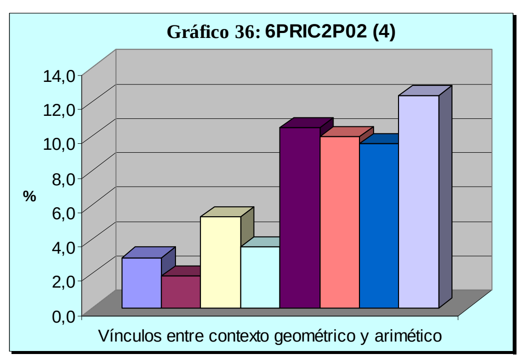
Debemos analizar ahora cómo se desglosan dichas actitudes a través de los diversos modelos intuitivos presentes en el esquema conceptual. En el gráfico 34 se detallan las correspondientes a la primera de ellas: “el proceso no acaba”. En la última de las series que aparecen en dicho gráfico podemos apreciar el patrón de evolución de aquellos sujetos que asocian la palabra “infinito” al proceso descrito en el enunciado y que, como podemos comprobar, corresponde al de un elemento emergente. Esta asociación aún no se ha producido de manera explícita en los primeros niveles y en los últimos quizás se considera obvia como para mencionarla. Por otra parte, se ha considerado pertinente descomponer el argumento principal aportado para justificar el carácter potencial del proceso de división en dos versiones equivalentes pero con perfiles diferentes y ciertos matices que conviene destacar; la primera de ellas, “un segmento cada vez más pequeño” indica la naturaleza de lo que “queda” o “va quedando”, esto es un segmento, supone la asimilación de un vocabulario propio de los niveles más elevados y presenta un patrón de evolución con la misma tendencia que el global; en cambio, en la segunda, “siempre hay una parte más pequeña”, hay una referencia temporal explícita, se elude con la ambigüedad la naturaleza del objeto que resta y el patrón de evolución es creciente-decreciente. La suma de ambas series restituye aproximadamente la tendencia original con la reducción porcentual habitual sobre el patrón total pero esta descomposición nos ha permitido trazar una cierta frontera entre actitudes más intuitivas y otras más académicas si no formales.



En cuanto a aquellos sujetos que piensan en “un final”, sí se detienen en determinar qué entidad encarna dicho final. Una porción significativa en los primeros niveles entiende que si la división finaliza será porque ya no queda nada que *dividir* o *partir*, aunque las mayores frecuencias se obtienen para la respuesta “un segmento” –o su equivalente en menor proporción “muchos segmentos”-, lo que refleja una importante contradicción con el final del proceso declarado un poco antes. Los niveles superiores salvo 1UNI optan, en su mayoría, por un objeto de naturaleza más controvertida –teóricamente- que los dos reseñados por carecer de características materiales: el punto. Ahora bien, recordemos que en el ítem 6PRIC1P07 sobre el contenido de puntos en un cuadrado un buena parte de los alumnos adjudicaba al punto una estructura bastante definida que entonces les permitía dotar de sentido a la cuestión. Por lo tanto, se incurre de nuevo en una contradicción en absoluto despreciable ya que tal naturaleza permitiría continuar el proceso de partición; pero es claro, que la intuición no repara en contradicciones –es parte de su fortaleza según Fischbein- y para ello recurre a un elemento con la suficiente carga de indefinición como para zanjar el problema y no enfrentarse a un modelo de un considerable peso intuitivo: el proceso tiene fin, tiene que acabar. A pesar de todo esto, en los niveles intermedios el sentimiento de contradicción no es ajeno a algunos sujetos que llegan a expresar sus dudas y plantear una posible "división del punto". Es interesante observar que la consideración actual del infinito bajo el planteamiento de esta cuestión vendría acompañada de la respuesta "cero" u otra equivalente, en cambio en los niveles superiores que son aquellos que ya han accedido a la noción de límite este tipo de respuesta presenta un patrón de evolución decreciente propio de un elemento residual.

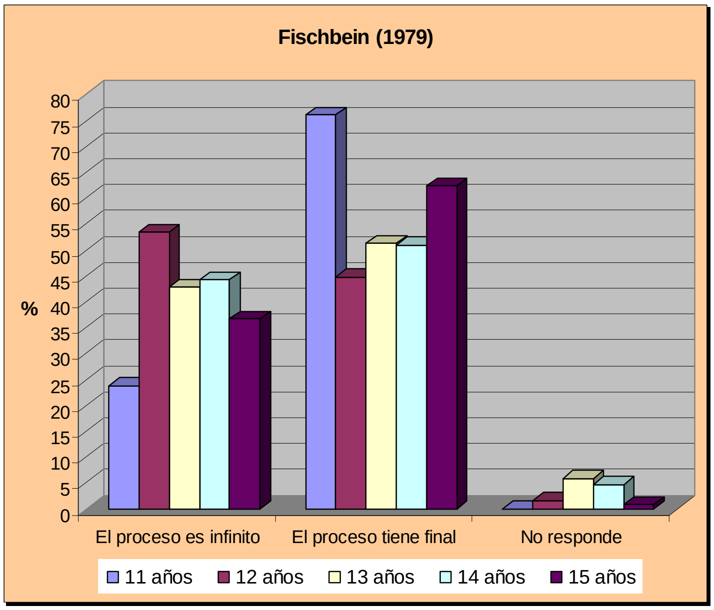


Por último, hemos querido una vez más observar la capacidad del alumnado para establecer vínculos entre contextos diferentes. En este caso consideramos la relación del contexto geométrico del enunciado con uno puramente aritmético; podemos comprobar como se había conjeturado en las hipótesis de partida que tal recurso es bastante infrecuente. Sólo a partir de 4ESO se encuentran valores significativos pero como podemos ver la distribución es lo suficientemente irregular como para concluir que tal habilidad se convierta en un elemento propio del esquema conceptual, si bien apunta características de un elemento emergente.



En Fischbein et al. (1979) se plantea un ítem semejante a este con elementos que inducen a pensar en el infinito potencial muy destacados tales como "se hacen más y más pequeños"; las categorías que establecen los autores y los porcentajes correspondientes se recogen en el gráfico adjunto:

Dividimos el segmento AB en dos partes iguales. El punto H es el punto medio del segmento. Ahora dividimos AH y HB. Los puntos P y Q representan los puntos medios del segmento AH y HB, respectivamente. Continuamos dividiendo de la misma manera. Con cada división los segmentos se hacen más y más pequeños. ¿Llegaremos a una situación tal que los fragmentos sean tan pequeños que seamos incapaces de dividirlos más? Explica tu respuesta (se adjunta un figura explicativa).



A la vista de estos resultados podemos comprobar la diferencia tanto cualitativa como cuantitativa respecto de los presentados más arriba, obtenidos en nuestro trabajo, con los que sólo encontramos acuerdos puntuales. Los patrones de evolución son muy irregulares, sin una tendencia definida, probablemente debido a los pequeños tamaños de muestra elegidos para los niveles inferiores. Ambos tipos de respuestas presentaron explicaciones tanto "abstractas" como "concretas" semejantes a las registradas en la presente investigación; así, el proceso es infinito porque "en todo segmento hay un número infinito de puntos", "siempre podemos continuar dividiendo un segmento" y "con instrumentos perfectos siempre podríamos continuar". Por su parte, el proceso es finito porque "el segmento está limitado", "nuestros instrumentos están limitados" y "todo tiene un final".

En el capítulo 3 se ha hecho referencia a Núñez (1997) que plantea una cuestión abierta sobre una adaptación de la paradoja de Zenón. El autor establece tres categorías de respuestas: (1) se llega al destino, (2) no se llega al destino y (3) dan dos respuestas diferentes a menudo contradictorias. En todos los grupos de edad se encuentran las dos primeras categorías pero la tercera sólo aparece en los grupos de mayor edad. Los alumnos de 12 y 14 años dieron respuestas del tipo "tomará mucho tiempo pero llegaremos" o "uno llegará porque al final ya no se puede avanzar la mitad, estará muy cerca". Por último, menos del 25% de los sujetos de 12 y 14 años presentaron argumentos a favor de la idea de que sólo nos aproximaremos al destino sin alcanzarlo nunca, unos valores más en consonancia con los de este trabajo que los obtenidos por Fischbein. Según Núñez la división indefinida no parece ser dominada en la etapa de las operaciones formales, al menos no con la claridad y certeza presentadas en Piaget et al. (1948).

Garbín (2000) plantean una cuestión, a alumnos de 16 a 17 años, en la que muestra un segmento AB del que se biseca sucesivamente la mitad de la derecha y pregunta si es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincida con el extremo de la derecha. El 35% respondió afirmativamente y el 55% negativamente lo que también está más en sintonía con nuestros valores que con los de Fischbein[17]. Un 5% de los alumnos distinguieron entre el aspecto

17. Esta misma autora obtiene, en un trabajo posterior, que el 25% responde afirmativamente y el 66% negativamente, lo que difiere notablemente de sus resultados anteriores y de los del presente estudio.

"teórico" y el "práctico" de la pregunta. La respuesta afirmativa se basó fundamentalmente en la finitud del segmento o bien en la infinitud de las bisecciones. En cambio, la respuesta negativa se basó en que B no puede ser un punto de bisección, por ser un extremo, o bien porque el proceso de bisección se aproxima o tiende a B y nunca llega. La autora destaca algunas de las ideas encontradas; así, el alumno puede tener una representación física del segmento, es decir como un espacio finito y con medida, como un espacio geométrico con una distancia numérica o bien como el cardinal de la bisección, lo que puede conducir bien a un proceso finito o bien infinito de bisecciones; también ocurre que los puntos de cada bisección son considerados como una marca física, con lo que el grosor del lápiz puede ser determinante para dar un número finito de bisecciones; por último, el segmento puede ser considerado como un conjunto con infinitos puntos y, por tanto, el proceso de bisección será infinito en este caso con lo que la coincidencia del punto de bisección con el extremo no será aceptada. En Garbín (2005a) se plantea la misma cuestión a estudiantes universitarios y se obtiene que el 43,8 %, muy lejos de nuestro 67,4%, afirma que el punto de bisección se aproxima y tiende al extremo B, bien porque "siempre hay una distancia para bisecar" bien porque "en una recta o segmento hay infinitos puntos"; para estos alumnos el proceso infinito no es completo. Para el 16,9% el proceso es completo, es decir el punto de bisección coincide con el extremo del segmento en algún momento, mientras que un 14,6% considera que no se puede determinar[18].

5.3.2. CONTEXTO GEOMÉTRICO. CUESTIONES ESPECÍFICAS.

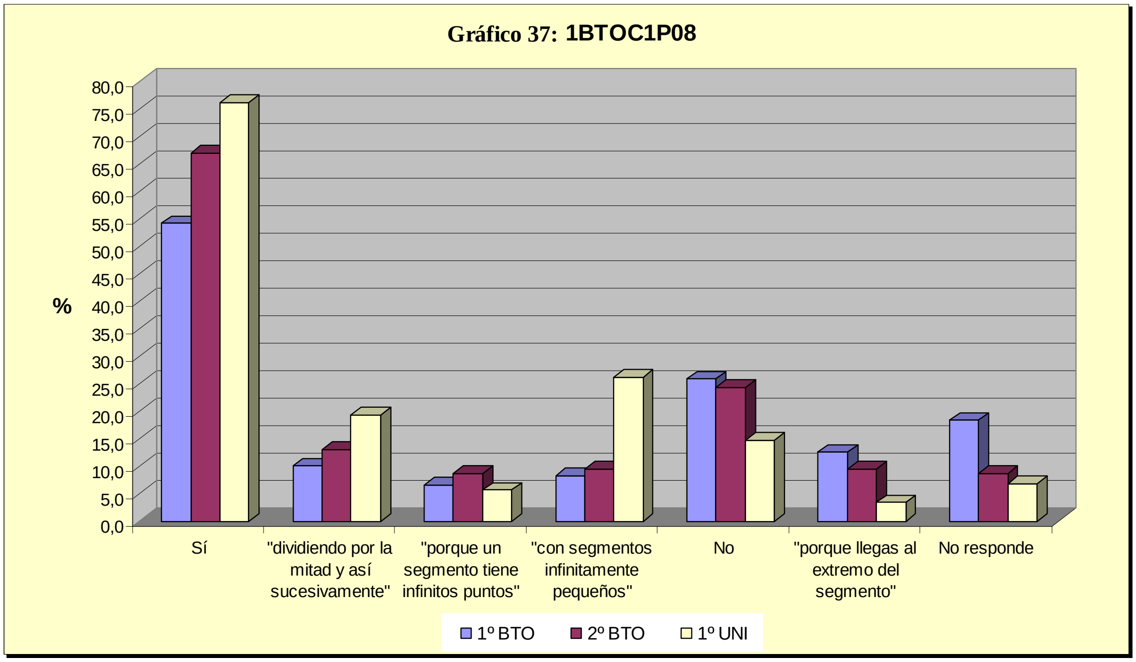
1BTOC1P08	***BTO + UNI***
¿Puedes situar infinitos segmentos dentro de un segmento dado, AB, de longitud l?, ¿cómo?	

1BTOC1P08. Se ha considerado el siguiente ítem como, en cierta medida, la situación inversa a la anterior y se ha incluido en el mismo cuestionario, 1BTOC1P03, con el fin de facilitar el establecimiento de vínculos entre ambas. Tendremos así dos puntos de vista de una misma cuestión con lo que podremos comprobar la complementariedad de los resultados recogidos y completar algunas de las conclusiones que obtuvimos anteriormente. Este ítem también presenta elementos comunes con los relativos a sumas infinitas que trataremos en el apartado 5.4. El gráfico 37 nos ofrece las distribuciones de las diferentes categorías halladas y sus argumentos más representativos.

En primer lugar, comparando estos resultados con los del gráfico 33, podemos ver que existe un paralelismo notable entre el patrón de evolución de la categoría "el proceso no acaba" de aquel ítem y el de la categoría "sí es posible" en el ítem actual que alcanza valores superiores a aquellos del orden de unos diez puntos porcentuales. Ahora bien, a pesar de la semejanza, debemos destacar una incoherencia obvia entre ambas respuestas dadas en buena parte por los mismos sujetos: en el primer caso se considera que el proceso no se puede completar mientras que en segundo se afirma justo lo contrario. Sin embargo, un análisis más detallado del gráfico 37 nos permite apreciar que los tipos de justificaciones que acompañan a la respuesta afirmativa presentan un claro carácter potencial, en particular las que proponen "dividir por la mitad sucesivamente" o "unir segmentos

18. Fischbein et al. (1979) y Turégano (1996) también proponen sendas cuestiones sobre la naturaleza "final" y el área del "último" elemento de series infinitas de triángulos y cuadrados inscritos; este asunto aparece en el contexto del apartado 5.4.

infinitamente pequeños"; por lo tanto, este tipo de argumentos matizan la contradicción y permiten establecer la conexión con los resultados del gráfico 33. Por el contrario, los valores correspondientes al caso finitista presentan diferencias mucho más apreciables tanto en el patrón de evolución, que en esta ocasión presenta un cierto grado de estabilidad aun siendo decreciente, como en las frecuencias que son sustancialmente menores, entre un 15 y un 20%.



Por otra parte, una fracción muy pequeña, entre un 10% y un 17%, aporta un posible algoritmo para resolver el problema, "dividir por la mitad sucesivamente", que coincide con el modelo que se utilizó en el ítem de referencia y que nos da una idea del grado de conexión entre ítem equivalente de un mismo cuestionario. Hay algunos sujetos, tercera serie, que consideran el punto como un segmento, degenerado pero segmento al fin y al cabo, que permite resolver afirmativamente el problema. El concepto de "infinitamente pequeño" sólo está arraigado en 1UNI como resultado de todo un cuatrimestre intenso de análisis infinitesimal, incluida la parte correspondiente a 2BTO de su último trimestre, que ha servido para incorporar parte de su terminología al esquema conceptual. La respuesta negativa, en cambio, pone de manifiesto un profundo finitismo que se remite a la naturaleza acotada del segmento para zanjar la cuestión. Como ya se ha mencionado anteriormente, el hecho de que los objetos que se proponen para razonar sobre el infinito posean algún tipo de limitación, cota, frontera, etc. conduce a un número importante de alumnos a establecer un isomorfismo con objetos materiales que imponen sus propias limitaciones físicas. Por último, destacaremos el elevado porcentaje de alumnos de 1BTO que no responden y que podemos atribuir al hecho de que aún no han adquirido la familiaridad suficiente con lo "infinitamente pequeño", concepto asociado a la idea de límite.

5.3.3. CONTEXTO NUMÉRICO.

6PRIC1P02	***PRI + ESO***
Considera un número positivo cualquiera; a continuación lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final?, ¿por qué?	

6PRIC1P02. El objetivo de la siguiente cuestión es el de observar la variación del patrón de evolución en función de los contextos geométrico y numérico, intentado conservar en todo lo posible el paralelismo con el enunciado de los dos ítems anteriores, en particular con 6PRIC2P02. Sin embargo, es preciso observar que este enunciado presenta un inconveniente para los niveles inferiores que aunque conocen los números decimales aún no los han incorporado plenamente a su esquema conceptual como objetos habituales de pensamiento matemático. Esto, como se puede apreciar en el histograma correspondiente del gráfico 38, ha dado lugar a unos porcentajes elevados de estudiantes que han respondido a la pregunta con la imagen de la "división entera", alterando evidentemente el resto de resultados. Una investigación con una mayor componente cualitativa que considerara la interacción con el sujeto podría introducir especificaciones o aclaraciones en los momentos precisos que salvasen esta situación (Falk, 1986). De cualquier modo podemos analizar las tendencias, en particular para (3+4) ESO que son niveles menos afectados por el hecho anterior.

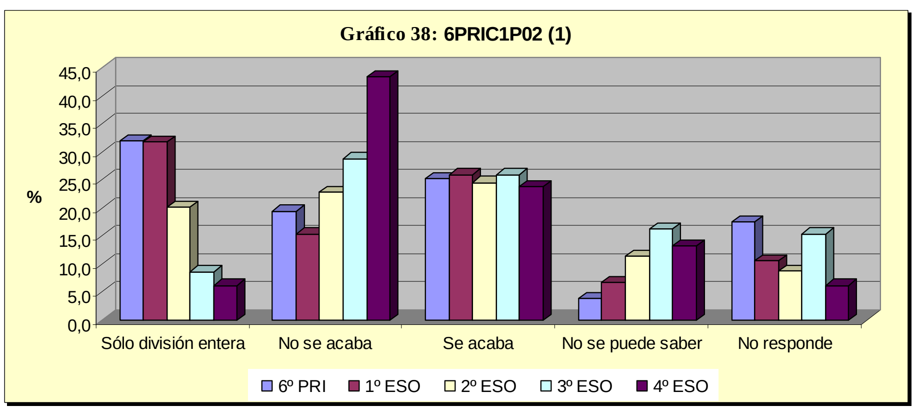
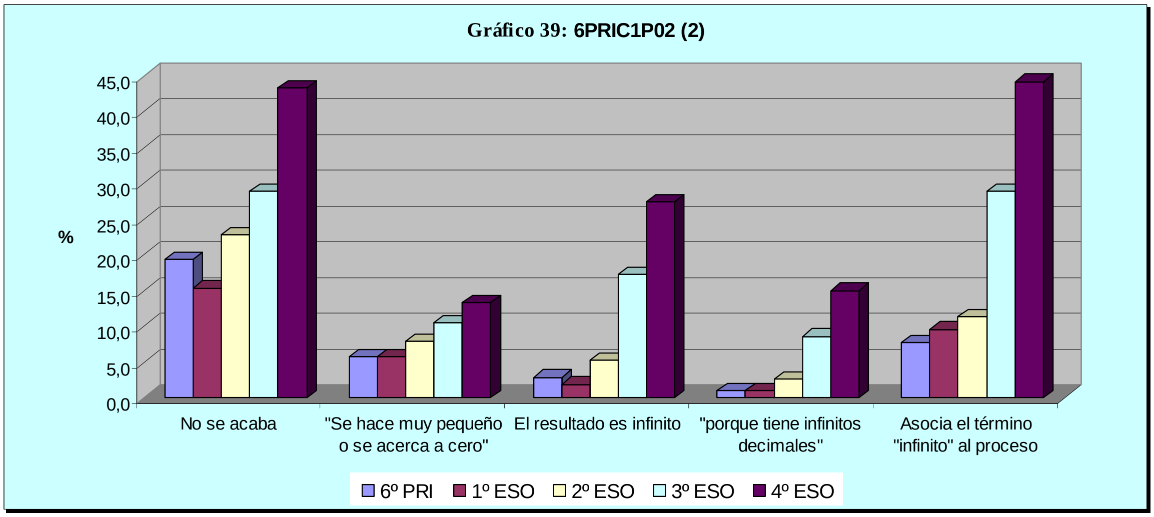


Gráfico 38: 6PRIC1P02 (1)

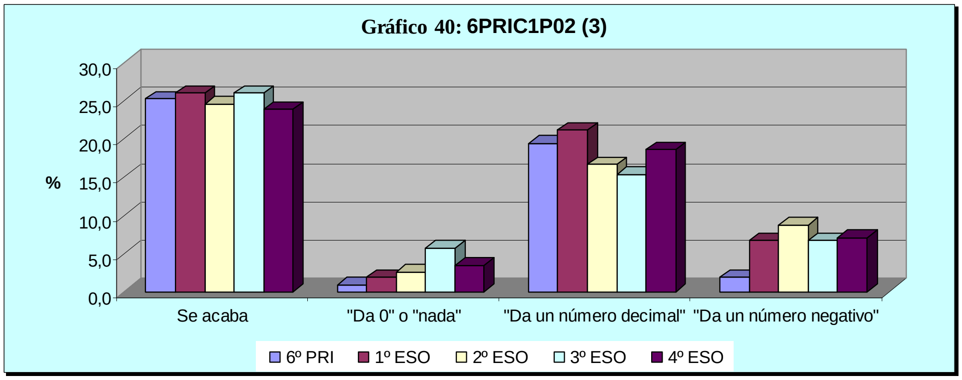
En principio cabe destacar que aparecen nuevas categorías frente al ítem anterior. Así, podemos advertir que resurge como elemento emergente la categoría de respuestas "no se puede saber" que en los niveles inferiores va asociada al argumento "porque depende del número con que comencemos" y en los niveles superiores al modelo de *indefinición* "porque no sabemos cuándo hay que parar"; el patrón de evolución de dicha serie presenta una tendencia creciente a diferencia de los que habíamos hallado hasta ahora que eran decrecientes o bien presentaban un grado de estabilidad apreciable; en consecuencia, esta categoría representa la emergencia de la contradicción que provoca este contexto frente al geométrico y el conflicto cognitivo subsecuente. Por otra parte, la categoría "no se acaba" se mueve en valores completamente análogos al ítem 6PRIC2P02, coincidiendo prácticamente los patrones de evolución para los cinco niveles considerados. En cambio, aquella otra correspondiente a que el proceso "se acaba" ha sufrido una disminución porcentual considerable presentando un patrón de evolución invariante, es decir, con un elevado grado de estabilidad; la explicación de esta reducción debemos hallarla en, a parte de la influencia de los contextos que comentaremos a continuación, la serie espúrea "sólo división entera" que evidentemente afecta al resto de series.

Con respecto a la actitud infinitista, aunque el patrón de evolución se mantiene respecto al ítem 6PRIC2P02, el análisis de las justificaciones nos ofrece una situación diferente con nuevas subcategorías. En primer lugar debemos subrayar la que corresponde a las expresiones “se hace muy pequeño” o bien “se acerca a cero”, aún emergentes, propias del infinito potencial y que



presentan porcentajes similares a los recogidos en el ítem 6PRIC2P02 para los niveles considerados. Y, en segundo lugar, surge también como elemento emergente la respuesta “el resultado es infinito” en un sentido que volveremos a encontrar en lo sucesivo aunque no siempre expresado de manera explícita: “el resultado es infinito porque tiene infinitos decimales”. Consideremos con más detalle esta idea. Por una parte, representa una extensión del tópico, recogido en numerosas investigaciones, “infinito como un número muy grande” o “el número más grande”; en este caso sería “… de decimales”. Nos hallamos ante un obstáculo didáctico resultado de una instrucción poco precisa cuando se introduce el término infinito –que no el concepto- a través de ejemplos en el aula de los niveles educativos inferiores. Si “infinito” se asocia a “cantidad” muy grande de cualquier tipo de objetos, tendremos que esperar entonces que una cantidad muy grande de decimales también sea “infinita” y, por extensión, un número con una parte decimal muy numerosa. Pero, por otra parte, esta utilización supone en cierto sentido un rasgo propio del infinito actual que el sujeto asocia al tipo de resultado; lo está entendiendo como un objeto definido, estático y no en progreso como la acepción “se acerca a…” que indica tendencia. Por último, se presenta también la serie de valores correspondientes a aquellos alumnos que han vinculado, en algún momento de su explicación, el término infinito con el proceso descrito en el enunciado sin que necesariamente esto debiera entenderse como un pronunciamiento sobre el final del dicho proceso.

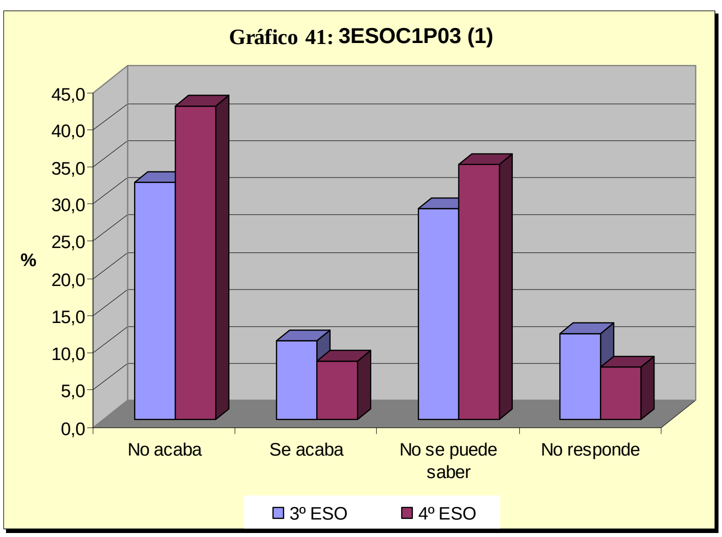
Las razones aducidas para justificar la respuesta finitista se hallan representadas en el gráfico 40. En primer lugar, vemos que tales argumentos han quedado reducidos prácticamente a uno sólo: “al final se obtiene un número decimal” o bien “se obtienen muchos decimales” cuyos análogos en el ítem 6PRIC2P02 fueron “queda un segmento” o “muchos segmentos”; esta categoría presenta un elevado grado de estabilidad entre el 15% y el 20% aproximadamente, si bien con una tendencia ligeramente decreciente. La respuesta “da 0 ó nada” ha quedado reducida a porcentajes simbólicos a diferencia de la división de un segmento en donde estaban por encima del 10 %. Una consideración inesperada ha sido el tipo de respuesta “si dividimos muchas veces un número al final será negativo”; en este caso el modelo intuitivo dividir-reducir ha motivado esta conclusión bien ante el agotamiento de los números enteros positivos o bien, incluso, de los números decimales, ignorando la puntualización hecha en el enunciado sobre la naturaleza del número de partida.



3ESOC1P03. A los grupos de (3+4) ESO cuyo cuestionario no contenía el ítem anterior se les introdujo la siguiente variación del mismo problema:

La siguiente máquina [se adjunta figura, ver Anexo Cap. 4] divide entre 2 el número que introduzcas; el resultado lo vuelve a dividir entre 2 y así sucesivamente; sólo se detiene cuando alcanza el resultado más pequeño posible. ¿Cuál será ese resultado? ¿Estará funcionando mucho tiempo?, ¿Por qué?

De esta manera podremos observar cómo varían las actitudes adoptadas frente al mismo proceso bajo un contexto numérico pero mediante una representación que subraya su aspecto iterativo.



El gráfico 41 nos ofrece los resultados globales. De nuevo encontramos la interpretación entera de la división como categoría con valores significativos. La actitud infinitista “no se acaba” se presenta en esta ocasión bajo las expresiones “funcionará siempre” o bien “siempre se puede dividir entre dos” y los valores recogidos son ligeramente superiores a los del ítem anterior. Por su parte, la actitud finitista “se acaba” ha quedado reducida a valores despreciables y dentro de ellos el resultado “da 0” no supera el 4%. En este caso, el enunciado, bajo un modelo circular, ha discriminado claramente esta opción respecto a la pregunta de la cuestión anterior que sugería más bien un esquema lineal. Por último, la opción “no se puede saber” ha incrementado sensiblemente sus valores pero ha conservado el mismo tipo de argumentos en los que se apoyaba en el caso anterior.

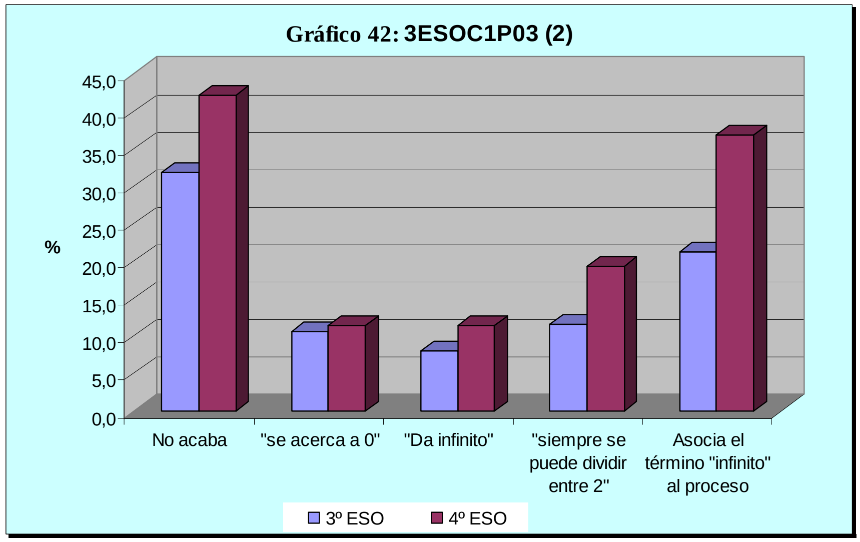


Gráfico 42: 3ESOC1P03 (2)

En cuanto a las respuestas que se pronuncian en un sentido infinitista, aquellas que han supuesto valores significativos aparecen recogidas en el gráfico 42. En primer lugar, la respuesta "se acerca a cero", "infinitamente pequeño o muy pequeño que tiene su análoga en el ítem anterior presenta unos resultados equivalentes a los obtenidos allí. La imagen "acercarse a" o "hacerse cada vez más pequeño", que a partir de 1BTO monopolizará buena parte de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tiene un carácter testimonial pero indicador de cierta tendencia natural hacia la versión potencial del infinito. En segundo lugar, observamos que la opción "el resultado es infinito" ha sufrido una disminución considerable; de nuevo se evidencia que las dos imágenes que sugieren ambos enunciados inciden definitivamente en la respuesta. Mientras que la imagen "lineal" produjo una estructura de cadena con infinitos eslabones, los decimales producto de la división, que sugerían que el infinito era un objeto con entidad propia, actual, esta imagen "circular" ha producido un desdoblamiento entre esa actitud y otra expresada a través de la propiedad iterativa "siempre se puede dividir entre dos" que se identifica claramente con la idea del infinito potencial. Por último, la asociación de la palabra infinito, en uno u otro sentido, se ha movido entre valores ligeramente superiores a los registrados en el ítem anterior.

6PRIC2P05	***PRI + ESO***

Considera la siguiente sucesión de números:

0,1 0,01 0,001 0,0001 0,00001 · · ·

Si continuamos escribiendo números, ¿crees que se llegará a alcanzar el 0?

☐ Si. ¿Cuándo? ☐ No. ¿Por qué?

6PRIC2P05. Este ítem plantea la divisibilidad indefinida dentro de un contexto numérico pero bajo una representación diferente. Ahora se presentan de manera explícita los resultados del proceso bajo un aspecto secuencial. Esencialmente se trata de la cuestión 6PRIC2P02 donde ha variado el divisor y en la pregunta se ha eliminado el factor inductor "¿qué resultado se obtendrá *al final*?" a cambio de introducir el *posible* resultado. Esto será suficiente para que las respuestas experimenten un cambio sustancial y evidencien la fuerte sensibilidad de los resultados bajo cambios de representación. En realidad, la unanimidad en este caso es prácticamente completa respecto a las dos categorías propuestas debido al sesgo producido por este enunciado. Los porcentajes de preguntas no respondidas y de respuestas afirmativas ha registrado valores despreciables mientras que el patrón de evolución de la respuesta negativa presenta un grado de estabilidad elevado por encima del 90%. Esto hace irrelevante el análisis de estas dos categorías, por lo que nos centraremos en los argumentos con los que se justifica la imposibilidad de alcanzar la cota de esta sucesión que aparecen representados en el gráfico 43. Volvemos a encontrarnos con dos tipos justificaciones; por una parte, la representada por las respuestas "porque siempre hay un 1 al final" y "porque siempre se

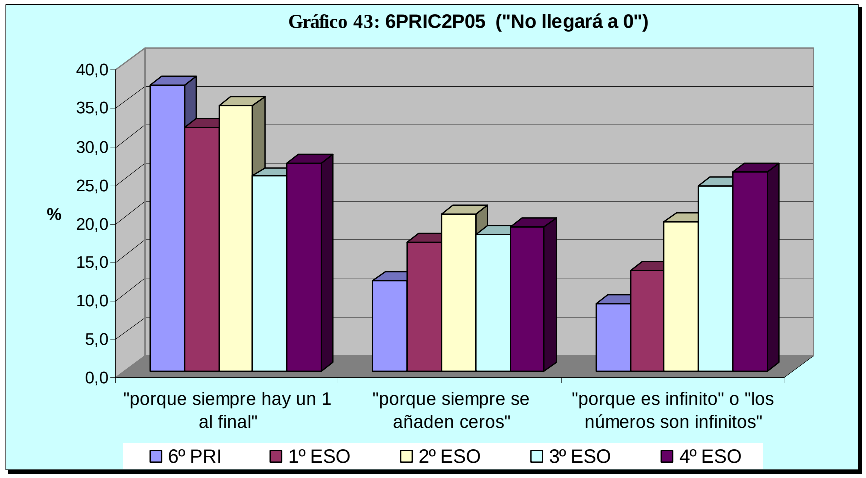


Gráfico 43: 6PRIC2P05 ("No llegará a 0")

añaden ceros" que recoge la vocación potencial claramente mayoritaria con un cierto grado de estabilidad y, por otra, también reencontramos la versión aparentemente actual del infinito, "porque es infinito" o bien "porque los números son/hay infinitos" que, como vemos, presenta un patrón de evolución creciente, en este caso propio de un elemento emergente. Sin embargo, ambas posiciones impiden entender el límite de esta sucesión desde un punto de vista verdaderamente actual, es decir alcanzable; la primera de ellas, es evidente, por su carácter potencial y la segunda porque supone en realidad un sentido finitista del conjunto de decimales del "último término" de la sucesión.

Este tipo de cuestiones sobre divisibilidad indefinida abre una vía que permite explorar y profundizar otros aspectos de interés tales como la relación que establecen los sujetos entre los procesos infinitos y las cotas de un determinado intervalo de números racionales y/o reales a partir del carácter inagotable atribuido a dichos procesos (Fischbein, 1987). Los siguientes ítems desarrollan esta línea de trabajo adaptándola a diferentes niveles educativos.

6PRIC2P01	***PRI + (1+2) ESO***

Imagina el siguiente juego entre dos personas. Cada una dice, cuando es su turno, un número distinto de cero -pueden ser números enteros o decimales, pero siempre positivos-. Gana aquél que diga el número más pequeño.

a) ¿Preferirías ser tú el que comenzase el juego?, ¿por qué?

b) ¿Cuánto durará el juego?, ¿por qué?

6PRIC2P01. En este caso las preguntas son indirectas evitando sugerencias que arrojen sesgos como el de la cuestión anterior. Vemos ahora en la figura 44 que los patrones de evolución de las dos categorías principales han mantenido prácticamente la misma tendencia que los correspondientes al ítem 6PRIC2P02, sobre la división de un segmento en mitades sucesivas, pero no así sus valores porcentuales; crecen los de aquellos alumnos para los que el juego "no acaba" y disminuyen los de aquellos otros que consideran que "acaba" y, además, estas variaciones son más pronunciadas en ambos casos que en el ítem de referencia. De hecho, el equilibrio entre ambas actitudes, que en el dicho ítem se alcanzaba en 1BTO, ahora se obtiene en 2ESO. Por su parte, el número de alumnos que no responde se ha reducido a índices completamente razonables como para no tener que aludir a una dificultad de comprensión del enunciado o a una interpretación indeseada del mismo. En consecuencia, este contexto bajo una representación en lenguaje natural ha favorecido el incremento de modelos infinitistas, si bien los finitistas aún siguen siendo mayoritarios en los dos primeros niveles.

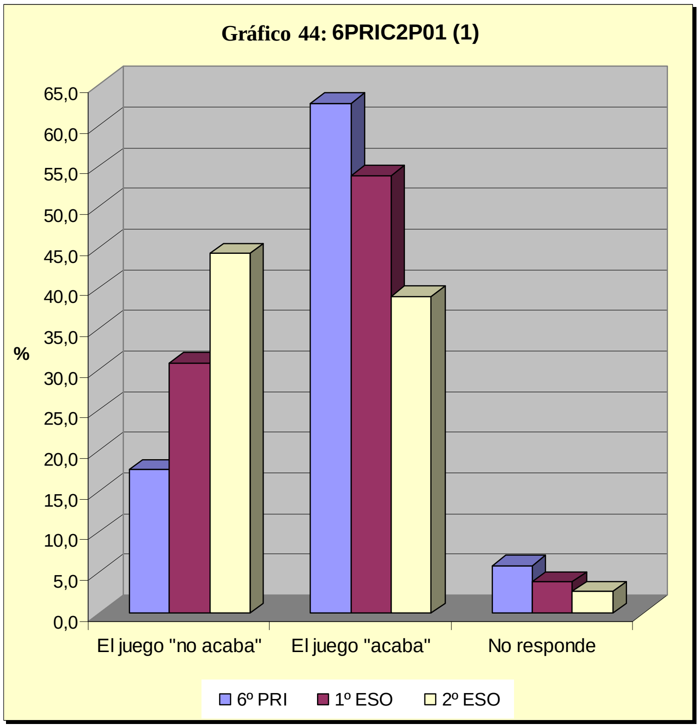


Gráfico 44: 6PRIC2P01 (1)

Las respuestas sobre la preferencia a la hora de iniciar el juego aportan una valiosa información adicional sobre las contradicciones que afloran en el tratamiento de infinito en los sujetos más jóvenes. Si comparamos el diagrama anterior con el del gráfico 45, podemos ver que reconocer el carácter indefinido del juego no implica necesariamente que el individuo considere indiferente el comienzo del mismo. La amplia muestra de comentarios al respecto pone de manifiesto que este contexto que facilita el abandono de una actitud finitista por una parte nos ofrece a su vez una considerable gama de argumentos emocionales y afectivos: “prefiero ser el segundo porque cuando empiezo no me viene nada a la cabeza”, “prefiero ser el segundo porque si no pensará que soy una egoísta”, “por educación”, “prefiero ser primero porque si gana él me dará un poco de envidia”, “no me gusta empezar los juegos”, etc. No obstante, si atendemos a los argumentos registrados con cada elección, podemos comprobar que “ser el segundo” va asociado en buena parte a cierta idea de continuación del juego y, por lo tanto, si éste se interrumpe eventualmente el segundo jugador será el ganador; en cambio, “ser el primero” supone que la imagen del “número más pequeño” se ubica sólidamente en el esquema conceptual. Por último, como ya hemos mencionado, aunque el patrón de evolución de la respuesta “da igual quién comience el juego” muestra su paralelismo con la ya analizada “el juego no se acaba”, las diferencias en sus valores que pasan del 10 al 15% en 6PRI y del 30 al 40% en 2ESO, aproximadamente, encuentran su explicación en una porción de sujetos que aún reconociendo que este proceso no puede finalizar manifiestan su preferencia por “ser el segundo” –oscila en torno al 10%-. Ya hemos dicho que tras esta actitud se halla un infinitismo en ciernes, comparable con los

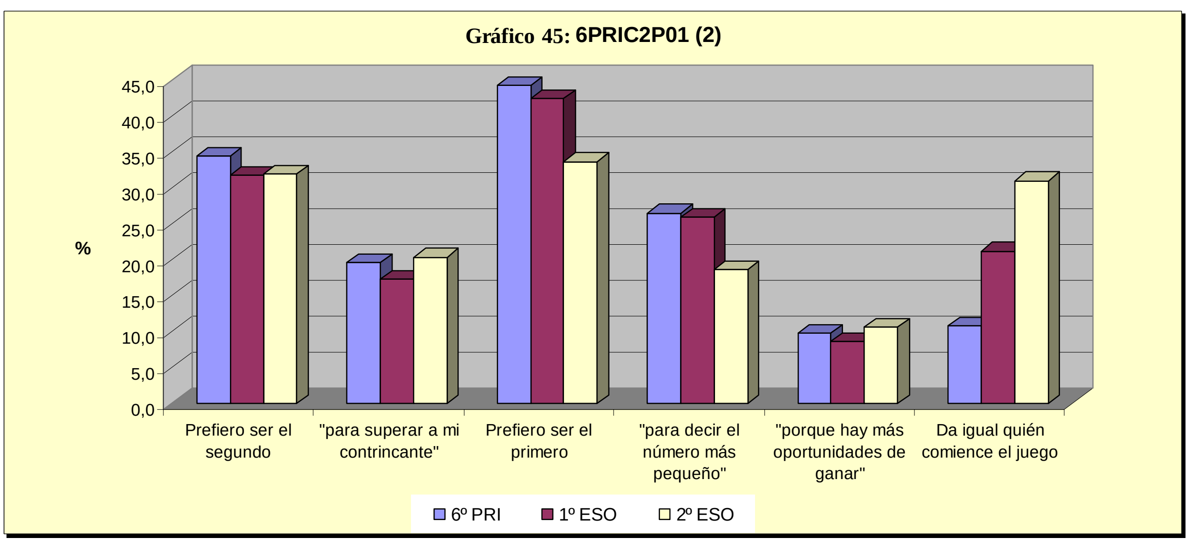
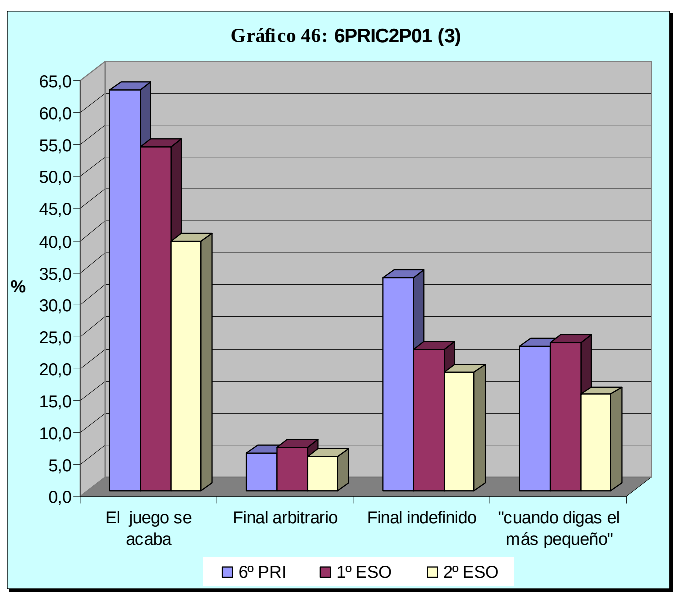


Gráfico 45: 6PRIC2P01 (2)

resultados obtenidos en 6PRIC2P02 y 6PRIC1P02. Esta categoría, “da igual quién comience”, se apoya en buena parte de los casos en diversas variaciones del infinito potencial: “porque siempre va a haber un número más bajo del que digas”, “porque los números no se acaban”, “porque siempre puedes poner un cero más detrás de la coma”, etc., mientras que en otros se recurre a la afirmación “porque los números son infinitos”. La vinculación de este proceso con el término “infinito” varía desde el 9 % en 6PRI al 31 % en 2ESO. Por otra parte, encontramos una actitud finitista asociada a las limitaciones materiales temporales o espaciales; “se acabará cuando estemos cansados”, “se acabará cuando nosotros queramos”, etc. que introducen un elemento de aparente arbitrariedad pero que es evidente que va ligado a la temporalidad propia de nuestras acciones, todas ellas finitas. Esta arbitrariedad se encuentra asociada a la respuesta finitista “el juego acaba”, véase el gráfico 46, pero lo hace en porcentajes muy pequeños. La arbitrariedad también puede ir asociada al conocimiento de los nombres de los números: “no se sabe lo que durará el juego porque no sabemos qué persona se sabe el número más pequeño”; “durará bastante, pero si uno se equivoca…”; “depende del número que diga el otro jugador porque puede que no se me ocurra otro más pequeño”; “depende de la inteligencia de los que juegan”, etc. En cambio, sí son significativas otras respuestas de carácter indefinido como “poco”, “mucho”, “bastante”, “nada”, “diez minutos”, etc. y aquellas otras que reproducen precisamente el *nombre* de la cota en cuestión: “hasta que digas el más pequeño”; “todo el tiempo hasta que uno acierte”, etc. Dentro de esta categoría, la proporción de sujetos que propone en su respuesta un candidato a “número más pequeño”, que suelen ser 0, 1, 0.1 ó 0.01, varía entre un 10% y 15% aproximadamente. Así, la intuición diluye de nuevo, en parte, la fuerte contradicción que este tipo de situaciones presenta conceptualmente mediante el modelo de *indefinición* y permite la convivencia de ideas antagónicas en una misma respuesta: “prefiero ser el primero porque puedes decir *el más pequeño*; la duración del juego depende de los números que se digan”; “durará muy poco porque al empezar yo digo el 0,00001”; “durará un minuto porque llegaríamos muy rápidos al 1”; “puede durar mucho o poco porque no se puede saber cuándo se va a decir el número más pequeño”; “el primer jugador puede decir un número pequeñísimo y ganará”, etc.



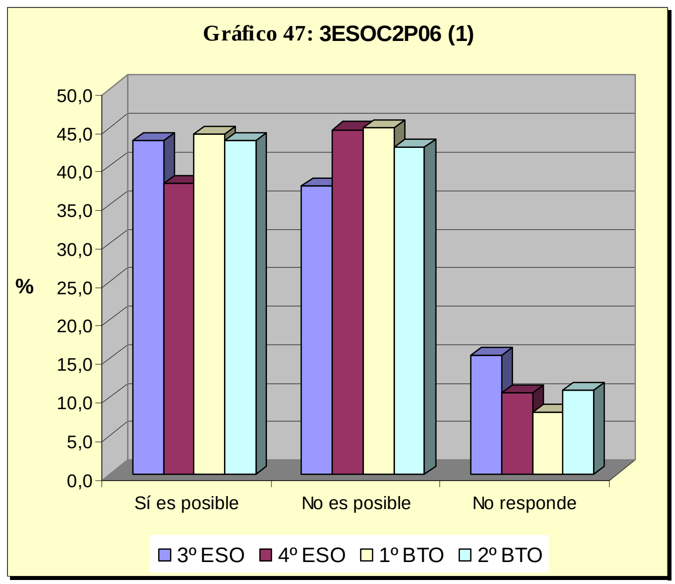
En esta misma línea, Jirotková y Littler (2004) plantean a alumnos checos e ingleses, entre 11 y 15 años, la cuestión:

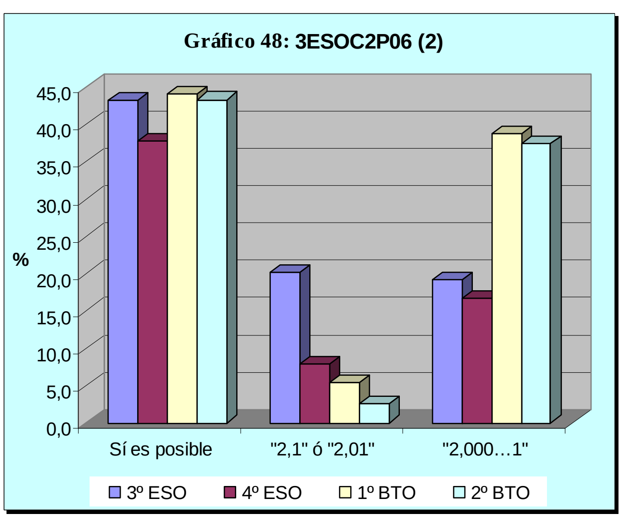
> Frank dice que puede escribir el número decimal positivo más pequeño. ¿Es posible?
> Sí. Escribe dicho número. No. Da tus razones

El 57% de los estudiantes checos y el 64% de los ingleses responden afirmativamente dando respuestas tales como $0,\overset{\frown}{0}1$ ó 0,00000000000000….1 incluyendo el comentario “donde hay infinitos ceros"; estos porcentajes presentan una coincidencia plena con los registrados en nuestro estudio aunque no tanto con el tipo de argumentos. Los que responden que no es posible dan razones tales como "este número puede tener un número infinito de ceros" también encontradas en los sujetos de este trabajo. Como podemos ver la cuestión del objeto más pequeño es convertida en otra que consistiría en cómo escribir infinitos ceros. Sólo el 3% de los estudiantes no respondió frente al 35% que no lo hizo en una cuestión similar bajo un contexto geométrico donde había que buscar un objeto infinitesimalmente pequeño[19].

3ESOC2P06	*(3+4) ESO + BTO*
¿Cuál es el número decimal más pequeño entre 2 y 3 si excluyes a ambos? Si es posible averiguarlo indica cuál es dicho número; si no es posible, explica porqué.	

3ESOC2P06. En los ítems anteriores un alumno infinitista podía intuir el resultado final fuese o no alcanzable: "0", "acercarse a 0", etc. y cualquiera de estas opciones tenía un cierto sentido matemático. Pero en la cuestión que ahora consideramos, y en la siguiente, la misma intuición puede conducir a un resultado que matemáticamente no existe. Este ítem es una adaptación de la anterior a niveles superiores. El gráfico 47 presenta ciertas irregularidades pero nos permite observar que los patrones de evolución tienen un grado de estabilidad elevado, para las dos categorías consideradas, en torno al 40%. Este equilibrio ya nos advierte sobre las contradicciones intrínsecas que contiene este enunciado, pero entraremos un poco más en detalle a través de los argumentos aportados por los estudiantes con el fin de intentar comprender sus actitudes.



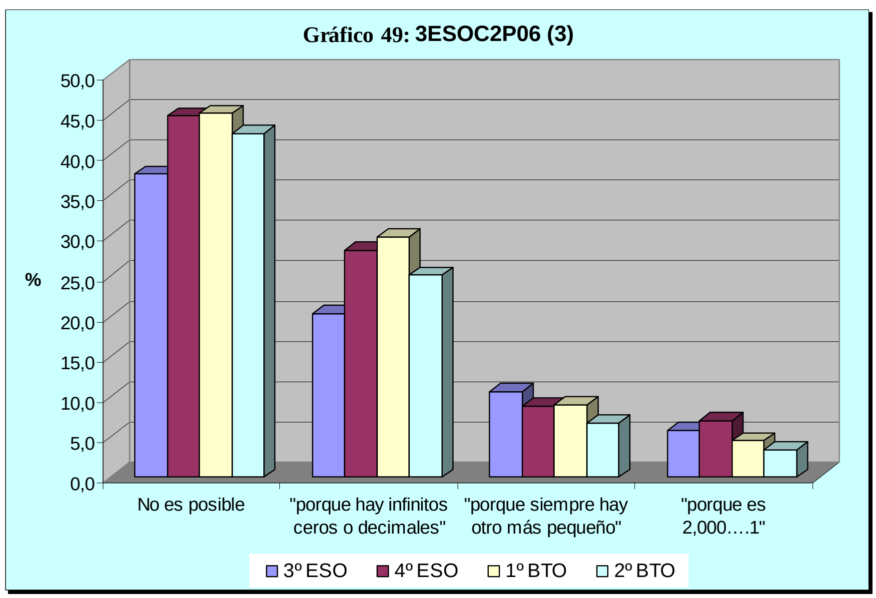


En primer lugar, si consideramos las respuestas afirmativas que en principio asociaríamos a una actitud finitista, véase gráfico 48, podemos apreciar que los alumnos que dan un resultado finito con una cantidad finita de cifras responden a un patrón de evolución característico de un elemento residual. La mayor parte de los estudiantes comprende bastante bien que la división indefinida puede continuar con valores inferiores a esos; sin embargo, existe una subcategoría de aquellos otros que consideran

19. Dado un semicírculo de diámetro AB considera todos los triángulos posibles ABC donde el vértice C se encuentra sobre la circunferencia del semicírculo. Dibuja dos triángulos ABC tales que su altura *h* (desde C a AB) sea *(a)* la mayor posible y *(b)* la menor posible. La respuesta más frecuente a esta pregunta fue "C será el punto más próximo a A o a B".

como solución “2,000….1”, con un elevado porcentaje en BTO, con lo que están dotando de carta de naturaleza a un número que en realidad no existe. En este caso el modelo utilizado en los ítems anteriores de “tender a” que apuntaba hacía un resultado no funciona y el valor que propone el sujeto sencillamente no es solución del problema. Tras este modelo se encuentra la idea de que con una secuencia infinita es posible alcanzar cualquier objetivo. Este *modelo intuitivo de inagotabilidad* del infinito, según la terminología de Fischbein, supone un obstáculo que encontraremos en lo sucesivo.

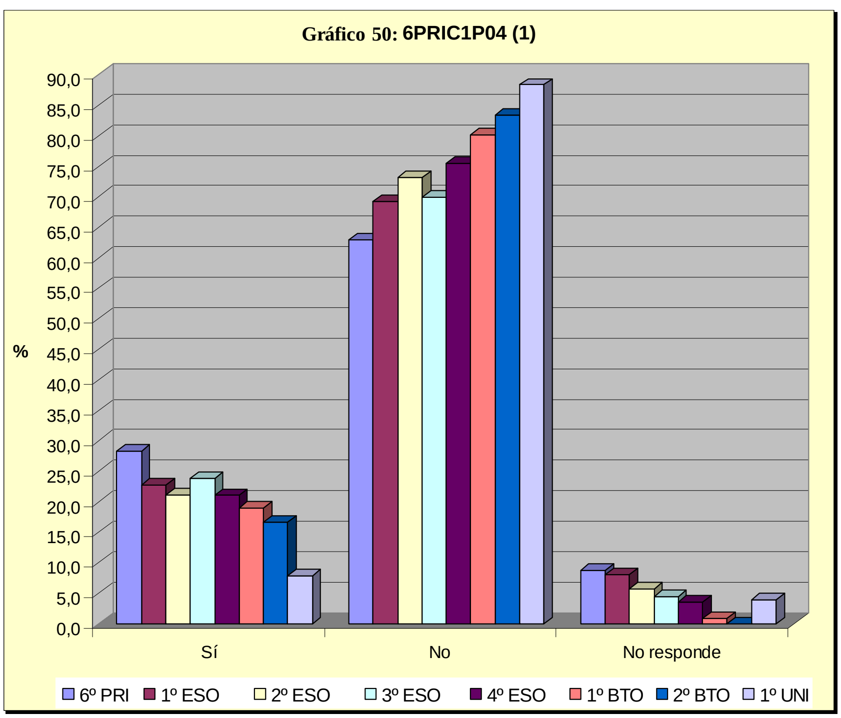
En cuanto a aquellos que reconocen la inexistencia del número buscado distribuyen sus justificaciones según se indica en el gráfico 49. Encontramos también aquí la valoración “no es posible porque *es* 2,000…1” finitista en cierto sentido pues afirma su existencia pero esta vez utilizada para establecer la inexistencia de tal cantidad, lo que no deja de ser una contradicción bastante severa, si bien los porcentajes no son significativos en este caso. La mayor parte se inclina por alguna de las otras dos opciones registradas en el gráfico 49. La diferencia entre ambas supone un matiz a tener en cuenta. La primera de ellas, “porque hay infinitos ceros o decimales”, implica la idea latente del infinito actual como argumento para desestimar la existencia del número “más pequeño”, pero es necesario ponderar este tipo de respuestas ya que en algunas de las entrevistas quedó de manifiesto que tales expresiones eran equivalentes al argumento “porque es 2,000…1”, ya considerado más anteriormente. Por el contrario, la respuesta “porque siempre hay otro más pequeño” es el modelo paradigmático del infinito potencial que en este caso conecta con la verdadera dimensión del problema aunque presenta también frecuencias muy bajas. Como podemos observar en este gráfico todas las categorías mantienen en mayor o menor medida la estabilidad del patrón de evolución de la serie de origen “no es posible”, lo que nos indica la fortaleza o certidumbre implícita de los modelos intuitivos correspondientes. En cambio, podemos observar en el gráfico 48 que el grado de estabilidad inicial de la respuesta afirmativa queda roto en las dos categorías que resultan de su justificación evidenciando un mayor índice de contradicciones internas.



Singer y Voica (2003) mantienen que a partir de los 11 años un sujeto es capaz de explicar que no existe el número natural más grande porque dicho conjunto es infinito y que además es capaz de transferir este razonamiento de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ a partir de los 13 años expresando que “aunque 2,0000….1 están muy cerca de 2 no es el número más pequeño entre 2 y 3”. O bien, “como no podemos escribir todos los números decimales entre 2 y 3, este conjunto es infinito”. Como podemos observar, nuestros resultados indican que dicha capacidad la poseen en torno al 40% de los sujetos de 14 a 18 años. A diferencia de la mayor parte de las investigaciones, los autores encuentran que para muchos estudiantes de los primeros cursos de educación secundaria el concepto de infinito de $\mathbb{N}$ es lo suficientemente sólido como para permitirles razonar sobre ciertos aspectos de conjuntos infinitos.

3ESOC1P04	***Todos los niveles***
¿Existe algún número entre $1,\hat{9}$ y 2?	
☐ Si. Escribe alguno	☐ No. ¿Por qué?

3ESOC1P04. Como ya se ha tratado en el capítulo 3, una cuestión recurrente en numerosas investigaciones sobre los conceptos de límite e infinito gira en torno al tratamiento y significado de 0,999… Como veremos más adelante, son diferentes las perspectivas desde las que se aborda esta cuestión. En nuestro caso hemos pretendido mantener el esquema del ítem anterior con el fin de poder tener referencias comparativas y, a la vez, explorar el carácter extrapolativo que Fischbein atribuye a los modelos intuitivos con el fin de obtener extensiones del conocimiento adquirido; tales modelos se presentan en esta ocasión bajo expresiones del tipo "siempre se puede dividir entre 2 o entre cualquier otro número", "siempre hay un número entre dos dados" o "siempre hay un número más pequeño o más grande", a las que se les atribuye un significado equivalente obviando sus limitaciones.

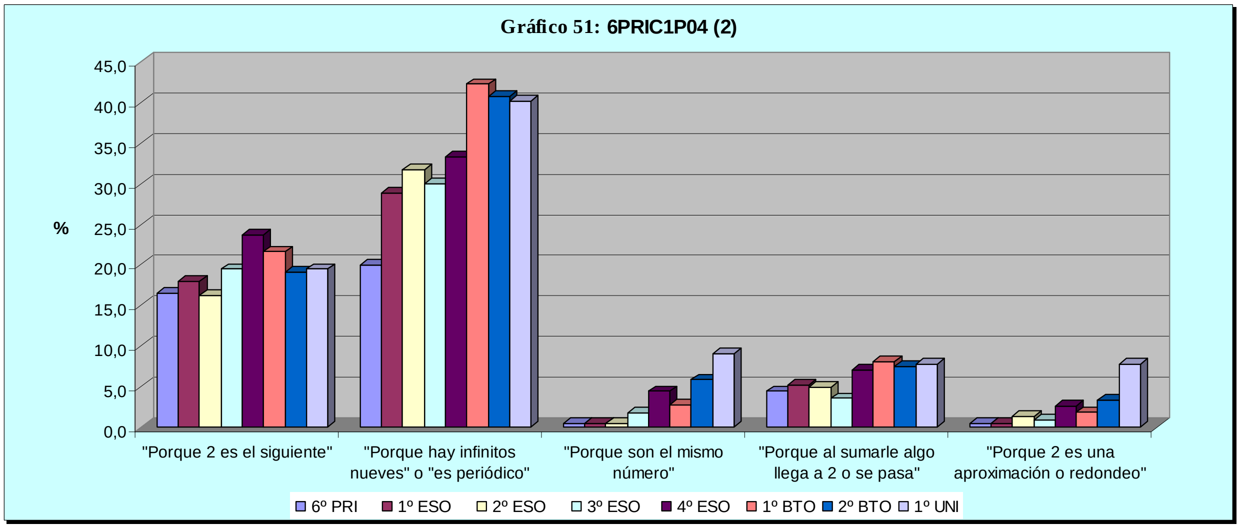


Podemos observar en el gráfico 50 que ante la nueva situación han cambiado notablemente los patrones de evolución. Una amplia mayoría entiende que entre ambos números no puede haber otro[20]. Con respecto a la respuesta afirmativa, un elemento típicamente residual y finitista, la mayor parte de los sujetos dan como ejemplos 1,99, 1,999, 1,95, etc. En cambio, aquellos sujetos que mantienen la inexistencia de un número intermedio, con un patrón de evolución creciente, ofrecen un repertorio más amplio de justificaciones, como se aprecia en gráfico 51.

En realidad, la mayor parte de los sujetos argumentan su respuesta mediante una expresión con cierto carácter axiomático, "porque hay infinitos nueves" o "porque es periódico", lo que no deja de ser una mera descripción del dato del enunciado, si bien para ellos supone un argumento significativo. Pero, más de cerca, lo que está ocurriendo es que se ha convertido tal descripción en una propiedad del infinito; no se está reconociendo la identidad de ambos números, todo lo

20. En 6PRI y (1+2) ESO había una pregunta previa en este ítem que planteaba la misma cuestión para 1,9 y 2 con el fin de subrayar las diferencias en ambos casos dada la aún poca familiaridad con los números periódicos en estos niveles; obsérvese la discontinuidad que se produce debido a este hecho en 3ESO.

contrario, se está expresando en otros términos que “2 es el siguiente a 1,999…” como se recoge en la primera categoría; es decir, consideramos que las dos primeras categorías del gráfico 51 responden a una actitud de transición finitista-infinitista aún fiel a la construcción de los números enteros mediante la relación de orden “siguiente a” que define a sus elementos. Y es aquí donde surgen el conflicto cognitivo; por una parte, se mantiene que ambos números son diferentes y que no es posible interpolar ningún otro entre ellos y, por otra, se admite sin mayor problema en las



entrevistas realizadas que entre dos números decimales siempre es posible hallar un tercero. No obstante, en los niveles superiores se observa una cierta inversión de esta tendencia de la que se beneficia la tercera categoría propia de un elemento emergente con porcentajes aún muy bajos, que no llegan al 10% en 1UNI y con un cierto grado de estabilidad a partir de 3ESO, que representa a aquellos sujetos que descubren la equivalencia de ambas representaciones; esto pone de relieve la dificultad en matemáticas para aceptar, en general, la identidad de objetos equivalentes bajo diferentes representaciones; así, si el estudiante no dispone del recurso aritmético o algebraico para demostrar la identidad en cuestión necesita sustentarse en modelos anteriores que no contemplaban la participación del infinito. Ya hemos visto que uno de ellos es el de “siguiente a” que se hereda de los números naturales y que no sólo no es aplicable a números periódicos, sino que tampoco lo es a número decimales finitos. Otro viene representado por las dos últimas series de este gráfico: “es una aproximación” o bien el modelo de “redondeo”; aproximar es un algoritmo que se aprende desde los niveles educativos inferiores y que de hecho se incorpora a la cotidianidad del alumno desde muy pronto, primero con números naturales y, después, con decimales finitos. En la expresión “porque al sumarle algo llega a 2 o se pasa” en la mayor parte de los casos se concreta una cantidad: una centésima, una milésima, etc. Esta categoría, aún con valores poco significativos presenta un elevado grado de estabilidad en su patrón de evolución a diferencia de la última categoría cuya tendencia es creciente. Todos estos elementos que forman parte del esquema conceptual como intuiciones secundarias suponen un auténtico obstáculo a la hora de acceder a la noción de número real. El siguiente fragmento de una de las entrevistas con una alumna, Lara, y un alumno, Borja, de 3ESO recoge lo descrito anteriormente. En el cuestionario escrito Lara mantenía que “no, porque si expresas el primero en forma de fracción da 2” y añadía que “1,999… es casi, casi 2”; Borja, por su parte, escribía que “no, porque después del 1,999…. va el 2”; el desarrollo del diálogo al respecto fue el siguiente:

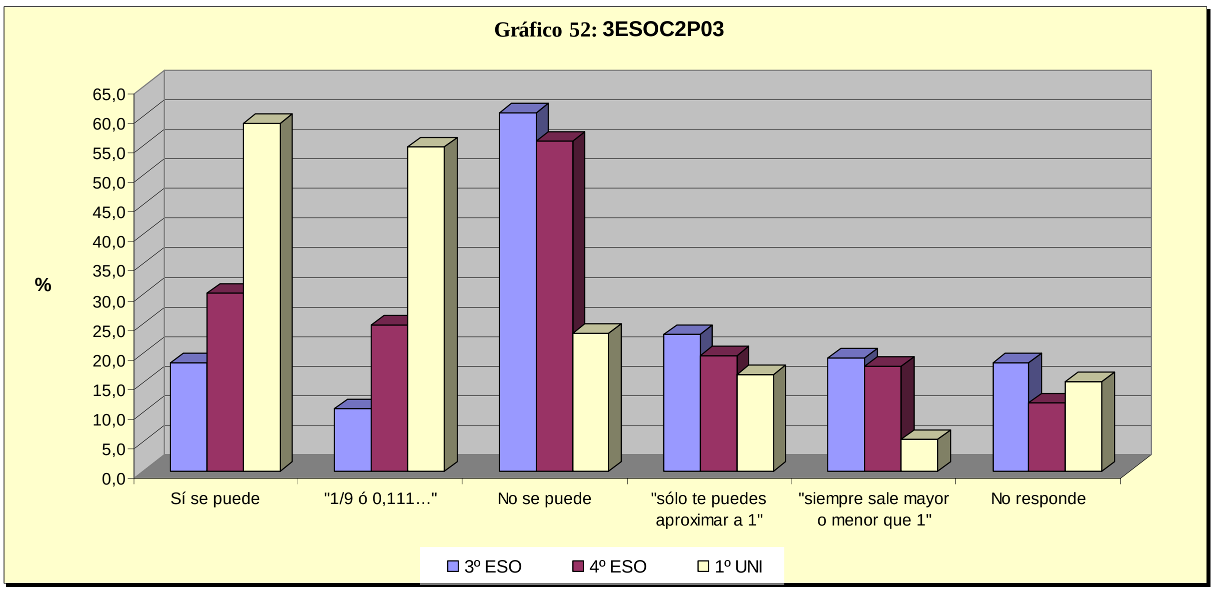
Borja: Es que el 2 es el siguiente
Entrevistador: Entonces, ¿son diferentes ambos números?
B: Si
E: Pero hemos aprendido que entre dos números decimales diferentes siempre se puede encontrar otro, ¿me podrías decir alguno que se halle entre estos dos?
B: No, porque el primero tiene infinitos decimales
E: Por lo tanto, ¿son iguales?
B: No, no son el mismo
Laura: Es que no son exactamente iguales
E: Entonces ¿cómo explicas el cálculo que hiciste?
L: Es que esa operación da 2… no se… es muy cercano… es que si a 2 le restas 1,999…. da un resultado muy pequeño…
E: Bien, si esa diferencia la dividimos entre 2 y el resultado lo sumamos a 1,999… daría un número intermedio ¿no?
L: Ya, ya,… no se es que la diferencia es infinitamente pequeña…
E: Pero entonces, para ti algo infinitamente pequeño ¿no existe?
L: Sí, sí, pero no me entra en la cabeza

Como ya hemos visto en el capítulo 3, Tall (1980) recoge resultados similares para alumnos universitarios, de lo cuales un 55% considera que $0,\widehat{9}<1$, y destaca argumentos del tipo "$0,\widehat{9}$ es sólo un poco menor que 1 pero la diferencia entre ambos es infinitamente pequeña" y "yo creo que $0,\widehat{9}=1$ porque podríamos decir que $0,\widehat{9}$ *alcanza 1 en el infinito* aunque infinito no existe realmente, utilizamos esta forma de pensar en límites, etc." donde se incorporan elementos infinitesimales. Según Tall estas nociones sobre infinitésimos aún no forman parte de una teoría coherente y pueden conducir a conclusiones conflictivas[21]. Bagni (1998) también plantea también la cuestión sobre la relación entre $0,\widehat{9}$ y 1 a estudiantes de 17 a 19 años y encuentra que el 68 % mantiene que $0,\widehat{9}<1$; tras presentarles la demostración de la igualdad mediante la conversión en fracción del número decimal los nuevos resultados son del 44%. También nos hemos referido a la interpretación que Weller et al. (2004) hacen de la relación entre $0,\widehat{9}$ y 1 bajo el prisma de la teoría APOE. Recordemos que para estos autores la naturaleza de estos dos números es diferente; mientras el símbolo 1 se refiere a un objeto, el símbolo 0,999… representa un proceso por lo que tiene sentido afirmar la diferencia entre ambos. La dificultad estriba en que el número 1 no se produce en ningún paso del proceso sino que es el resultado de encapsularlo y trascender al proceso. Es igual a 1 porque una vez que 0,999… se considera como un objeto es ya sólo cuestión de comparar dos objetos estáticos, 1 y el objeto que se obtiene de la encapsulación. Es razonable pensar en este último como un número de manera que uno puede observar que los dos números fijos difieren en valor absoluto en una cantidad menor que cualquier número positivo, por lo tanto la diferencia es sencillamente cero. Por último, según estos autores, los estudiantes que aún no han construido una concepción para poder completar el proceso del decimal infinito conciben en realidad 0,999… como una cadena de nueves que es finita aunque de una longitud indeterminada, por lo que pueden concebirse diferencias infinitesimales con 1 sin que exista un conflicto en esa situación.

21. Para Tall, estas nociones de infinitésimos vienen reforzadas por el uso de notaciones tales como $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

Esta última idea se refleja en el ítem 3ESOC2P03 que aparece en cuestionarios de (3+4) ESO y de 1UNI: ¿Es posible encontrar un número decimal que multiplicado por 9 de cómo resultado 1? Si es posible indica qué número es ese y cómo lo has obtenido; de lo contrario, justifica tu respuesta.

La respuesta afirmativa viene justificada en la mayoría de los casos por un resultado correcto en forma fraccionaria o decimal; la primera de ellas supone una comprensión actual del resultado como objeto con una identidad propia, mientras que tras la segunda se halla la interpretación potencial de dicho resultado. Si comparamos estos resultados con los correspondientes a la cuestión anterior podemos apreciar una reducción considerable de los porcentajes, pero en este caso la dificultad no procede tanto de la necesidad de operar con infinitos números decimales como de la situación que provoca la identificación de $0,\widehat{9}$ y 1. En el ítem 6PRIC1P04 el porcentaje de sujetos que reconocen la identidad entre ambos números no supera el 10% en 1UNI mientras que ahora ese es el valor para 3ESO, cuatro niveles por debajo.



La respuesta negativa, mayoritaria en (3+4) ESO, se apoya en argumentos ya registrados en el ítem anterior que reflejan de una u otra manera la diferente naturaleza que se otorga a 1 y a 0,999… Es evidente que en estos casos aún no existen los elementos necesarios en el esquema conceptual que permiten establecer los vínculos adecuados entre ambos objetos. Los resultados de esta cuestión también aportan una valiosa información respecto a las operaciones relacionadas con el infinito como se considerará en el apartado 5.5.

1UNIC3P01. Fischbein et al. (1979) profundiza en la divisibilidad indefinida y en el *modelo intuitivo de inagotabilidad* del infinito mediante una cuestión semejante a la que ahora nos ocupa[22], que se ha considerado pertinente introducir en la presente investigación en el nivel universitario:

Sea C $=\sqrt{2}$. Dividimos el intervalo [1, 2] en cuatro partes iguales y nos quedamos con aquel subintervalo que contenga a C. A continuación repetimos este proceso con el nuevo intervalo y así sucesivamente. ¿Llegará un momento en que uno de los puntos de las divisiones coincida con C? Justifica tu respuesta

22. *C* es un punto arbitrario sobre un segmento *AB*. Dividimos y subdividimos el segmento *AB* primero en cuatro partes iguales, luego en ocho, etc. ¿Se llegará a una situación tal que uno de los puntos de división coincida con el punto *C*? Explica tu respuesta.

En nuestro caso, los resultados son los que aparecen reflejados en la siguiente tabla. Como podemos ver aunque más de la mitad consideran inalcanzable el resultado propuesto, la razón de ello para la mayor parte de los que así han respondido, no es la imposibilidad matemática "porque es un número irracional y mediante una sucesión de números racionales nunca se podrá alcanzar", sino la que impone el infinito potencial a un mundo material y finito como el cotidiano. Así, el carácter inagotable del infinito se constituye en una propiedad que permite obtener cualquier valor aunque sea virtualmente. Por lo tanto, dos de cada tres individuos considera que raíz de dos es alcanzable, bien mediante un proceso finito o bien mediante uno infinito. Aunque Fischbein no entra en este tipo de detalles podemos ver en la tabla siguiente que los porcentajes presentan cierta similitud con los anteriores con salvedades muy importantes como la edad y el enunciado menos específico.

Sí, es posible	32,9
"En el infinito"	13,7
No es posible	52,1
"Porque habría que llegar al infinito"	34,2
"Porque es irracional"	15,1
No responde	11,0

Fischbein et al. (1979)	**10-11**	**11-12**	**12-13**	**13-14**	**14-15**
	n = 46	**n = 58**	**n = 152**	**n = 104**	**n = 110**
Depende de la situación del punto	6,5	5,2	9,9	8,7	8,3
Si se alcanzará el punto	82,6	91,4	81,6	67,3	88,1
No se alcanzará el punto	6,5	1,7	2,5	16,3	2,8

La explicación que dan los autores es que el infinito aparece *intuitivamente* como equivalente a inagotable; es decir, que si se continúa el proceso pueden alcanzarse *todos* los puntos. Esta es la razón esencial para que, intuitivamente, sólo haya un tipo o nivel de infinito. En consecuencia, el modelo de punto-marca y el de infinito-inagotable entran en contradicción ya que el primero, a la hora de comparar por ejemplo segmentos de distinta longitud da lugar a diferentes tamaños de infinito mientras que el segundo sólo permite un único tamaño de infinito.

Waldegg (1996) también propone la cuestión *un punto arbitrario sobre un segmento, ¿puede ser alcanzado por una serie indefinida de biparticiones?* Entre sus resultados, encuentra respuestas afirmativas y negativas que usan el mismo argumento: "porque la operación es infinita"; así, argumentos infinitistas son utilizados de manera ambivalente tanto para afirmar como para negar una misma proposición. Queda diluida de esta manera la frontera entre la "recta real" y la "recta racional" que entraña precisamente la idea de infinitos diferentes.

1UNIC2P15/1UNIC3P09. Hasta aquí se ha propuesto en todos los ítems la división indefinida de objetos matemáticos tanto geométricos como numéricos. El último caso que consideraremos es el de la partición de una magnitud física, que suele quedar fuera del ámbito de las matemáticas, tal como el tiempo, con el fin de analizar su influencia en los modelos intuitivos estudiados hasta ahora. Parece que el nivel universitario es el adecuado para explorar esta influencia puesto que se ha adquirido cierto grado de abstracción y cierta distancia con las limitaciones materiales de magnitudes físicas convertibles en objetos

3UNIC2P15	***UNI***
Cuando falta un minuto para las doce de la noche, una lámpara se enciende durante 1/2 minuto, se apaga 1/4 de minuto, se vuelve a encender durante 1/8 de minuto, se apaga por 1/16 y así sucesivamente. A las doce en punto se presiona un interruptor que deja la lámpara fija en el estado en que se encuentre en ese momento final. ¿Estará encendida o apagada? Explica tu respuesta.	

matemáticos[23]. La *lámpara de Thomson* nos ofrece la posibilidad de conjugar los dos aspectos mencionados a través de una situación contradictoria: la división indefinida y las limitaciones de un mundo finito (Salmon, 2001 y Sorensen, 2007).

Encendida	13,4
Apagada	3,7
No se puede saber	34,8
No se puede realizar	7,9
No se llegará a las 12	7,9
No responde	31,3

En primer lugar hemos de destacar el elevado porcentaje de respuestas en blanco, casi un tercio de los sujetos. En parte se debe a que en uno de los cuestionarios esta pregunta se hallaba en el noveno lugar, mientras que en el otro se encontraba en último lugar, el décimo quinto, lo que siempre lleva asociado un incremento en el porcentaje de preguntas no respondidas. Pero, como ya se ha indicado, ocurre que no sólo se trata de un contexto puramente físico sino que además es paradójico. A pesar de ello, aproximadamente uno de cada tres sujetos observa que "no se puede saber" bajo la influencia del modelo intuitivo de indefinición del infinito; de hecho, aproximadamente la mitad de estos sujetos justifica esta respuesta a partir del número infinito de intervalos temporales: "porque habrá infinitos encendidos y apagados en un minuto", "porque a las 12 se llega en el infinito", "porque se divide el tiempo infinitamente", "porque hay infinitos números racionales", "porque no sabemos lo que pasa en el infinito, "porque la intermitencias sería infinitamente rápidas", etc. La respuesta "encendida" suele ir acompañada de una estimación probabilística ya que como el primer medio minuto la lámpara está encendida, la estimación de la suma de la progresión geométrica "encendida" frente a la "apagada" es trivial mediante una aplicación demasiado ingenua de la ley de Laplace. Por su parte, las respuestas "apagada" y "no se puede realizar" se hallan directamente asociadas a una actitud finitista inducida por el contexto. Por último, la respuesta "no se llegará a las 12 porque hay infinitos estados antes de llegar" no es sino el epítome del infinito potencial llevado a su extremo más contraintuitivo. La proyección de ítems anteriores bajo un contexto geométrico o numérico conduce a negar lo evidente frente al proceso matemático.

5.4. SUMAS INFINITAS

Un tópico muy poco explorado en relación con el concepto de infinito, e íntimamente ligado a la idea de divisibilidad indefinida, es el de la suma de infinitos términos decrecientes. Habitualmente se ha utilizado en las investigaciones sobre límites o series pero, a nivel intuitivo existen numerosos ejemplos de series que permiten explorar nuevas perspectivas de las actitudes finitista e infinitista. Es cierto que este tipo de problemas apuntan hacia el carácter potencial del infinito pero no olvidemos que la realidad que hemos descrito hasta ahora presenta un marcado sesgo "potencialista"; no en vano el grupo de Tirosh y Tsamir se dedica desde hace tiempo a crear actividades que favorezcan la comprensión del infinito actual frente a la fortaleza intuitiva del infinito potencial. Por otra parte, definiremos *modelo intuitivo de divergencia* como aquel que consiste en atribuir sistemáticamente un resultado infinito a la suma de una cantidad infinita de objetos matemáticos sin considerar en absoluto la eventual convergencia de la misma; sólo argumentos "externos", tales como un contexto geométrico, pueden contribuir a admitir dicha

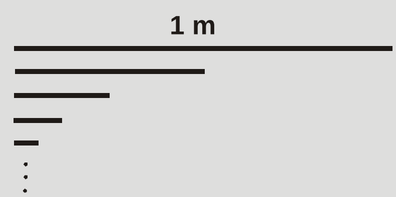
23. Garbín (2000) plantea también en uno de los ítems del cuestionario una situación con limitaciones físicas: Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura h/2. ¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta ¿Podrías decir cuántos rebotes hará la pelota? Explica tu respuesta.

convergencia debido a las limitaciones o cotas impuestas por el objeto geométrico considerado, o bien, en un contexto numérico, y en proporciones muy pequeñas, el comportamiento del término enésimo.

5.4.1. CONTEXTO GEOMÉTRICO. ASPECTOS COMUNES.

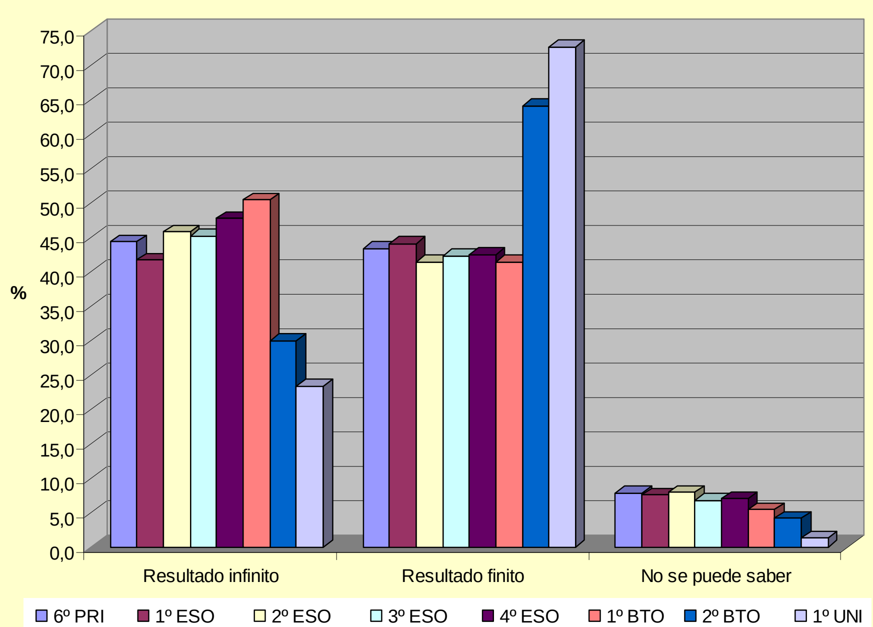
6PRIC1P08. En este primer ejemplo se ha querido utilizar un proceso presente en ítems anteriores de los mismos cuestionarios, la divisibilidad indefinida, con el fin de crear cierta familiaridad con alguna de las preguntas ya respondidas y facilitar la conexión con otros elementos del esquema conceptual correspondiente; asimismo, se ha elegido el contexto geométrico para facilitar su acceso a los niveles inferiores para los que las series numéricas presentan dificultades intrínsecas evidentes.

6PRIC1P08	*Todos los niveles*
Si tienes el conjunto de segmentos de la figura, donde la longitud de cada trozo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, obtendrás un segmento más largo. ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos?	
a) 2 metros	*b)* Un valor muy próximo a 2 m.
c) 3 metros	*d)* Infinito
e) Una longitud muy grande	*f)* otra respuesta



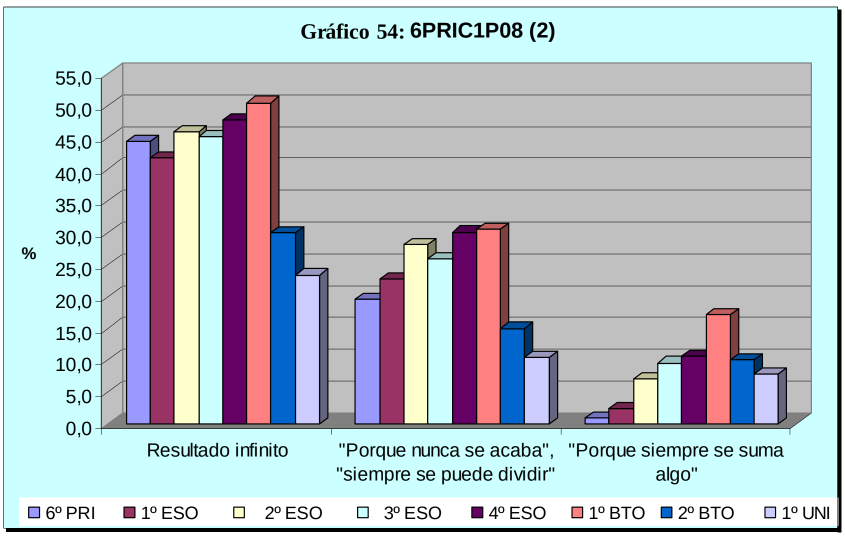
En el gráfico 53 se representan los resultados de las tres categorías con los valores más representativos. En primer lugar podemos observar la complementariedad entre los patrones de evolución de las respuestas finita e infinita. Ambos presentan un elevado grado de estabilidad en los cinco primeros niveles, especialmente la que corresponde al resultado finito. Los valores de 2BTO y 1UNI sufren una variación muy acusada. Es evidente que este enunciado fuera del contexto de este cuestionario no es en absoluto trivial para un alumno de los niveles inferiores; sólo a partir de 3ESO, haciendo uso de las ideas aprendidas sobre progresiones geométricas, podría intentar con éxito su resolución. Pero no es esto lo que se pretendía sino, como ya se ha indicado arriba, provocar que los estudiantes establecieran algún tipo de vínculo con alguno de los ítems de cuestionario. La

Gráfico 53: 6PRIC1P08 (1)

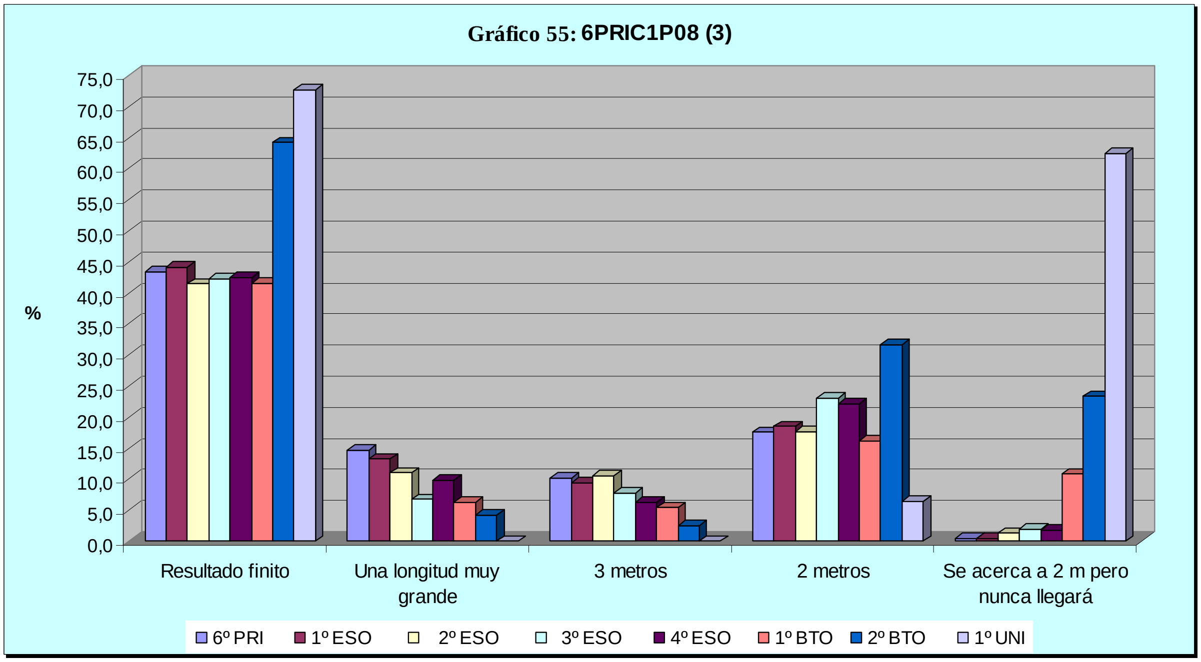


respuesta "no se puede saber", con valores muy bajos en esta ocasión, presenta las mismas características que las halladas en ítems anteriores; es decir, se sustenta en la naturaleza indefinida del infinito: "no sabemos cuánto es infinito" o bien "no sabemos cuántos números se han de sumar".

Si centramos nuestra atención en el resultado infinito, véase gráfico 54, nos encontramos con el nuevo modelo intuitivo *de divergencia*, una extensión natural de los modelos generados por el uso de los números enteros. Cualquiera de las dos versiones que aparecen en el gráfico una implícita, "porque nunca se acaba", y otra explícita, "porque siempre se suma algo" definen dicho modelo; "sumar siempre es aumentar sin límite" es un modelo que puede anular la consideración de resultados finitos de una suma infinita. Algunos sujetos pueden llegar a descubrir que "cada vez crecerá menos" o bien que "cada vez crece más *despacio*", pero cualquiera de estas afirmaciones cargadas del dinamismo propio del contexto irá acompañada de la expresión "pero siempre crecerá". La fortaleza de este modelo de divergencia encuentra su máximo epítome en la respuesta de un alumno de 2ESO durante la entrevista correspondiente: "si pones todas las mitades de estos segmentos dentro de un segmento de un metro acabas por pasarte del extremo"; podemos observar en este caso que el desdoblamiento propuesto por Duval como condición para captar la biyección entre dos conjuntos numéricos infinitos se revela en este caso contraproducente pues el estudiante es incapaz de apreciar la identidad entre el segmento de partida y la fragmetación del mismo. El patrón de evolución del resultado infinito queda roto al descomponerlo en los dos argumentos aportados por los estudiantes con patrones de evolución creciente-decreciente como se puede apreciar en los histogramas correspondientes del gráfico 54. La singularidad que parece presentar 1BTO se puede explicar desde la ubicación transitoria que representa este nivel. Cuando se aplicó el cuestionario aún no se había impartido el concepto de límite; así, estos alumnos se encuentran entre el conocimiento de las sucesiones cuya imagen es la de una colección ilimitada y el acceso a la idea de límite que ya supone la introducción de cotas a algunas de las sucesiones que estudian como ejemplos. Se podría pensar que la noción de límite y serie son diferentes y que el currículo correspondiente no considera el concepto de serie, salvo las aritméticas y geométricas como algo anecdótico y completamente desubicado dentro de dicho currículo, pero tampoco se recoge tal concepto en 2BTO y, sin embargo, los estudiantes de este nivel han modificado apreciablemente sus perspectivas inducidos, que duda cabe por la noción de límite. Podemos considerar este caso como un ejemplo paradigmático de la frontera entre intuiciones primarias y secundarias.



El análisis del resultado finito, recogido en el gráfico 55, es algo más complejo ya que incluye actitudes finitista e infinitistas. Como ya se ha indicado anteriormente, este tipo de respuesta no es intuitivamente "natural" en el sentido de ser coherente con los modelos intuitivos característicos de ciertas edades. Antes de nada hemos de fijarnos en la respuesta "una longitud muy grande" que con un patrón de evolución propio de un elemento residual supone, aun siendo una expresión del



finitismo presente en este ítem, una cierta transición entre las dos categorías principales. Por su parte, las respuestas "2 metros" y "3 metros" son el resultado, por un lado, de una estimación: "porque cada vez se hace más pequeño el segmento y no pasará de 2", "porque sumando los primeros ya casi te da 2 y los siguientes son muy pequeños", "porque al sumar los primeros sale muy próximo a 2 y como quedan muchos pasará de 2 pero no de 3 porque son muy bajos" y, por otro, una declaración de las limitaciones físicas genuinas de un comportamiento finitista: "al final se acaban los segmentos", "llega un momento en que ya no puedes cortar más", etc. El argumento que justifica adecuadamente la respuesta "2 metros", en el sentido del infinito actual que representa el límite de la suma, ha arrojado porcentajes muy pequeños, desde el 1 al 7,5%[24]. Podemos apreciar una diferencia fundamental entre los patrones de evolución de ambas respuestas; en efecto, mientras la respuesta "2 metros" presenta cierta irregularidad propia de los orígenes tan diversos que convergen en ella, "3 metros" tiene un perfil característico de un elemento residual. Por último, la apreciación "se acercará a 2 m. pero nunca llegará" que en 1BTO aún ofrece valores muy bajos, nos indica en 2BTO y sobre todo en 1UNI el acceso a la terminología infinitesimal que habitualmente se introduce en el aula a partir de 1BTO. Esto supondrá, salvo para aquellos sujetos que avancen en ciertos estudios científicos, una visión definitiva absolutamente potencialista de una serie sin llegar a comprender que su resultado es un objeto con una entidad y propiedades genuinas.

Fischbein (1978), citado en Tall y Tirosh (2001), recoge la idea de que las concepciones intuitivas de los estudiantes sobre límites tienden a centrarse más en la infinitud del proceso que en

24. Un ejemplo de este tipo de argumentos es el siguiente: "como el primer segmento mide 1 m. y los restantes salen de dividir el primero, tienen que sumar otro metro, por lo tanto el resultado es 2 metros".

el valor finito del límite. En dicho trabajo alude a la siguiente cuestión planteada a estudiantes de 13 a 15 años:

1. Sea el segmento AB = 1 m. Añadimos a AB un segmento BC = ½ m. Continuamos de la misma manera añadiendo segmentos de ¼ m, ⅛ m, etc. ¿Tendrá fin este proceso?
2. ¿Cuál será la suma de los segmentos AB + BC + CD + · · ·?

El 84 % de los estudiantes respondieron en (1) que el proceso nunca terminará y el 14% que sí lo hará. En (2) sólo el 6% pensaba que la suma de los segmentos sería 2, el 17% pensaba que sería menor que 2 y el 51% pensaba que sería infinita; este último valor se halla muy próximo a los obtenidos anteriormente en esa franja de edad.

Según Tall (2006), la habilidad para contemplar la completitud de un proceso potencialmente infinito demuestra ser mucho más intratable. La ecuación

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

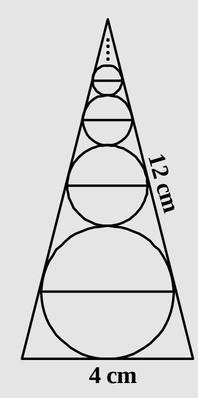
se lee, con frecuencia, de izquierda a derecha como un proceso de cálculo, "un medio mas un cuarto mas un octavo mas un dieciseisavo, mas (así sucesivamente) *da* uno". Pero ¿cómo puede alcanzarse la segunda parte de la sentencia antes de que se haya completado la primera parte? El símbolo 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ⋯ puede ser interpretado por los estudiantes no como un *valor*, sino como un proceso para calcular un valor, una *cantidad variable* que se acerca al resultado tanto como deseemos, pero que nunca lo alcanza, como indica alguna de las respuestas recogidas más anteriormente.

5.4.2. CONTEXTO GEOMÉTRICO. CUESTIONES ESPECÍFICAS.

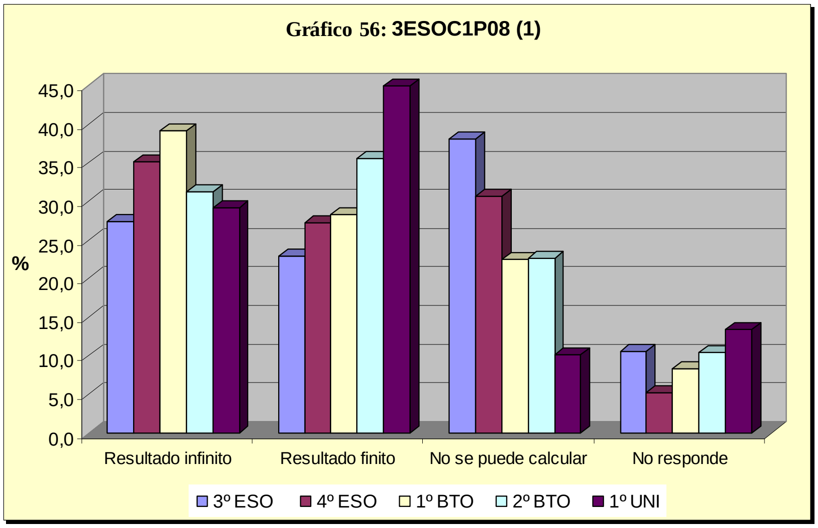
3ESOC1P08	***(3+4) ESO + BTO + UNI***

¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños?

a) una cantidad finita, ¿cuál?
b) una cantidad infinita, ¿por qué?
c) no se puede saber, ¿por qué?

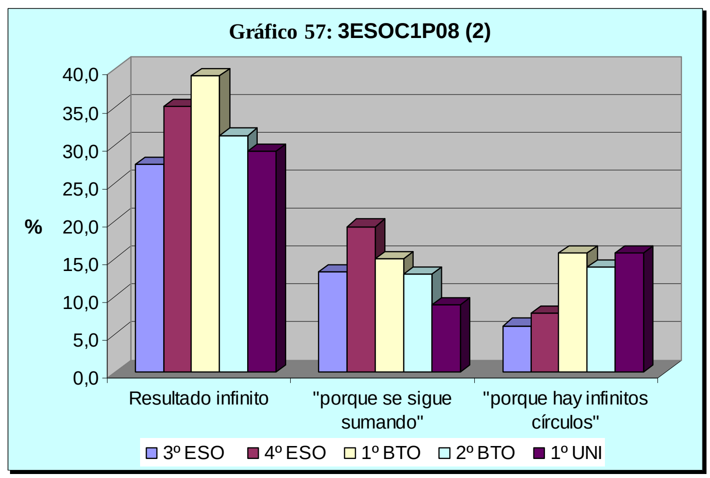


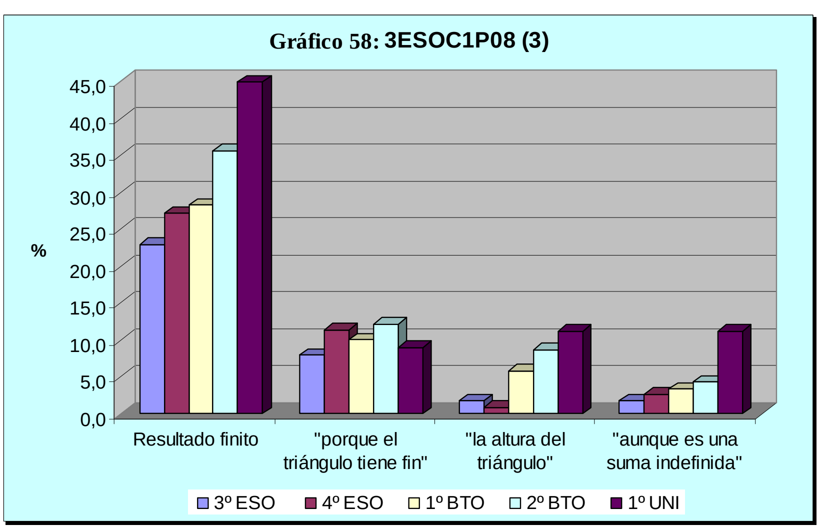
3ESOC1P08. Dentro de un contexto geométrico, en este ítem se han eliminado las referencias numéricas evidentes como ocurría en el caso de la unión de segmentos, con el fin de dificultar el cálculo estimativo del resultado y explorar la posibilidad de utilizar otros recursos. Asimismo, se ha incorporado una limitación al proceso, el triángulo, que a diferencia del ítem anterior, acota visualmente el resultado si bien se ha atenuado tal condición mediante la situación horizontal de los diámetros. El gráfico 56 nos ofrece los patrones de evolución correspondientes a las categorías establecidas. Lo primero que se pone de relieve frente a la cuestión 6PRIC1P08 es la variación porcentual de dichas categorías como se puede ver comparando los gráficos 53 y 56. En particular, la serie correspondiente al "resultado finito" ha reducido la estabilidad de los primeros niveles en favor de una tendencia creciente y han disminuido sensiblemente sus valores, más de un 25% en 1UNI; en cambio, el patrón de evolución del "resultado infinito" ha mantenido aproximadamente su perfil pero también ha sufrido una reducción importante de sus valores porcentuales. Por el



contrario, la respuesta "no se puede calcular", propuesta en el enunciado como alternativa, y las respuestas en blanco los han incrementado de manera considerable respecto al ítem de referencia. Cabe destacar aún una característica común a ambos ítems como es la inversión de la tendencia en las dos categorías principales que se produce en 1BTO, si bien debemos analizar más detalladamente las ideas vertidas tras estas respuestas con el fin de determinar los modelos que han entrado en juego.

En primer lugar, vemos que la respuesta "infinito" se basa en argumentos equivalentes a los hallados con anterioridad, véase gráfico 57. En este caso, aunque con porcentajes ligeramente inferiores, el modelo intuitivo de *divergencia* permite al sujeto traspasar incluso las limitaciones geométricas o materiales introducidas, "porque los círculos llegarán al infinito" o "porque el espacio es infinito", que deberían favorecer al modelo *acotado-finito* que hemos analizado en el apartado 5.2; esto pone de manifiesto la tenacidad de aquél modelo, en particular en los niveles inferiores, reforzado por el modelo de *inagotabilidad*: "porque caben más y más círculos en el triángulo" o "porque nunca se llega a llenar el triángulo".





En lo que se refiere al "resultado finito", una parte de los sujetos se refiere a las limitaciones ya mencionadas para justificar esta respuesta mientras que otra parte, sólo con valores significativos a partir de 2BTO, aporta una respuesta más precisa, véase gráfico 58. No obstante, esta categoría también contempla argumentos finitistas del tipo "porque hay un momento en que se acaban los círculos” o “será la suma de los diámetros que quepan en el triángulo”. De cualquier modo, es preciso advertir que el porcentaje de estudiantes que ofrece algún tipo de justificación es muy bajo en relación con el de respuestas de esta categoría. Este dato, junto con el gran número de sujetos que consideran que “no se puede calcular”, refleja una inseguridad evidente a la hora de recurrir a los modelos anteriores. En este sentido, hemos recogido la subcategoría *aunque es una suma indefinida* que manifiesta un cierto sentimiento de contradicción entre la respuesta finita y el número de objetos que intervienen en la suma que revela el conflicto cognitivo entre los dos modelos anteriores.

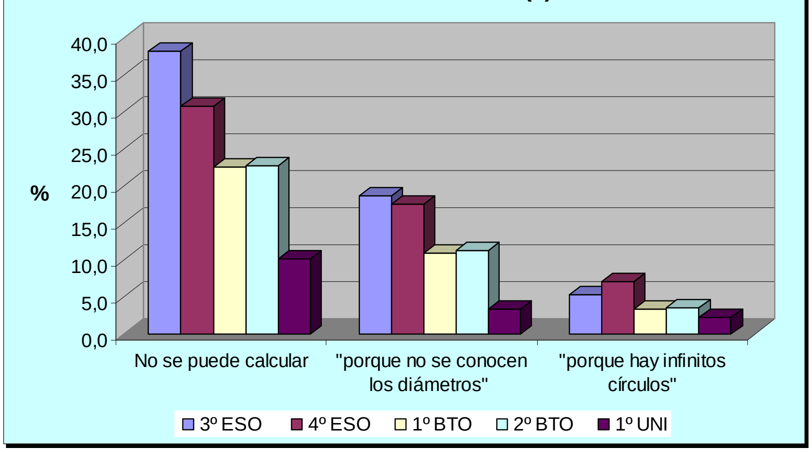
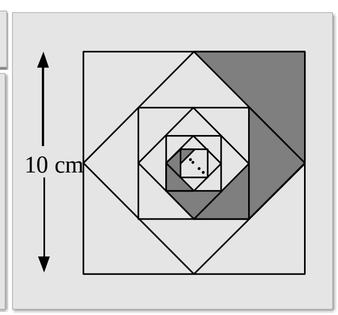


Gráfico 59: 3ESOC1P08 (4)

Y, por último, dado los elevados valores que ha arrojado la categoría “no se puede calcular” conviene observar más de cerca esta postura aunque tienda a convertirse en un elemento residual con la edad; sus resultados se recogen en el gráfico 59. La mayoría, sobre todo en los niveles inferiores, recurre a la insuficiencia de datos para justificar la imposibilidad de los cálculos pertinentes bajo un patrón de evolución propio también de un elemento residual, “porque no se sabe cuánto miden los diámetros” o “porque hay círculos tan pequeños que ni se pueden medir”, mientras que otros, no muy numerosos, aducen la indefinición para justificar su punto de vista revelando la incidencia del modelo de *indefinición* asociado con infinito: “porque no paramos de hacer círculos”, “porque cuando una cantidad es infinita, no se puede saber con exactitud el resultado”, “porque no conocemos la magnitud el infinito”, etc. En consecuencia, aunque en un principio el enunciado pudiese facilitar la opción “no se puede saber”, el tipo de justificaciones registrado no indica que los modelos referidos se hallan latentes en el esquema conceptual.

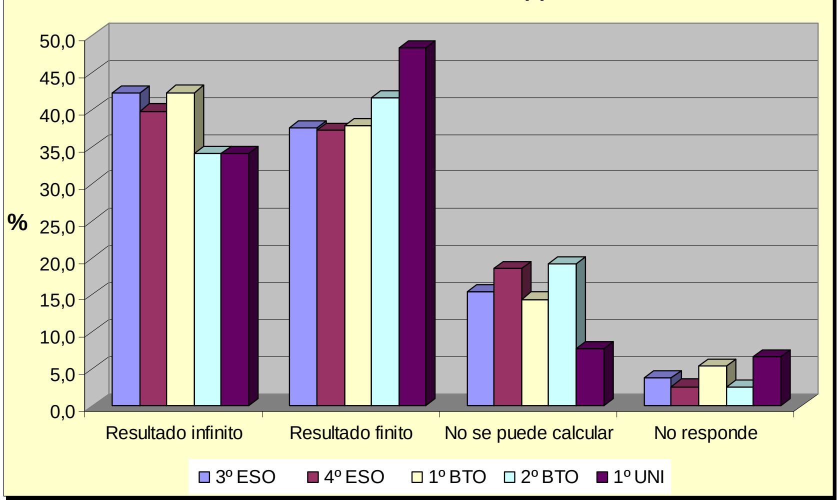
3ESOC2P09. Este ítem es equivalente al anterior pero para el resto de estudiantes, aquellos a los que se les aplicó el cuestionario C2. También aquí el objetivo es enfrentar el modelo de *divergencia* al modelo *acotado/finito* en el que los límites geométricos impiden la infinitud del resultado.

3ESOC2P09	***(3+4) ESO + BTO + UNI***
La suma de las áreas de los triángulos sombreados de la figura es: *a)* finita *b)* infinita *c)* no se puede saber Justifica tu respuesta	



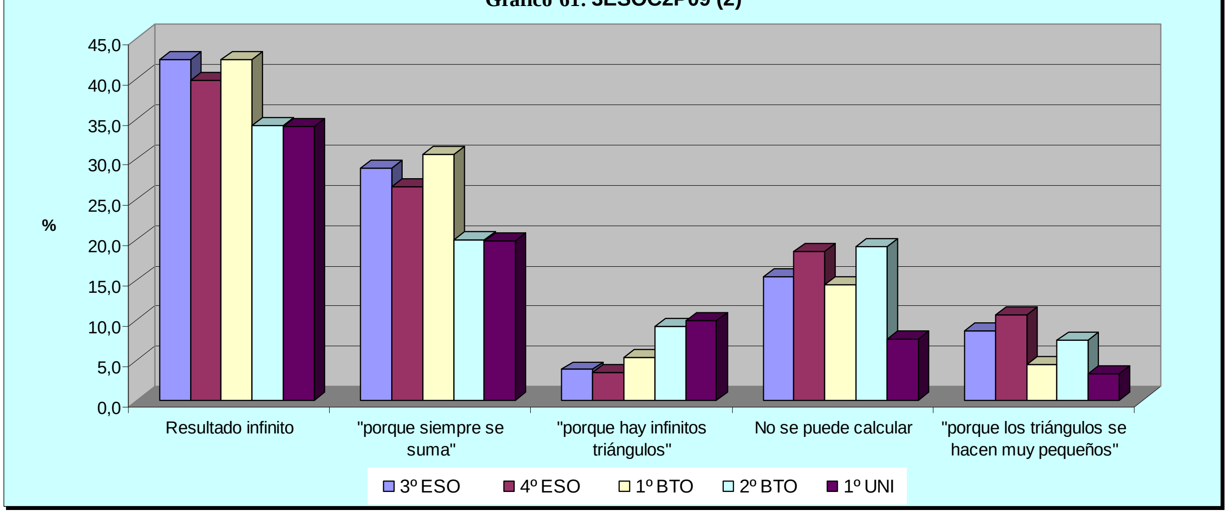
A la vista del gráfico 60, que presenta las categorías establecidas, y comparando estos resultados con los del ítem anterior podemos observar que el patrón de evolución del “resultado infinito” se ha modificado apreciablemente, pasando de una tendencia creciente-decreciente en aquella ocasión a ligeramente decreciente con un mayor grado de estabilidad; los porcentajes, por su parte, han experimentado un cierto incremento, en particular en los niveles inferiores; no obstante, en ambos casos se encuentran aproximadamente dentro de la franja del 30 al 40%. En lo que se refiere a la serie correspondiente a “resultado finito” el patrón de evolución mantiene la tendencia pero ahora nos ofrece un grado de estabilidad medio que antes no poseía esta respuesta; también en esta ocasión los porcentajes han aumentado sensiblemente salvo los correspondientes a 1UNI. De todos los niveles el que ha resultado más afectado por el contexto ha sido 3ESO que gracias a la importante reducción del número de alumnos que no responden han crecido las dos categorías principales; podemos observar que esta disminución se ha dado en todos los niveles. Por último, la categoría “no se puede calcular” ha experimentado el cambio más notable tanto en el patrón de evolución como en sus valores que se han reducido apreciablemente. Por lo tanto, en general, esta representación del problema aún siendo geométrica, ha facilitado el ensayo de una respuesta permitiendo la aplicación de alguno de los modelos dominantes frente al modelo de indefinición e incrementando el grado de estabilidad de todos ellos.

Gráfico 60: 3ESOC2P09 (1)



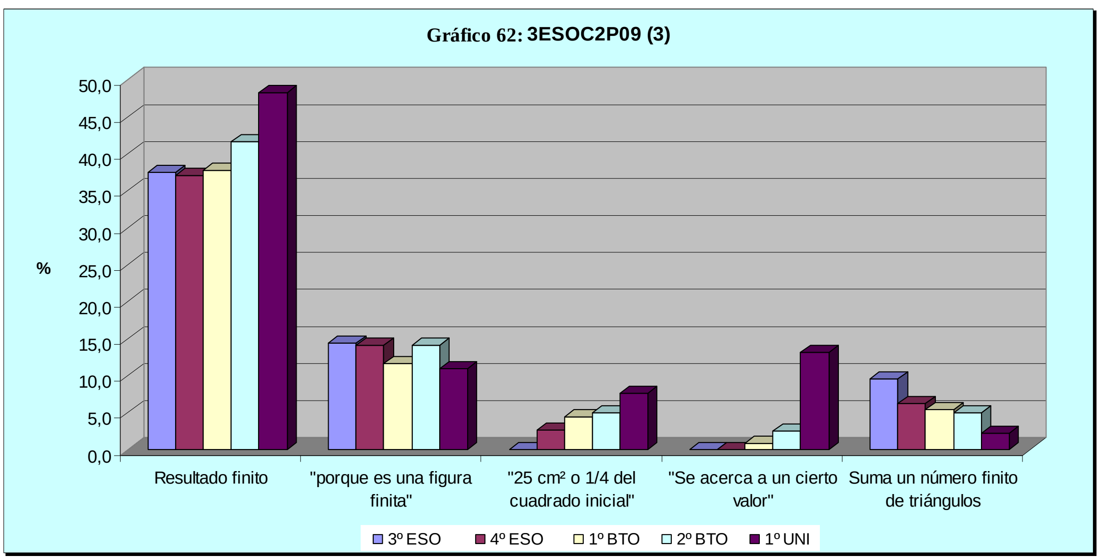
En el gráfico 61 observamos que los argumentos para justificar el “resultado infinito” son los mismos que en el ítem de la suma de diámetros si bien los porcentajes y patrones de evolución varían respecto a los registrados en este caso para las dos categorías consideradas; así, los valores

Gráfico 61: 3ESOC2P09 (2)



de la primera de ella crecen ostensiblemente manteniendo una tendencia decreciente, mientras que en la segunda disminuyen en menor proporción, conservando su carácter creciente sin llegar a convertirse en un elemento emergente. En cambio, la categoría “no se puede calcular” que presenta un patrón bastante irregular se basa principalmente en un tipo de argumento, “porque los triángulos se hacen muy pequeños", que en el caso de la suma de diámetros presentaba unos porcentajes despreciables, con el que los estudiantes quieren indicar que siendo tan pequeños no se podrá obtener su área porque no se podrán medir los parámetros necesarios. En aquella ocasión se registraba la respuesta "porque no se conocen los diámetros" que en parte también suponía una idea semejante. Así, los alumnos ignoran los datos que aporta el enunciado por juzgarlos insuficientes o innecesarios y pasan a interpretar la obtención de los datos a partir de una medida real, lo que inevitablemente implica que su resolución sea inviable; en cualquier caso, en la práctica, quedan excluidos de sus procedimientos los cálculos numéricos pertinentes como viene ocurriendo en todas aquellas cuestiones que precisan de ellos en mayor o menor medida e incluso aunque sólo sea en un sentido estimativo.

Y, por último, en lo que se refiere al "resultado finito", gráfico 62, responde a las subcategorías y patrones esperados; una vez más el carácter acotado de la figura que contiene la suma propuesta es el principal argumento para justificar dicho resultado, con un patrón de evolución muy estable y con porcentajes ligeramente superiores al ítem 3ESOC1P08. Por último, es de notar que hay un cierto número de alumnos que entiende, como en el ítem anterior, que la suma es de los triángulos representados en la figura que acompaña al enunciado, o un número finito arbitrario, bien por una interpretación rigurosa del mismo o sencillamente porque no han reparado en los puntos suspensivos; no obstante, esta categoría presenta un patrón de evolución decreciente que la convierte en un elemento residual.



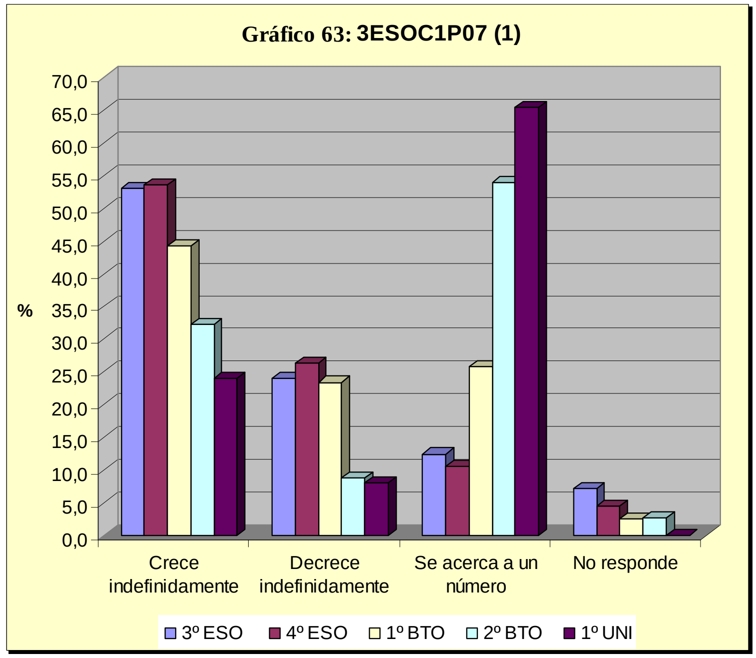
5.4.3. CONTEXTO NUMÉRICO. CUESTIONES ESPECÍFICAS.

3ESOC1P07	*(3+4) ESO + BTO + UNI*

Dada la suma $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, su resultado, según se va añadiendo una nueva fracción,

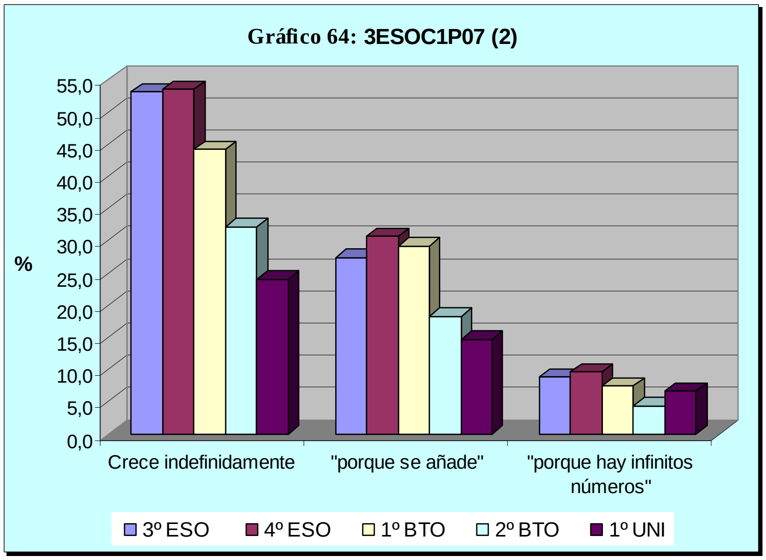
a) crece indefinidamente
b) decrece indefinidamente
c) se acerca indefinidamente a un cierto número
d) otra respuesta; indicar cuál

3ESOC1P07. En el siguiente ítem se modifican dos aspectos básicos del enunciado anterior. Por una parte, el contexto es ahora numérico y, por otra, en la cuestión previa se requería una posición frente al resultado del proceso mientras que aquí se solicita respecto al proceso mismo. Se ha planteado a una muestra diferente de la anterior con lo que eliminamos el factor de influencia de un contexto sobre otro.



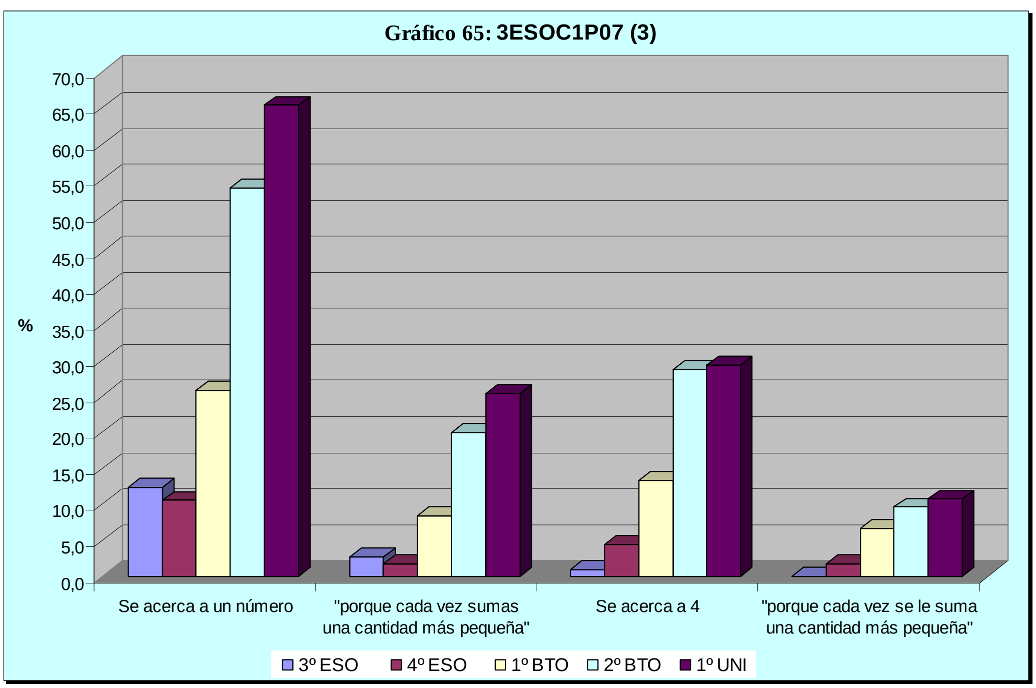
El gráfico 63 nos muestra, en primer lugar, cierto paralelismo entre el patrón de evolución de la primera de las categorías, "el resultado crece indefinidamente", y el de la correspondiente a "resultado infinito" del ítem anterior en un claro ejemplo de aplicación del modelo de *divergencia*. Por su parte, la respuesta "el resultado decrece indefinidamente" no hace sino poner de manifiesto que el sujeto ha confundido la evolución de la suma con la del término general de la sucesión como queda patente en respuestas tales como: "porque el denominador es cada vez mayor" o "porque las fracciones son cada vez más pequeñas" o "porque se va dividiendo cada fracción entre 2". Sorprende no tanto la confusión como el elevado porcentaje en los niveles inferiores que han elegido esta opción. Probablemente un lectura rápida del enunciado y la aún poca familiaridad con este tipo de situaciones ha provocado esta confusión; de cualquier manera, estas razones pueden explicar que el patrón de evolución correspondiente presente una tendencia inversa a los tres ítems anteriores en la categoría "resultado finito". En lo que se refiere a la tercera opción, que en el ítem anterior no se sugería como respuesta alternativa, observamos que reproduce el mismo patrón de evolución temporal salvo en los resultados de los niveles inferiores que son más elevados en esta ocasión, en particular los de 1BTO que, como ya hemos indicado en alguna ocasión, se halla en esa transición entre la "matemática finita", o incluso discreta, y la "matemática infinitesimal". Así, una vez más, la versión potencial del infinito muestra su naturaleza más intuitiva pues basta introducir algún elemento inductor para que se produzca un trasvase observable desde posicionamientos indefinidos como "no se puede saber o calcular" o finitistas a otros infinitistas; las respuestas ofrecidas, así como el cambio del contexto geométrico al numérico, han favorecido claramente una actitud infinitista pero consciente de una cierta cota.

Si consideramos en detalle los argumentos que hay detrás de estas respuestas encontramos que la primera de ellas, gráfico 64, responde a patrones semejantes a los registrados en el caso anterior: "porque siempre se suma o añade" y "porque hay infinitos números". El presente ítem contiene una sutileza en las opciones de respuesta que no debemos obviar; se trata del adjetivo "indefinidamente". El matiz "crecer y acercase a un número" no resulta en absoluto trivial para sujetos en los que los modelos mencionados poseen la fortaleza suficiente como para ignorar detalles más finos. Así, para buena parte de los sujetos, "sumar siempre es crecer o aumentar" contiene implícita la condición "indefinidamente" lo que explica, por otra parte, el "resultado infinito" del ítem 6PRIC1P08 anterior; en este caso, como podemos ver, significa ignorar la



posibilidad de una cota superior del crecimiento. Todo parece como si existiesen a priori las asociaciones intuitivas crecimiento/infinito y decrecimiento/finito sólo modificables mediante la instrucción pertinente sobre la idea intuitiva o formal de límite.

Los registros referentes a la tercera opción, "se acerca indefinidamente a un número", se han desglosado en las categorías que se indican en el gráfico 65. La primera de ellas incluye a la tercera, "se acerca a 4". En cualquiera de los dos casos el argumento mas frecuente que se encuentra tras ellos es falaz, "porque cada vez sumas una cantidad más pequeña"[25], y ha debido enfrentarse al modelo intuitivo de *divergencia* que induce a la acción "sumar es aumentar indefinidamente". Bien es cierto que una buena parte de los sujetos efectúa la suma de los primeros términos y esto les permite estimar, extrapolar e identificarse con esta tercera opción. Este debe ser el mecanismo con el que minimizan la influencia del modelo intuitivo en cuestión. En cuanto a aquellos que aportan una fundamentación más formal del resultado se reducen a valores que no superan el 7%, en 1UNI[26].



Garbín (2005) plantean la siguiente pregunta a estudiantes universitarios: *Considera la siguiente suma 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + · · · ¿Cuál crees que es el valor de la suma? Explica tu*

25. Es seguro que ante la serie divergente 1+ 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + · · · se hubiera aducido el mismo argumento.

26. Estos alumnos se refieren básicamente al resultado de la suma de las fracciones que relacionan todos ellos con otros ítems como el de la divisibilidad indefinida de un segmento o de un número.

respuesta de forma detallada. El 36,0 % afirma la convergencia de la serie pero sin aceptar que se alcance el punto límite, que consideran como el 1, el 2 o bien un número sin determinar, si bien ninguno demuestra formalmente la convergencia de la serie. Sobresale la idea de que se va aproximando al valor de convergencia y que no llega a ser exactamente este valor. En torno al 15% mantiene que el valor de la suma es 1 con argumentos del tipo “a medida que se va sumando se tienen sumandos más pequeños” o bien “los términos de la serie decrecen y tienden a 0”, mientras que el 8 % considera que no se puede determinar el resultado; algunos de ellos porque dicho resultado es infinito. También en Garbín (2000) y Garbín y Azcárate (2002) se plantea una pregunta análoga a estudiantes de 16 a 17 años cuyos resultados se indican en la tabla adjunta; podemos observar que no presentan un acuerdo significativo con nuestros valores.

16 a 17 años	Garbín y Azcárate (2002)
Infinito o tiende a infinito (por el número de sumandos)	15,00
Un número: 2 ó 0	31,25
Tiende a 2 (porque cada vez se suma uno más pequeño)	28,75
No tiene solución, es indefinida, no se puede calcular	18,75
No responde	6,25

Entre las conclusiones obtenidas por estas autoras destacamos aquellas que coinciden plenamente con las halladas en nuestro trabajo:

- No siempre se acepta el cardinal infinito de los sumandos. Puede haber omisión de los puntos suspensivos y calcularse la suma con los sumandos dados.
- La suma es infinita no sólo por los puntos suspensivos, como expresión algebraica, sino como un proceso numérico: la posibilidad de dividir infinitamente el número 1.
- La expresión infinita de la suma puede aludir a considerar que no es posible sumar una cantidad infinita de términos o, que el resultado siempre es aproximado; en el primer caso no se tiene en cuenta el tipo de sumandos.
- Puede eludirse la suma infinita observando sólo el comportamiento de la sucesión $1/2^n$.

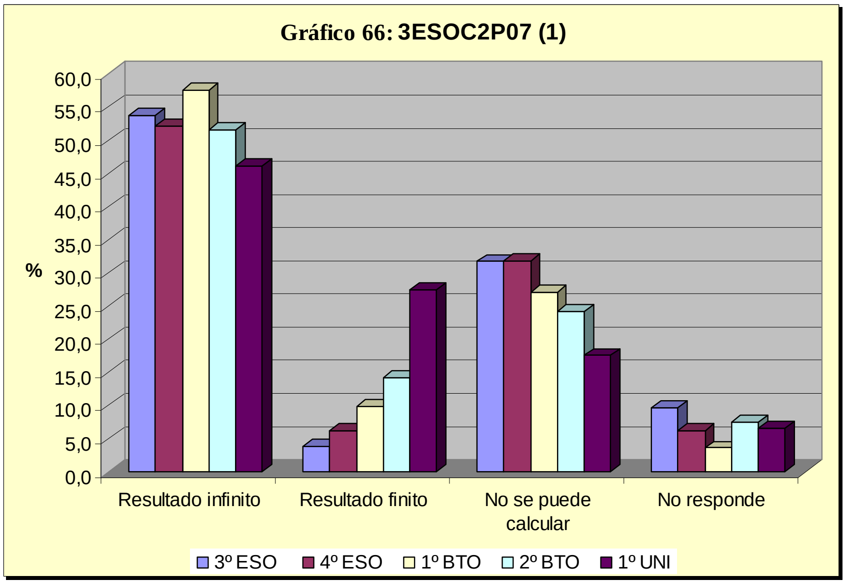
3ESOC2P07	***(3+4) ESO + BTO + UNI***

Considera la suma $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots$; su resultado

a) es un número finito, ¿cuál?
b) es un número infinito, ¿por qué?
c) no se puede calcular, ¿por qué?

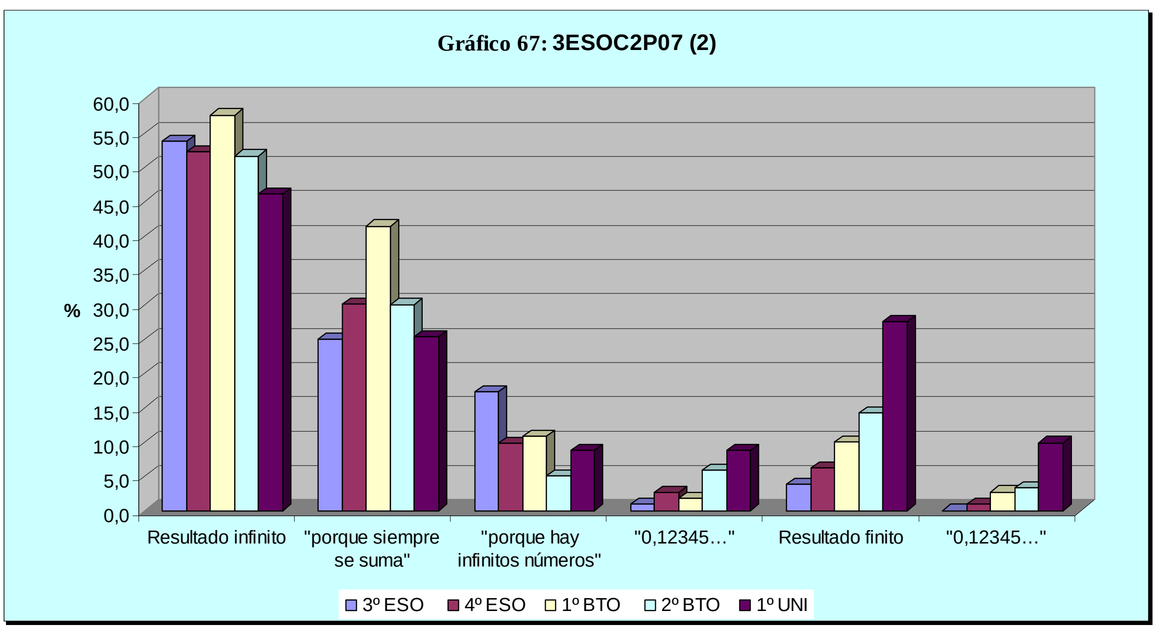
3ESOC2P07. Los alumnos cuyo cuestionario no incluía el ítem anterior debieron responder este otro que supone una variación de aquél tanto en el tipo de convergencia como en las respuestas alternativas ofrecidas en el enunciado.

Una vez más los patrones de evolución se mantienen pero varían los valores de sus frecuencias. En esta ocasión el contexto ha favorecido el “resultado infinito” frente al “resultado finito”, que ha registrado unos porcentajes sensiblemente inferiores a todos los casos anteriores y que de ser un elemento propio ha pasado a un patrón de evolución típico de un elemento emergente. Por su parte, la categoría “no se puede calcular” presenta una tendencia decreciente pero lejos de convertirse en un elemento residual. Podemos constatar tras estos cinco ítems que el “resultado infinito” mantiene prácticamente la tendencia de sus patrones de evolución frente a diferentes contextos y representaciones mientras que, por el contrario, los correspondientes al “resultado finito” presentan una fuerte sensibilidad tanto al contexto como, dentro de cada uno de estos, a la representación utilizada; esta sensibilidad se manifiesta a través de los diferentes modelos intuitivos que marcan las respuestas o justificaciones de los estudiantes. Por último, las series correspondientes a la respuesta “no se puede calcular” también quedan afectadas por un

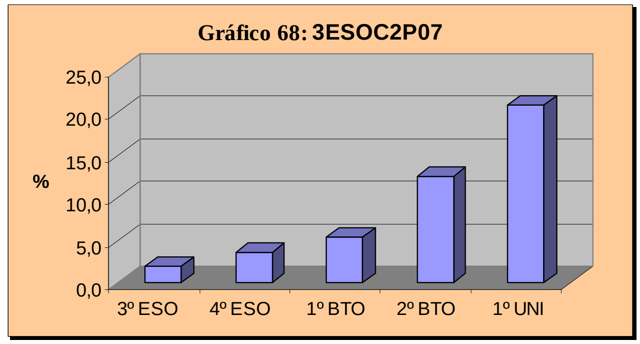


comportamiento irregular a través de todas estas cuestiones pero, en esta ocasión reflejan, además de la influencia del modelo de indefinición, el conflicto cognitivo propio del enfrentamiento entre modelos intuitivos.

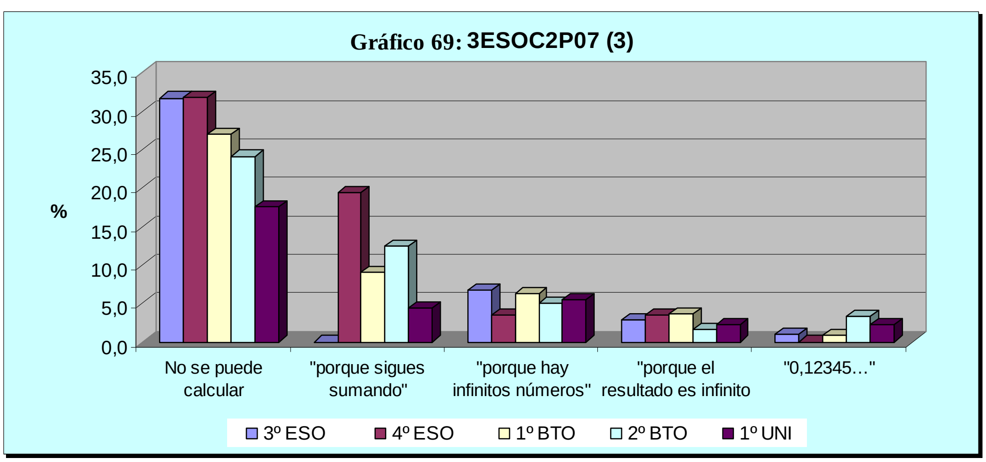
En el gráfico 67 aparecen reflejados los argumentos justificativos de las dos primeras categorías; la condición de decimal infinito del resultado ha dificultado especialmente su aceptación como número finito y ha sido interpretado como resultado infinito debido al número de sus decimales. La respuesta finita ha encontrado su base en el hecho de que los términos van disminuyendo muy rápidamente, lo que ha inducido a pensar en la finalización de la serie en una cantidad “alcanzable” de términos, o al menos en una estimación bastante aproximada despreciando una “cantidad infinita” de términos. No deja de llamar la atención que en las tres categorías se ha registrado como una posible justificación la respuesta “0,12345…”. En realidad, dicho resultado responde perfectamente a las tres opciones



consideradas bajo los diferentes modelos intuitivos adoptados por los estudiantes: como número infinito, modelo de *divergencia*, porque “siempre se suma” o “tiene infinitas cifras”, como número finito porque se intuye que “no puede pasar un cierto valor” y también que “no se puede calcular” debido a la *indefinición* que supone una cantidad infinita de decimales. De hecho si sumamos los porcentajes de esta respuesta “0,12345…” para todas las categorías en cada uno de los niveles, se obtiene la distribución del gráfico 68, que nos indica hasta qué punto los sujetos conocen el resultado decimal como para no pensar en una cota natural, por ejemplo 1, de la suma. Cabe destacar la semejanza que existe entre este patrón de evolución y el correspondiente a la categoría "resultado finito" del gráfico 66, pero es preciso insistir en que los estudiantes que justifican esta categoría a partir de dicho resultado numérico arroja valores muy inferiores a los del gráfico 68. Por encima de todo esto no deberíamos perder de vista que el porcentaje de sujetos que recurre a la conversión decimal de los primeros términos de la serie no supera el 21% en 1UNI; es decir, sólo uno de cada cinco alumnos en este nivel fundamenta su respuesta en un dato numérico; la mayor parte del resto parece tomar su decisión basándose en el aspecto simbólico de la serie como suma infinita, sin más consideraciones sobre el valor y la evolución de sus términos. Que esto es así y que dicha decisión tiene un carácter profundamente intuitivo viene subrayado por la tendencia creciente del gráfico 68, en particular entre los niveles de 3ESO a 1BTO cuyos valores son prácticamente despreciables.



Por último, en el gráfico 69 observamos que la respuesta "no se puede calcular" responde al mismo tipo de argumentos que el "resultado infinito", aunque sus patrones de evolución son muy diferentes. Así, por ejemplo, sólo uno de cada tres sujetos de 3ESO que elige esta respuesta aporta alguna justificación. Por otra parte, observamos que mientras que el patrón de evolución de la categoría "porque sigues sumando" es decreciente convirtiéndola en un elemento residual del esquema conceptual, el correspondiente a "porque hay infinitos números" mantiene un elevado grado de estabilidad en torno al 5%. En resumen, este ítem ha favorecido la aplicación del modelo intuitivo de *indefinición* así como el modelo de *divergencia*.



Para finalizar este apartado sobre la incidencia del contexto numérico en los diferentes modelos intuitivos debemos referirnos a un ítem más incluido en uno de los cuestionarios para estudiantes universitarios, el 1UNIC2P04, que pregunta sobre el resultado de la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

pero en esta ocasión, a diferencia del ítem 3ESOC1P07, se ofrecen como respuestas alternativas:

a) es infinito	*c)* se acerca todo lo que queramos a un cierto valor, ¿a cual?
b) es 2	*d)* otra respuesta, ¿cuál?

con el fin de dar mayor protagonismo al resultado frente al proceso. Los resultados obtenidos indican que un 13,7% mantiene que "el resultado es infinito", un 21,9% que "el resultado es 2" y un 50,7% que "se acerca a 2"; la suma de estas dos últimas, que corresponden a un resultado finito, igualan el valor obtenido en el ítem 6PRIC1P08 correspondiente a la suma de segmentos en la misma progresión que la serie anterior. También es posible apreciar que la perspectiva del infinito actual, respuesta "2", es aún minoritaria frente a la que proporciona el infinito potencial, "se acerca a 2".

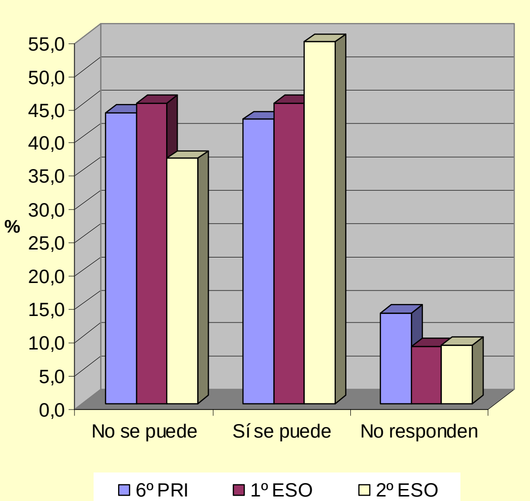
5.5. OPERATIVIDAD E INFINITO.

Si atendemos a determinado tipo de respuestas registradas en el análisis de dato, tales como "si sumas cualquier número a infinito da infinito"; "si restas cualquier número a infinito te queda infinito", "no se podrían multiplicar dos números infinitos [periódicos] y si lo haces el resultado es infinito", "infinito menos un millón sigue siendo infinito", "puedes hacer infinitos círculos por lo que la suma de los diámetros también será infinita", "algo infinito por infinito también es infinito", "no se pueden sumar o restar números infinitos", "como no nos imaginamos el infinito tampoco podríamos restarle un millón", podemos determinar que la aritmética del infinito es un terreno prácticamente desconocido para la mayor parte de los estudiantes, incluidos los universitarios en su primer cuatrimestre aún habiendo recibido instrucción sobre teoría de conjuntos y, en consecuencia, suponemos que su estudio resultará fértil a la hora de explorar la implantación y desarrollo de los modelos intuitivos relacionados con el concepto que nos ocupa.

6PRIC1P05	***PRI + (1+2) ESO***
¿Puedes realizar la siguiente resta 7,424242... - 3,151515... ? Si es posible escribe el resultado. De lo contrario explica porqué	

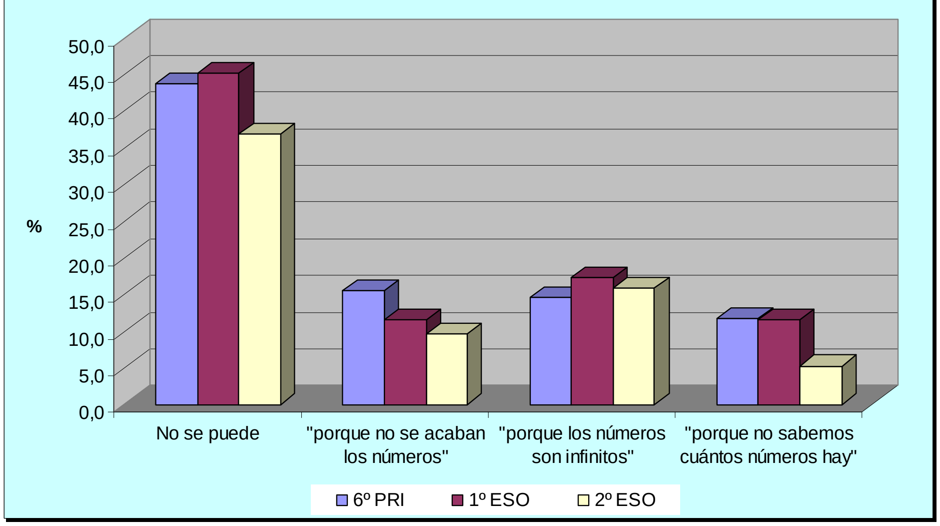
6PRIC1P05. Los sujetos de los tres niveles a los que se les propuso esta pregunta conocían los números decimales periódicos, e incluso en 2ESO ya habían operado con ellos. A pesar de ello, la familiaridad con este tipo de números y la habilidad para realizar algunas operaciones aún no refleja una comprensión suficiente del concepto como se puede constatar en el gráfico 70. Entre un 35% y un 45% de los estudiantes mantienen que "no se puede realizar" dicha operación, mientras que entre el 40% y el 55%, aproximadamente, responden afirmativamente con un patrón de evolución creciente y, en ambos casos, con un grado de estabilidad medio. Así, pues, ambas posiciones se encuentran en torno a valores muy próximos, mostrando el sentimiento contradictorio que ha provocado esta pregunta. No obstante, es preciso reconocer la tendencia creciente de la respuesta afirmativa, resultado evidente de la

Gráfico 70: 6PRIC1P05 (1)



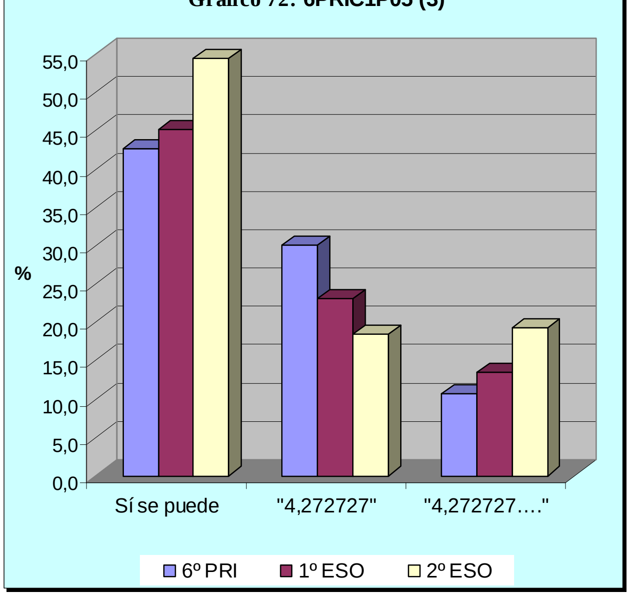
incorporación al esquema conceptual del algoritmo correspondiente adquirido a través de una instrucción rutinaria. En el gráfico 71 aparecen los argumentos más frecuentes que han utilizado los estudiantes para justificar la respuesta negativa; todas estas razones se remiten a alguna de las propiedades, ya recurrentes a lo largo del este capítulo, con las que los alumnos dotan a las colecciones infinitas y que, en resumidas cuentas, en el caso que nos ocupa, implican la presencia del modelo de *indefinición* de infinito; cualquiera de las categorías que aparecen en el gráfico ponen de manifiesto el sentido secuencial atribuido a la parte decimal de los números periódicos, lo que nos indica que un porcentaje elevado de estudiantes aún no los ha interiorizado como objetos matemáticos sobre los que realizar determinadas acciones.

Gráfico 71: 6PRIC1P05 (2)



En cuanto a la respuesta afirmativa, véase gráfico 72, podemos observar que no siempre encontramos tras ella el resultado correcto como nos muestra el patrón de evolución de la categoría "4,272727" que aunque decreciente presenta unos porcentajes significativos, en cada uno de los niveles, de sujetos que no reconocen el significado de los puntos suspensivos y no los reproducen en su solución. El efectuar la operación para estos sujetos es incompatible con la infinitud y, en consecuencia, resuelven la contradicción ignorando tal inconveniente al elegir un número finito de periodos. En este caso los elementos disponibles en el esquema conceptual no generan el conflicto que se produce en aquellos sujetos que se inclinan por la respuesta negativa. De este modo, y a pesar de que la tercera serie apunta hacia un elemento emergente a un ritmo moderado que ya sabemos que terminará siendo dominante en uno o dos años más al sistematizar este tipo de operaciones, la operatividad con cantidades infinitas presenta siempre, bajo un contexto u otro, conflictos cognitivos que el sujeto debe resolver mediante algún modelo intuitivo dominante.

Gráfico 72: 6PRIC1P05 (3)



3ESOC2P05	***(3+4) ESO + BTO + UNI***
¿Cuál es el resultado de $0,\widehat{9} \times 0,\widehat{9}$? Explica tu respuesta	

3ESOC2P05. El ítem que consideramos a continuación presenta al sujeto el producto de dos números bajo el símbolo de la periodicidad pero también supone la representación de un número entero; se trata de conjugar en un mismo enunciado los conflictos cognitivos generados por la expresión $0,\widehat{9} = 1$, que ya hemos tratado con anterioridad, y la operación indicada en el mismo. En el gráfico 73 se ha recogido el patrón de evolución de las principales categorías de respuestas. El resultado finito nos ofrece una tendencia creciente si bien con un grado de estabilidad medio en torno al 50% para los cuatro primeros niveles; en cambio las otras dos series corresponden a elementos residuales del esquema conceptual. En particular, la respuesta "el resultado es infinito" no es sino el reconocimiento de un número infinito de decimales en el resultado como ya ha ocurrido en ítems anteriores. Por último, la respuesta "no se puede calcular" cae por debajo del 15%, un valor sensiblemente inferior al alcanzado en el ítem anterior para edades menores. Las justificaciones principales de esta categoría son que "el resultado es infinito" o bien "que hay demasiados decimales y no se puede realizar la operación"; es decir, corresponden al modelo de *indefinición* de infinito que vuelve a ser utilizado para expresar la inviabilidad operacional.

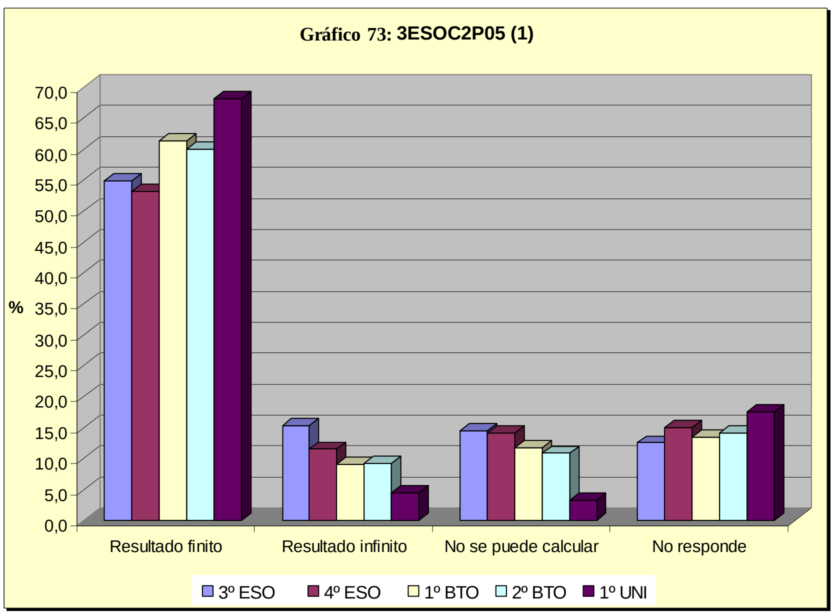


Gráfico 73: 3ESOC2P05 (1)

Las respuestas que se deciden por un resultado finito[27] se han categorizado según se puede observar en el gráfico 74. En él se aprecia en primer lugar que el resultado más frecuente en prácticamente todos los niveles ha sido "0,999…" que presenta un patrón de evolución creciente-decreciente; conviene profundizar en los argumentos que han conducido a los sujetos a este resultado ya que sólo el 0 y el 1 disfrutan de esta propiedad que se ha atribuido a un número periódico. En la mayor parte de los casos los estudiantes han realizado una estimación tras efectuar varios ensayos operando con un número finito de nueves; por lo tanto, hallamos una vez más que el modelo de *aproximación* permite resolver la indefinición que origina este tipo de números. Por su parte, la respuesta "1" representa un elemento emergente propio del infinito actual que, aunque equivalente a la anterior, queda fuera de la comprensión de la mayor parte de los estudiantes; no obstante, algunos de los que así responden también aluden al redondeo para justificar la respuesta. El patrón de evolución de este resultado coincide con el que hallamos en el ítem 6PRIC1P04,

27. En ninguna de estas respuestas el sujeto expresa explícitamente que el resultado sea finito, pero hemos considerado pertinente separar estas de aquellas otras en las que se afirma la infinitud de dicho resultado.

aunque en esta ocasión los porcentajes son más elevados, en particular en 2BTO y 1UNI que se han duplicado. La serie correspondiente a "0,818181…", con patrón de evolución característico de un elemento residual, nos indica que la periodicidad ha sido el aspecto predominante de esta operación, extrapolando el resultado a partir de un único ensayo. La respuesta "un número muy próximo a 1", que nos ofrece un patrón de evolución emergente, se basa en que "los dos factores son muy próximos a la unidad" y se corresponde con la adquisición de la terminología propia del análisis matemático. Las respuestas finitistas "0,999998 ó 0,81" y similares constituyen un elemento residual con valores significativos sólo en el nivel inferior.

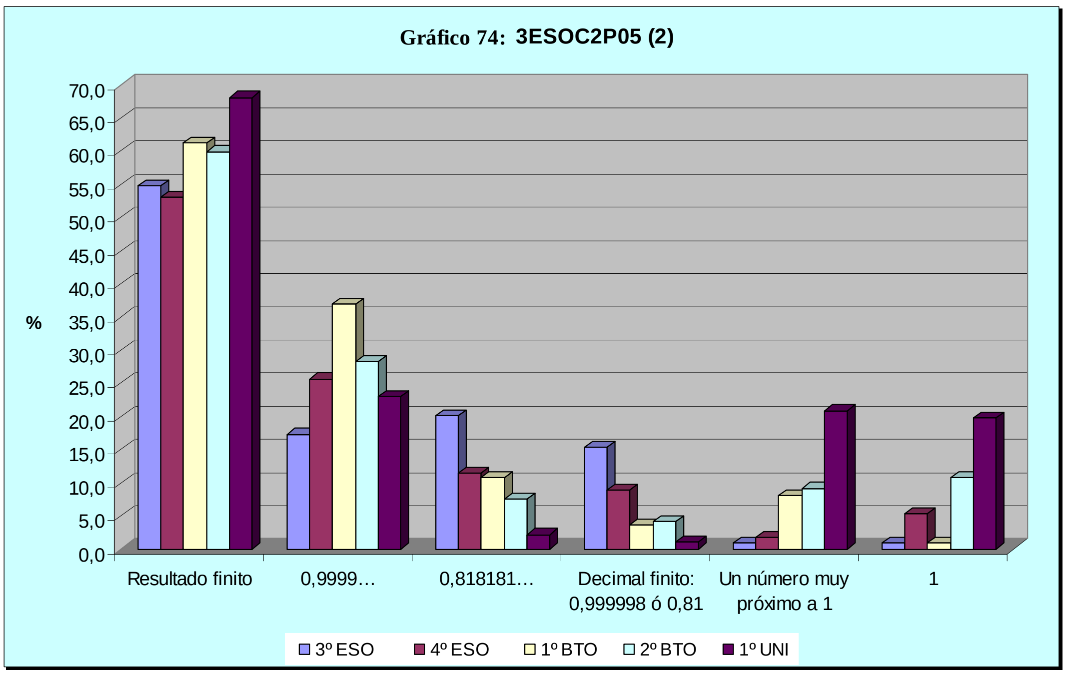
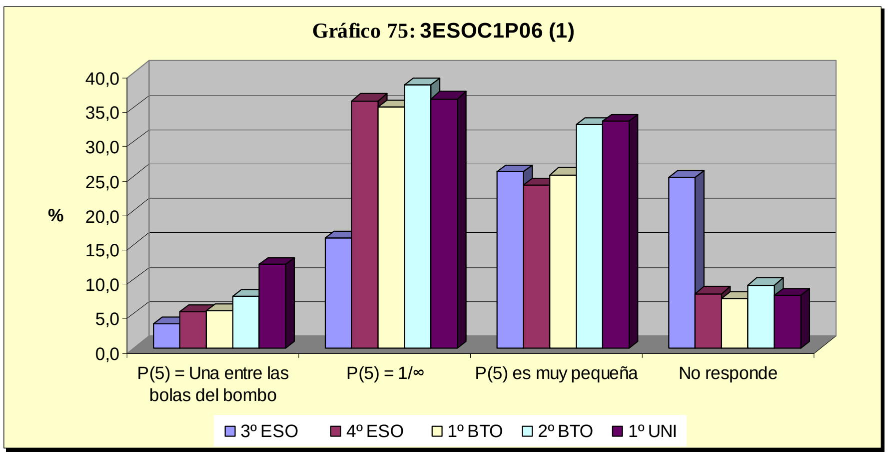


Gráfico 74: 3ESOC2P05 (2)

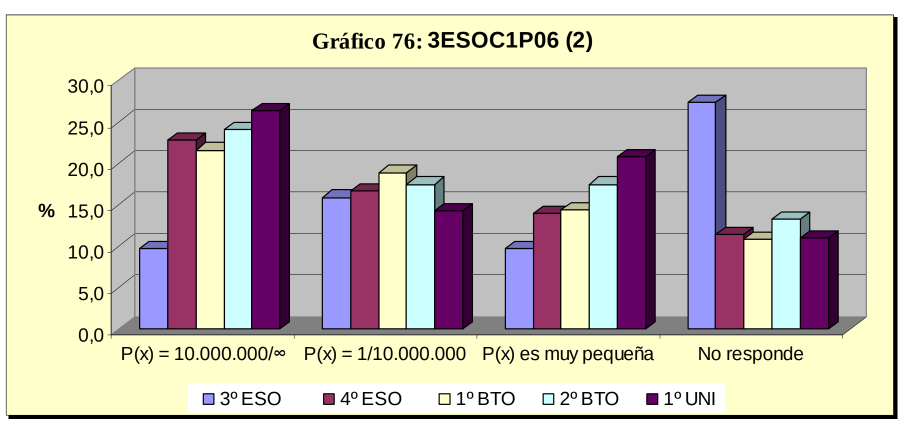
Podemos hallar una cierta conexión entre los resultados de este ítem y la cuestión 3ESOC2P03, ya considerada en la página 259 y el gráfico 52, en la que se solicitaba un número que multiplicado por nueve diese como resultado la unidad. Así, se encuentra un paralelismo relativo entre la categoría "1/9 ó 0,111…" de aquél ítem y la respuesta "1" del que estamos tratando ahora; por el contrario, las series "sólo te puedes aproximar a 1" y "un número muy próximo a 1" presentan patrones de evolución inversos: en aquella ocasión decreciente y en ésta emergente.

3ESOC1P06	*(3+4) ESO + BTO + UNI*
Considera un bombo de lotería enorme con todos los números naturales ¿Cuál es la probabilidad de extraer un 5?, ¿y la de extraer alguno de los números que hay entre 1 y 10.000.000?. Justifica tu respuesta.	

3ESOC1P06. De todos es conocido que las habitualmente denominadas "división entre infinito" y "división entre 0" suponen una auténtica singularidad en el aprendizaje de las matemáticas ligada a la noción de límite. Si pretendemos acercarnos a los modelos intuitivos que pueden articularse en estas situaciones conviene crear un enunciado alejado de cualquier sugerencia al concepto de límite que favorecería el punto de vista actual de infinito. La noción de probabilidad posee una interpretación natural que permite a la mayor parte de los estudiantes de estos niveles, e incluso inferiores, acceder a su aplicación; es por esta razón por la que este ítem se ha planteado en estos términos. Las respuestas a la primera pregunta de este ítem se encuentran representadas en el gráfico 75. La primera serie que no llega a convertirse en un elemento emergente, recoge la actitud de aquellos sujetos que eluden opinar sobre el resultado ante la operación que sugiere su planteamiento bajo la influencia del modelo de *indefinición* ya sea desde una perspectiva finitista o infinitista. En cuanto a la segunda categoría de respuestas, no es sino una versión simbólica de la anterior, especialmente en los tres primeros niveles en los que las razones expuestas aluden, en su mayor parte, a dicho carácter indefinido expresado mediante el símbolo ∞, "la probabilidad es 1/∞ que es indeterminada porque no se sabe el valor de infinito"; por el contrario, en 2BTO y 1UNI sí se incluye alguna consideración sobre la naturaleza del resultado de dicho cociente en la línea de la tercera categoría, "P(5) es muy pequeña": "1/∞, que es un número muy próximo a 0", "1/∞ es una probabilidad muy difícil o imposible". Ésta presenta un patrón de evolución con un grado de estabilidad medio entre el 25% y el 30% aproximadamente; es decir, sólo uno de cada cuatro alumnos en los tres primeros niveles y uno de cada tres en los dos niveles superiores reconoce este resultado asociado a la infinitud de los números naturales y al significado de una "división entre infinito". No obstante, conviene destacar que entre el 23% en 3ESO y el 65% en 1UNI hace referencia al término infinito en relación con la respuesta a las preguntas planteadas. Es conveniente subrayar también, el elevado porcentaje de preguntas sin respuesta recogido en 3ESO, nivel en el que habitualmente se introduce el concepto de probabilidad hacia final de curso o bien no se imparte. Por último, debemos señalar que el carácter aleatorio de esta experiencia que pretendía la idealización matemática del proceso ha predominado en un cierto número de las respuestas, en particular desde 3ESO a 1BTO donde porcentajes significativos de respuestas mantienen que "no se puede saber porque depende del azar o de la suerte" como se aprecia en el gráfico 77.



En la segunda pregunta de este ítem se ha detectado un error en su interpretación, ya que una parte no despreciable de los sujetos, segunda serie del gráfico 76, entendieron que el experimento aleatorio consistía en extraer un número entre



diez millones de números[28]. Esto altera evidentemente los resultados pero, no obstante, podemos ver que los patrones de evolución conservan aproximadamente su perfil, en especial la primera, tercera y cuarta serie del gráfico 76, respecto a los correspondientes del gráfico 75.

La relación entre ambas probabilidades no se requería en el enunciado, pero una parte importante de los estudiantes la han incluido en su respuesta, lo que nos puede permitir una proyección de estos resultados. En el gráfico 77 podemos ver, en la primera serie, cuál es la proporción de aquellos que efectúan la división entre infinito y, de manera indirecta, también se refleja esta idea en la segunda serie, al igualar ambas probabilidades; los porcentajes sólo son significativos en 2BTO y 1UNI, únicos niveles en los que, en el momento de realizar el cuestionario, ya se había impartido el cálculo de límites. En consecuencia, este contexto probabilístico parece favorecer la aparición de un elemento emergente que entiende de manera natural, sino el resultado, sí el significado de la división en cuestión. Frente a esto, la posición P(5) < P(x) representa un elemento residual que mantiene un elevado grado de estabilidad desde 3ESO hasta 1BTO en su patrón de evolución y que parece mantener algún tipo de conexión con el modelo de *inclusión*. No obstante, es preciso hacer notar, como ya se ha indicado, que entre un 5% y un 10% de los alumnos considera que se trata de un experimento no factible en la realidad, lo que supone un obstáculo para la abstracción del problema matemático; de nuevo la idea de infinito se enfrenta a las limitaciones físicas de la experiencia cotidiana.

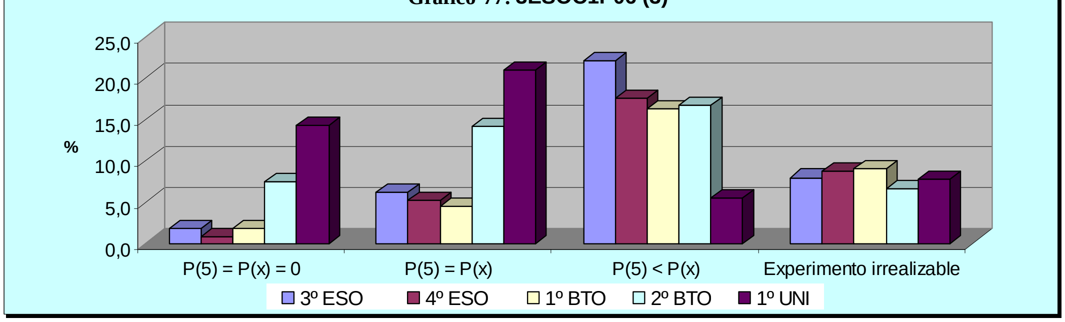


Gráfico 77: 3ESOC1P06 (3)

3ESOC1P09. Con el siguiente enunciado se ha pretendido observar la "división entre infinito" desde una perspectiva diferente, en este caso bajo un contexto numérico, que subrayase la vertiente potencial propia del proceso que permite acceder a su resultado.

3ESOC1P09	***(3+4) ESO + BTO + UNI***

Observa la siguiente sucesión de números, donde el denominador sólo puede ser un número natural:

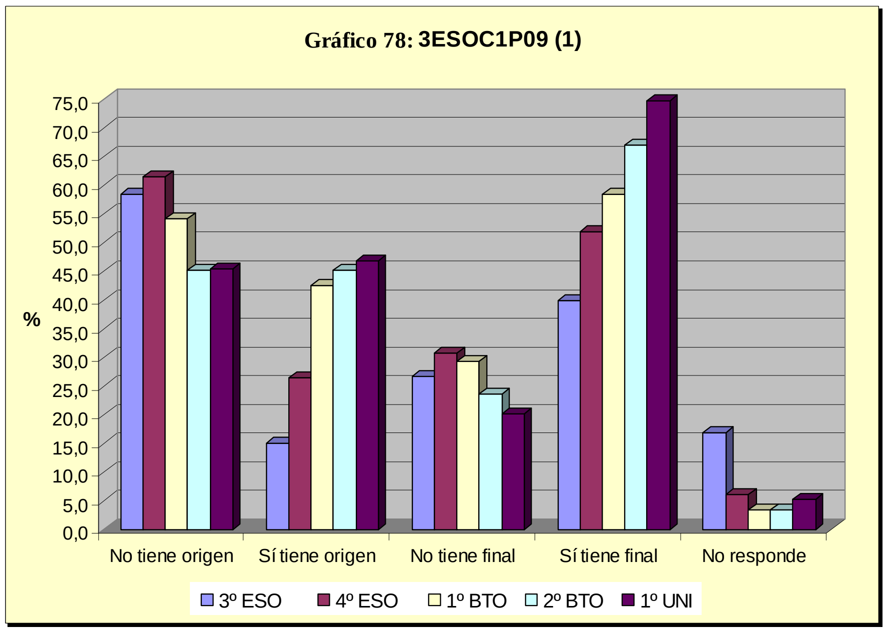
¿Origen? $\ldots, \frac{1}{35}, \frac{1}{34}, \frac{1}{33}, \frac{1}{32}, \ldots$ ¿Final?

¿Tiene origen y final? Si es así, ¿qué números son esos?

Como se puede apreciar en el gráfico 78, la respuesta sobre el "final" de esta colección de números no suele presentar mayores dificultades para aquellos sujetos que han reparado en los detalles del enunciado; no ocurre así para aquellos otros que no observan la limitación del denominador a $\mathbb{N}$ y continúan con los enteros negativos; para ellos, la sucesión "no tiene final" o bien llega hasta cero. Así, el patrón de evolución que debería presentar un elevado grado de estabilidad en torno a porcentajes mayores nos ofrece esa tendencia creciente que se observa en el

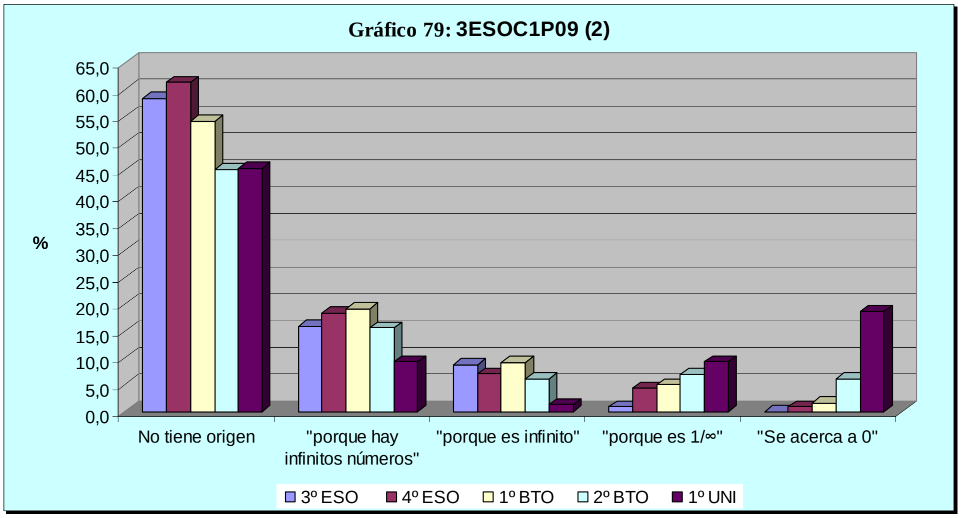
28. Se ha abreviado la notación: $P(x) = P(1 \leq x \leq 10.000.000)$

gráfico. La simbología que representan los puntos suspensivos ha conseguido imponerse sobre una lectura rápida del enunciado. Debido a esto, la categoría “no tiene final” no llega a convertirse en un elemento residual como era de esperar, sino que nos da un perfil decreciente con un cierto grado de estabilidad. En cuanto al origen, observamos una apreciable estabilidad en los niveles superiores tanto en la respuesta negativa como en la afirmativa, especialmente en 2BTO y 1UNI, y un acusado equilibrio entre los porcentajes de ambos niveles que intentaremos explicar más delante de manera pormenorizada.

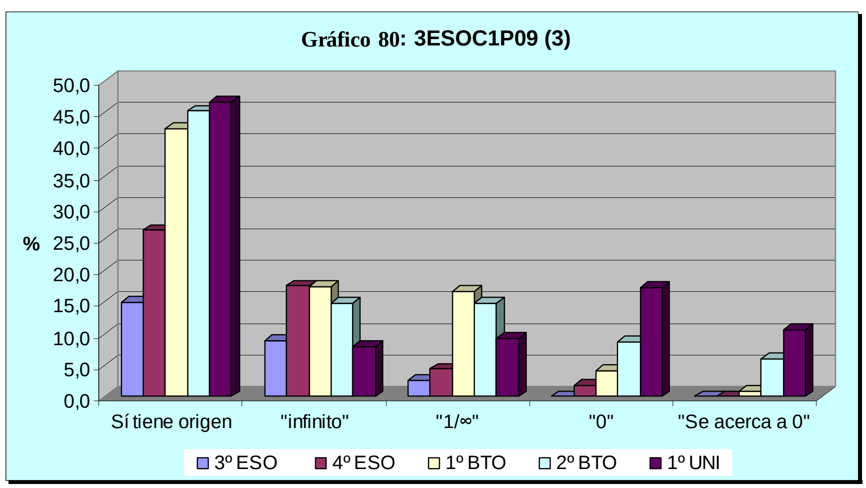


La actitud ante el origen de esta sucesión presenta una variedad de subcategorías bastante rica como podemos apreciar en los gráficos siguientes. En principio, en los tres primeros niveles la respuesta negativa presenta porcentajes claramente superiores a la afirmativa; la versión potencial del infinito actúa en este caso de manera dominante. En cambio, como ya se ha mencionado, para 2BTO y 1UNI ambas respuestas están equilibradas y, por lo tanto, también lo están las visiones actual y potencial del infinito. Esta cuestión presenta un cierto paralelismo con el ítem 3ESOC2P06 donde se requería encontrar el mínimo del intervalo (2, 3); en el caso actual se trata de encontrar indirectamente el mínimo del intervalo (0, 1]. En ninguno de los casos existe el valor solicitado pero en ambos casos existe una cota inferior. Si comparamos el comportamiento de los sujetos ante una y otra situación, observamos que en esta ocasión se elevan sensiblemente los valores de la respuesta negativa correspondientes a los tres primeros niveles; 2BTO apenas sufre variaciones. Y en lo que se refiere a la respuesta afirmativa sólo quedan afectados por el nuevo contexto los alumnos de (3+4) ESO que nos ofrecen unos valores claramente inferiores a los registrados en aquella ocasión.

Si consideramos ahora estas dos categorías más de cerca podremos ver que entre las razones que sustentan la ausencia de origen, gráfico 79, la más importante coincide con la que se encontró en el ítem mencionado, incluso el patrón de evolución presenta una gran similitud aunque no así los porcentajes correspondientes que en esta ocasión disminuyen en torno a un 10 %. La última serie del diagrama que ahora estamos analizando representa un elemento emergente del infinito potencial propio del contexto bajo el que se está respondiendo y supone un enfoque adecuado de la “división entre infinito”; aún así, como vemos, no llega a alcanzar valores significativos salvo en 1UNI. La categoría “porque es 1/∞”, apuntando cierta emergencia, implica de nuevo un intento de eludir la operación en cuestión mediante una representación simbólica.



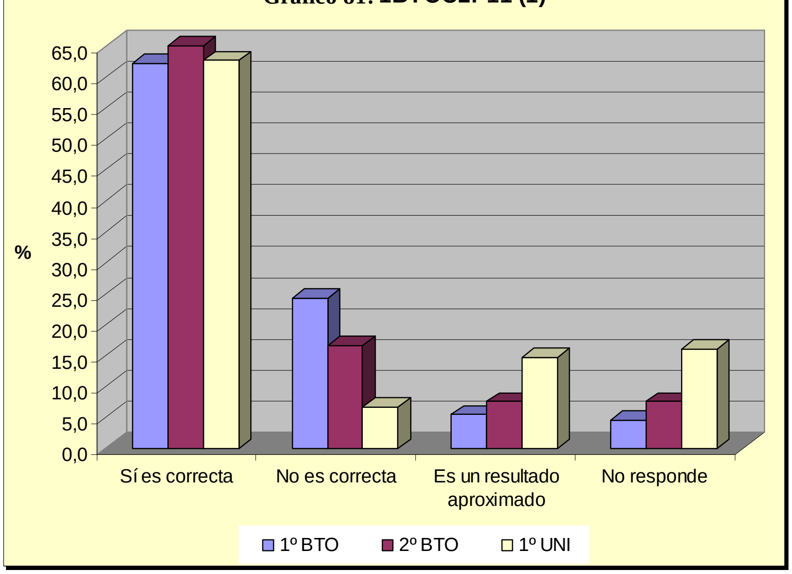
Por último, el patrón de evolución de la serie que afirma la existencia del origen nos ofrece un crecimiento pronunciado en los tres primeros niveles para llegar a una clara estabilidad a partir de 1BTO, véase gráfico 80. En el ítem ya mencionado sobre el intervalo (2, 3) dicha estabilidad se daba prácticamente en todos los niveles en unos porcentajes próximos a los que manejamos ahora. Es decir, la representación del problema en el caso actual presenta dificultades para los niveles inferiores debido a lo inusual de la sucesión propuesta, que crece y decrece simultáneamente, y al uso de fracciones cuyo denominador tiende a infinito lo que supone un discontinuidad en el aprendizaje progresivo de (3+4) ESO. Todo el parecido con el caso (2, 3) referente a la respuesta afirmativa finaliza aquí. La referencia a una cota inferior, la respuesta "0", presenta ahora todas las características de un elemento emergente, que supera el 15% en 1UNI y que nos ofrece la vertiente actual de infinito. Otras razones que se aportan son "infinito" y "1/∞" que en realidad son una reescritura del extremo del dominio dado, $\mathbb{N}$, con patrones evolución creciente-decreciente y, finalmente, la serie "se acerca a 0" que ya la hemos encontrado también entre los argumentos de la respuesta negativa dotándole por lo tanto de un sentido ambivalente que pone de manifiesto el carácter contradictorio con la respuesta que intenta justificar: por una parte se afirma la existencia del mínimo, "sí tiene origen", y por otro se niega, "se acerca a 0". De cualquier manera, la suma de las dos últimas series sí que nos ofrece un comportamiento creciente a la hora de aceptar la división entre infinito tanto en un sentido actual como potencial.



3BTOC2P11	*BTO + UNI*
¿Es correcta la expresión $\infty + 5 = \infty$? Si lo es, ¿significaría esto que en un hotel gigantesco con infinitas habitaciones, todas ocupadas, se podrían alojar cinco personas más? Explica tu respuesta	

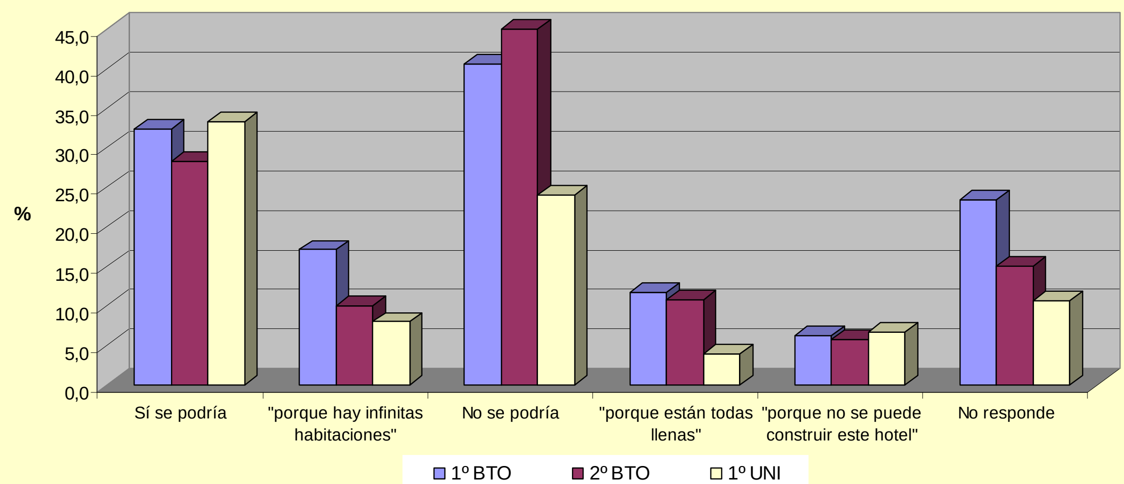
1BTOC2P11. Este enunciado es un primer intento de recoger las intuiciones de los estudiantes sobre dicha aritmética en su sentido más elemental y próximo a sus experiencias habituales en el aprendizaje de las matemáticas. Es interesante conocer si a partir de ellas los sujetos extrapolan las propiedades de los campos numéricos conocidos o bien introducen otras inducidos por sus modelos intuitivos. En primer lugar podemos observar en el gráfico 81 que el patrón de evolución de la primera serie, la respuesta afirmativa a la primera pregunta, presenta valores bastante elevados de aceptación y un elevado grado de estabilidad en torno al 60% coherente con el modelo *infinito = infinito* y ya en estos niveles bajo la influencia de la instrucción académica. El argumento más frecuente ha sido "porque sumes lo que sumes da infinito". El infinito, desde el punto de vista numérico, se entiende, por una parte, como un "contenedor" inagotable. Pero, por otra parte, hallamos un elemento emergente en la respuesta "es un resultado aproximado" que no está incluida en la categoría anterior y que nos aporta algunos indicios de otro argumento que en aquella no aparece explícito pero que quizás sí se halla latente. La extensión de operaciones de aproximación tales como "un millón más cinco es más o menos un millón" pueden hallarse probablemente tras esta posición poniendo de manifiesto la transición de actitudes finitistas a infinitistas; denominaremos a dicha extensión *modelo intuitivo de aproximación* y lo distinguiremos del modelo *infinito = infinito* cuyo sentido, como ya hemos visto a lo largo de este capítulo, hemos de buscarlo en otro tipo de argumentos. En cuanto a la respuesta negativa se pone en evidencia su evolución hacia un estado residual, siendo su justificación más frecuente "porque no se puede sumar 5 a un número que no está determinado" que responde al modelo de *indefinición*. Es importante destacar el elevado porcentaje de estudiantes universitarios que no responde a esta pregunta; posiblemente si observamos que dicho valor disminuye en la segunda pregunta, debemos suponer que consideran obvia la respuesta a la primera pregunta y que se considera respondida en esa segunda parte. No obstante, es preciso destacar, junto con la considerable variación de porcentajes, la inversión en los patrones de evolución de esta categoría, en particular para el nivel 1BTO donde la segunda cuestión parece representar un obstáculo mayor que para el resto de niveles.

Gráfico 81: 1BTOC2P11 (1)



En cuanto a la segunda cuestión de este ítem, lo primero que nos llama la atención es la disminución, casi en un 50%, de la respuesta afirmativa, aun conservando aproximadamente su grado de estabilidad; en este caso, como se puede observar en el gráfico 82, la justificación más frecuente corresponde al modelo *infinito = infinito* representado en la mayor parte de las ocasiones por la expresión “porque hay infinitas habitaciones”. El cambio de contexto en el mismo enunciado permite aflorar las contradicciones más profundas, si bien buena parte de los sujetos las resuelven bajo el imperativo finitista que impone la realidad física: “están todas llenas” o bien “no se puede construir tal hotel”; de hecho los valores del patrón de evolución de la respuesta negativa experimentan un incremento considerable en todos los niveles. La capacidad de abstracción necesaria para convertir la aplicación en una extensión de la primera pregunta cede ante la contradicción y este hecho merecería una serie reflexión sobre sus fundamentos sicológicos. Que el infinito sea invariante bajo la adición o sustracción de un número finito, e incluso infinito, es el núcleo del problema y su característica más contraintuitiva. Esta situación también se refleja en el patrón de evolución de preguntas sin respuesta, muy elevado en los niveles inferiores y algo más bajo en 1UNI; y, por último, también se dejar ver en los porcentajes de sujetos que mantienen que es correcta la expresión inicial aunque no sea posible albergar a cinco personas más en el hotel, entre el 15 y 30 %, aproximadamente; como vemos son muy diferentes, lo que le confiere un grado de estabilidad muy bajo al patrón de evolución de la categoría “no se podría”. De nuevo conviene recordar aquí que para Falk et al. (1986) y Falk (1994) la comprensión del infinito puede analizarse en términos de conservación ya que, aunque la idea piagetiana no implique que deba añadirse o sustraerse nada, en el “mundo del infinito” la cardinalidad se conserva aunque se introduzca o se extraiga diferente número de elementos.

Gráfico 82: **1BTOC2P11 (2)**



Otro tipo de expresión-operación que se encuentra habitualmente entre las “indeterminaciones” propuestas a los estudiantes cuando se inician en la teoría y cálculo de límites es la que corresponde a 0 x ∞, que se recoge en el ítem 1UNIC3P02: ¿Crees que la expresión 0 x ∞ tiene algún significado?, ¿qué puedes decir de su resultado? Justifica tu respuesta. Los valores registrados se presentan en la tabla siguiente. Los valores de las respuestas afirmativa y negativa están equilibrados en torno al 35%, apareciendo una tercera categoría, “es una indeterminación”, claro influjo de la instrucción recibida y que también se utilizará como argumento para justificar las dos anteriores; en total, más de un 40% de los estudiantes se refiere a este concepto para una

Sí tiene significado	34,5
"Es 0"	24,1
No tiene significado	37,9
"porque es una indeterminación" (A)	27,6
"porque da 0	5,7
Es una indeterminación (B)	16,1
A + B	43,7
Lo relaciona con el concepto de límite	14,9

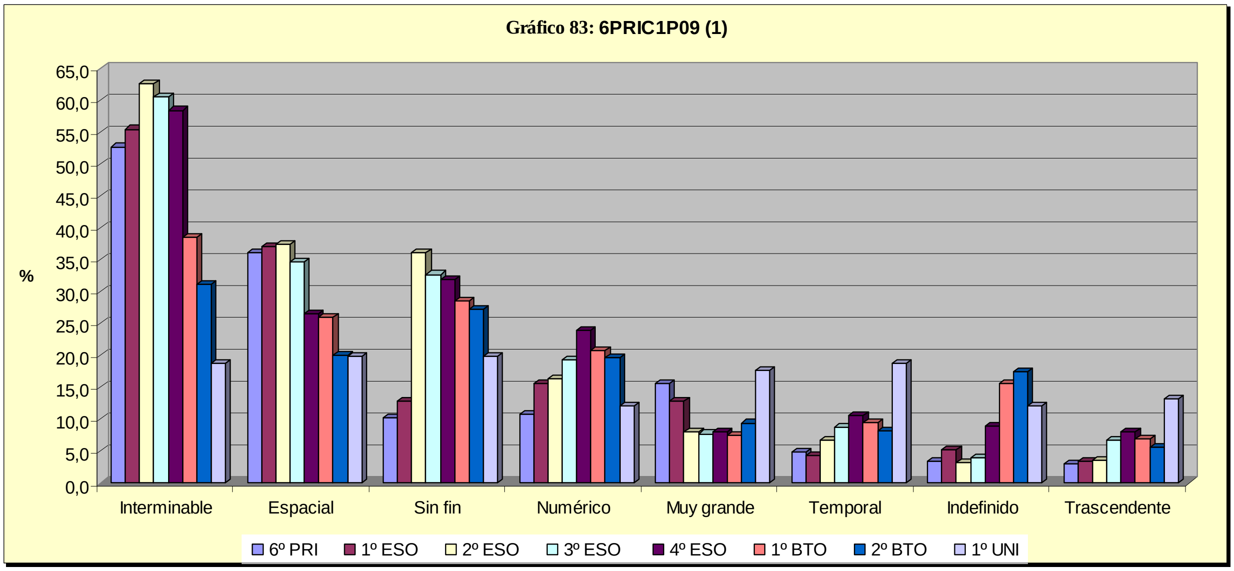
finalidad u otra. Este tipo de respuestas que se consolida como una intuición secundaria halla su base natural en el modelo de *indefinición* de infinito. La respuesta afirmativa, por su parte, se fundamenta mayoritariamente en que el resultado es "0" porque "cualquier número multiplicado por 0 da 0"; es decir, en este caso al infinito se le entiende como un objeto que asume las propiedades habituales de "cualquier número". En cambio, la negativa se basa en el hecho de que tal operación supone una indeterminación ya que "depende del tamaño de 0 y de ∞"; ahora al infinito se le dota de una naturaleza variable. En este sentido, un 15% de los estudiantes relaciona su respuesta con el concepto de límite: "se puede entender como un número tan pequeño que se aproxima a cero multiplicado por otro enorme". Y, por último, también se halla presente el elemento contradictorio, "como resultado aislado no termino de encontrarle sentido; quizás si viniera de un límite existen técnicas para atacarlo; pero si tuviera que elegir un resultado diría que es 0 ya que el cero es el elemento nulo del producto ante todo"; "es una expresión bastante complicada de analizar, ya que cualquier número multiplicado por cero es cero y cualquier número multiplicado por infinito es infinito; según mi punto de vista, lo más lógico sería que el resultado fuese 0, ya que la multiplicación no deja de ser una suma sucesiva del mismo número y si sumamos infinitas veces nada seguiremos teniendo nada". Así, pues, la expresión 0 x ∞ descontextualizada, fuera del cálculo de límites frecuente en el currículo, da lugar a esta diversidad de argumentos que permiten hallar los modelos de referencia.

5.6. LENGUAJE E INFINITO.

6PRIC1P09	*Todos los niveles*
Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puedes realizar un dibujo sobre el infinito [sólo PRI + ESO]	

6PRIC1P09. En la mayoría de los trabajos de investigación se introduce algún ítem sobre el significado que tiene este concepto para cada sujeto: Duval (1983), Penalva (1996), Mura y Maurice (1997), Jirotkova y Littler (2003), Singer y Voyca (2003), Sbaragli (2004), Kim et al. (2005), D'Amore et al. (2006), etc. Es conveniente la presencia de este tipo de cuestiones pues permite situar el concepto fuera del ámbito matemático y nos proporciona respuestas con ideas, equivalencias y vínculos interdisciplinares que ayudan a configurar el mapa intuitivo asociado al mismo. Así mismo, el carácter abierto de este tipo de cuestiones nos ofrece la posibilidad de profundizar en aspectos lingüísticos y analizar la función que se le atribuye al término "infinito" que, como ya se ha tratado con anterioridad (Moreno y Waldegg, 1991), nos aporta una valiosa información sobre el aspecto actual o potencial del mismo.

En el gráfico 83 se recoge la distribución de términos o expresiones aportadas por todos los sujetos. Puesto que podían escribir más de uno, la respuesta de un mismo estudiante puede aparecer en más de una de las series establecidas. Las categorías más recurrente son aquellas que reflejan un *sentido literal* de la palabra en cuestión: *interminable* y *sin fin;* esto supondrá, entre otras consecuencias, que un número con infinitos decimales pase a ser considerado “infinito”. A continuación hallamos expresiones con un *sentido físico* o material del concepto que se refleja en las referencias espaciales que se han encontrado y asociado con la experiencia cotidiana más cercana. Dentro de este campo conceptual se hallarían las *referencias temporales* pero, dada la mayor sofisticación de este parámetro, tales referencias presentan porcentajes inferiores. Hallamos, en tercer lugar, alusiones a un *sentido numérico* ligado necesariamente a la experiencia con las matemáticas elementales tales como contar, numerar, calcular, etc. La categoría “muy



grande” contempla componentes propias del mundo físico, probablemente asociadas a algunas de sus magnitudes, tales como *inmenso*, *grande*, *gigante*, etc. y también relativas a un sentido numérico, tales como millones, miles, etc. pero todas ellas pretenden cuantificar, aunque de manera no precisa, la idea de infinito. El *sentido indefinido* presenta valores significativos a partir de 4ESO, sin duda asociado a la terminología que se comienza a introducir en la enseñanza de las matemáticas a partir de ese nivel. Este sentido desprovee al infinito de información y le convierte en una herramienta completamente vacía o al menos opaca y, por lo tanto, inútil desde el punto de vista matemático. Por último, la asociación del infinito con ideas de cierta trascendencia espiritual le confiere una perspectiva actual.

En la tabla siguiente se recogen las diferentes acepciones asociadas a cada uno de los términos incluidos en el gráfico 83, así como la interpretación de las mismas desde la dicotomía potencial/actual. Como podemos observar, en términos generales y no sólo matemáticos, es preponderante la perspectiva potencial de infinito e íntimamente relacionada con ella su carácter

Interminable, inacabable, inagotable	Presenta connotaciones de proceso (infinito potencial)
Espacial: inalcanzable, inconmensurable, lejos, largo, etc.	Inalcanzable (infinito potencial); lejos, largo, etc. (infinito actual)
Sin fin, sin final	No acotado (infinito potencial)
Numérico: incontable, innumerable, incalculable	Carácter indefinido, imposibilidad de tratamiento matemático
Muy grande: inmenso, millones, gigante, etc.	Como objeto (infinito actual)
Temporal: eterno, perpetuo, etc.	Como objeto (infinito actual)
Indefinido, indeterminado	Carácter indefinido, ausencia de información
Trascendente: Dios, el más allá, sobrenatural, el alma, etc.	Como objeto (infinito actual)

indefinido. El punto de vista actual, en cambio, supone la mezcla de elementos con características muy dispares, si bien compartiendo cierto carácter absoluto todos ellos; entre ellos cabe destacar la categoría “muy grande” que representa una transición desde planteamientos finitistas a infinitistas.

Por otra parte, las imágenes más recurrentes con las que representan la idea de infinito los estudiantes de educación primaria y secundaria han sido por este orden:

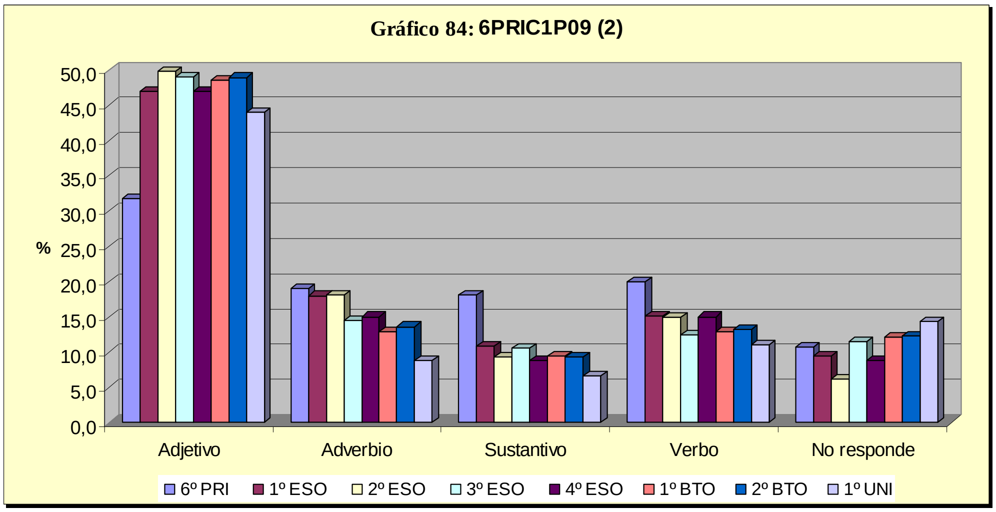
- Una línea indefinida, hasta el borde del papel o con puntos suspensivos
- Círculos o cuadrados concéntricos
- Espirales
- Cuerpos celestes: estrellas, planetas, cometas, etc.

A medida que el lenguaje se hace más dominante en matemáticas, su función descriptiva se tornando en prescriptiva respecto de las propiedades que debe tener un objeto para ser miembro de una categoría particular. Para Tall (2006) considerar la diferencia entre verbo y sustantivo es de gran ayuda; pensamos en un *verbo* en el sentido de proceso, de “haciéndose”, mientras que un sustantivo se refiere a una cosa, como “siendo”. Hemos visto también que el análisis lingüístico de número como adjetivo tiene propiedades sutiles que no se aplican a otros adjetivos; entendemos el número como una gestalt total y decimos “hay cuatro” y mediante sucesivos actos de comprensión se pasa del proceso de contar al concepto de número. De manera análoga, el término infinito juega un papel similar si bien su grado de asimilación no presenta tal inmediatez. Podemos ahora redistribuir las respuestas anteriores en otros tipos de categorías que nos hablan sobre el carácter de infinito entendido desde el punto de vista de la función lingüística que tienen los términos utilizados:

Adverbio	Muy, bastante, mucho, lejos, nunca, jamás, siempre
Adjetivo	Interminable, -able, indefinido, grande, imposible, máximo, largo, inmenso, eterno, demasiado, sucesivo
Sustantivo	Espacio, Universo, estrellas, galaxia, el cielo, infinidad, (sin, no tiene) fin
Verbo	(no se puede) Medir, (nunca, no) acabar, (no se puede) contar, (no) llegar, continuar, seguir

La observación de los patrones de evolución en el gráfico 84 pone de manifiesto que el uso del adjetivo en relación con el infinito es muy superior al resto de categorías. Esto supone una consideración del infinito como propiedad de un objeto, un conjunto, etc.; salvo en 1PRI, el resto de los niveles presenta un elevado grado de estabilidad entre el 45% y el 50% aproximadamente, lo que supone una importante consolidación de dicha perspectiva.

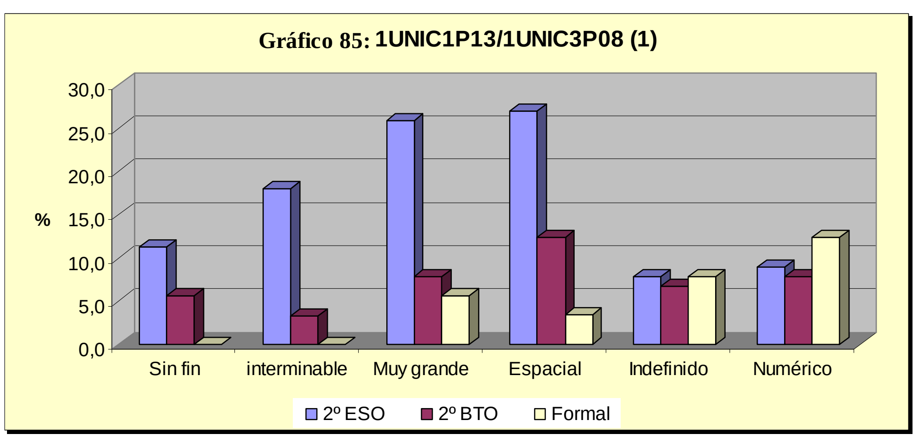
Como ya hemos visto en el capítulo 1, el infinito aparece en el trabajo de Aristóteles como una categoría filosófica pero no como un “objeto matemático” sino bajo su carácter potencial. Así, no considera el carácter actual del infinito de la sucesión de los números naturales; para ello será preciso que se desarrolle previamente el concepto de conjunto. Recordemos que para los griegos, según Moreno y Waldegg (1991), la utilización del término infinito como *sustantivo* está relacionada con aspectos mitológicos, teológicos o metafísicos; por su parte, su uso como *adjetivo* pretende atribuir características absolutas a entes tales como el Universo, el Ser, el espacio o el tiempo; por último, el *adverbio* de modo se emplea para cualificar acciones mentales tales como extender, subdividir, continuar, añadir, aproximar, etc. en relación con lo que denominamos infinito potencial en su sentido secuencial que es el único sentido que se reconoce en la matemáticas griegas. Las matemáticas del siglo pasado, por el contrario, acentúan el papel atributivo de infinito y para ello fue necesario crear objetos, tales como los conjuntos, de los que pudiésemos decir que eran infinitos. Esta perspectiva da lugar a ciertas incoherencias entre los resultados del gráfico 83 y los del gráfico 84. En efecto, se aprecia en este último que el adjetivo se utiliza con más frecuencia mientras que los términos que se equiparan con infinito en el gráfico 83 se corresponden con en su mayor parte con un significado potencial del mismo. Por lo tanto, fuera del contexto matemático como se ha planteado en este ítem, los sujetos tienden a emplear el adjetivo para caracterizar entes absolutos sin referencias, prácticamente, a los conjuntos numéricos.



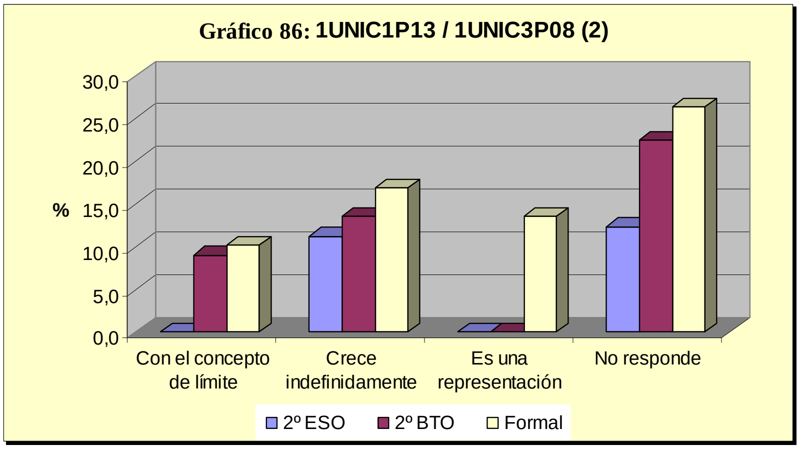
1UNIC1P13/1UNIC3P08. Con el fin de precisar la terminología relacionada con el infinito en el nivel universitario se ha complementado el ítem anterior con los dos siguientes planteados a grupos diferentes de alumnos:

¿Cómo introducirías el concepto de infinito a un estudiante de 2º de ESO? ¿Y a uno de 2º de Bachillerato? Intenta escribir una definición, lo más rigurosa posible, de infinito.

Los resultados se representan en los gráficos 85 y 86 respectivamente. La primera cuestión, 1UNIC1P13, es más rica en imágenes propias del esquema conceptual que en aspectos relacionados con la definición formal; así podemos observar en el gráfico 85 que los mayores porcentajes son para términos o expresiones más básicos característicos de las intuiciones primarias; en cambio, en el gráfico 86 los intentos de una descripción más formal van asociados a intuiciones secundarias resultado del proceso de instrucción. Destaca el hecho de que los valores más elevados de preguntas sin respuesta corresponden a aquellas donde se solicita mayor precisión a la hora de definir el infinito. Por último, también conviene observar que casi un 15% de los sujetos no entiende el infinito como



un objeto ni siquiera como un proceso, sino como una *representación*: "es algo abstracto, una idea que aplicamos por incapacidad o interés", "es la expresión de algo que no se puede comprender matemáticamente", "es un símbolo que determina que un determinado concepto matemático no tiene una longitud finita", "es una representación mental para poder resolver cuestiones tales como k/0", etc. También Boero et al. (2003) recogen en su trabajo la emergencia de un problema de existencia de infinito como un asunto de relevancia para los estudiantes (véase capítulo 3).



Duval (1983) incluye en su cuestionario la pregunta: *¿Qué significa para ti "infinito"? ¿Hay cosas que sean "infinitas" para ti?* Jirotkova y Littler (2003) dan los resultados de analizar las definiciones escritas del concepto de infinito por estudiantes y profesores y los clasifican en tres niveles. El criterio de clasificación en el segundo nivel fue el uso gramatical de infinito y expresiones indirectas del infinito: nombre, adjetivo o adverbio. Penalva (1996) incluye en su cuestionario preguntas tales como *explica si te resulta conocida la palabra infinito*, *¿por qué decimos que* $\mathbb{N}$ *es infinito?*, *di palabras asociadas a infinito*, *describe con tus propias palabras lo que entiendes por infinito*, *¿conoces ejemplos de conjuntos infinitos?, ¿cuáles?, trata de dar una posible definición de conjunto infinito*, etc. De los resultados establecidos por la autora queremos destacar que los sujetos asocian al significado de conjunto infinito la idea de magnitud "infinitamente grande", que los conjuntos infinitos son "ilimitados" y los sitúan tanto en el campo de las matemáticas como en el de la realidad física y, por último, también se aplica a los conjuntos infinitos un carácter de indeterminación.

Turégano (1996) incluye en su cuestionario, para alumnos de 14 a 15 años, los ítems: *¿Qué es el infinito?* y *Da uno o varios ejemplos de "algo" infinito*. La autora indica que la característica común de las respuestas con las que los estudiantes definen el infinito es que éstas se encuentran expresadas mediante una negación: "lo que no tiene fin", "lo que no se puede contar" y "lo que no se alcanza". En el análisis cuantitativo, entre definiciones y ejemplos, establece tres categorías que engloban las formas más comúnmente empleadas por los estudiantes para referirse al infinito, véase la tabla siguiente. Según esta autora, la característica dominante en el esquema conceptual del infinito corresponde a la del infinito potencial; el infinito actual se acepta en mucha menor

Lo que no tiene fin (76,4%)	Domina la dinámica de un proceso potencialmente infinito; se pone de manifiesto, sobre todo, en los procesos reiterativos como la numeración, la rotación de la tierra, etc.
Indeterminado (15,7%)	Bajo esta expresión subyacen respuestas que aluden al infinito actual en el sentido de que se admite la existencia de conjuntos con una infinidad de elementos a los que es imposible asociarle un número. Estos estudiantes manifiestan una concepción estática del infinito que va asociada al cardinal de conjuntos tales como las estrellas del Universo, los granos de arena, etc.
Inconcebible (3,6%)	Refleja la idea de "limitación humana" ante categorías superiores. Estas respuestas hacen referencia al infinito metafísico o teológico más que al matemático y se asocia, generalmente, con la infinitud del Universo.

medida y siempre como algo que supone una cierta indeterminación. Un mismo estudiante da respuestas de dos o de las tres categorías, lo que nos indica que las tres forman parte de un mismo esquema conceptual. No se recoge ningún ejemplo asociado a lo “infinitamente pequeño” por lo que la autora deduce que la intuición del infinito está ligada a las cosas infinitamente grandes.

Waldegg (1987) establece estas mismas categorías con estudiantes universitarios, lo que hace pensar que las intuiciones del infinito pueden permanecer inalteradas a pesar del proceso de aprendizaje.

Mura y Maurice (1997) aplicaron a estudiantes de primer curso, futuros profesores de educación infantil, primaria y secundaria de matemáticas, un cuestionario con los seis enunciados siguientes: *(1) el infinito es un número muy grande, (2) el infinito es un número más grande que todos los demás números, (3) el infinito representa el conjunto de todos los números, (4) el infinito es un número indeterminado, (5) el infinito no es un número y (6) el infinito es una variable*. Para cada uno de los enunciados se debía declarar si se estaba o no de acuerdo y explicar la respuesta. A estos se añadió la pregunta *¿qué significa el infinito para ti?,* véase capítulo 3.

Singer y Voica (2003) intentan identificar las intuiciones primarias y secundarias en torno a la idea de infinito con estudiantes de 10-11 años a 18-19, así como estudiantes universitarios que serán futuros profesores. Plantean la pregunta abierta: *describe la idea de infinito con tus propias palabras*. Los autores clasifican las respuestas en las cinco categorías siguientes:

Enfatizan una dimensión temporal	“Infinito es algo que nunca para; continúa y continúa siempre”
Enfatizan una dimensión espacial rítmica	“Infinito es cuando algo no termina y sigue y sigue y nunca acaba”
Enfatizan afectos y espiritualidad	“Infinito es algo de lo que no podemos comprender su secreto; nuestra mente es limitada y no podemos decir muchas cosas; es una palabra que no tiene fin en los números, el amor, etc. pero no todo es ilimitado…”
Enfatizan el carácter de proceso	“Infinito es el término que utilizamos para algo que no para; continúa subiendo”
Enfatizan el carácter incontable	“Infinito es como todos los sonidos del mundo, que no se pueden contar”

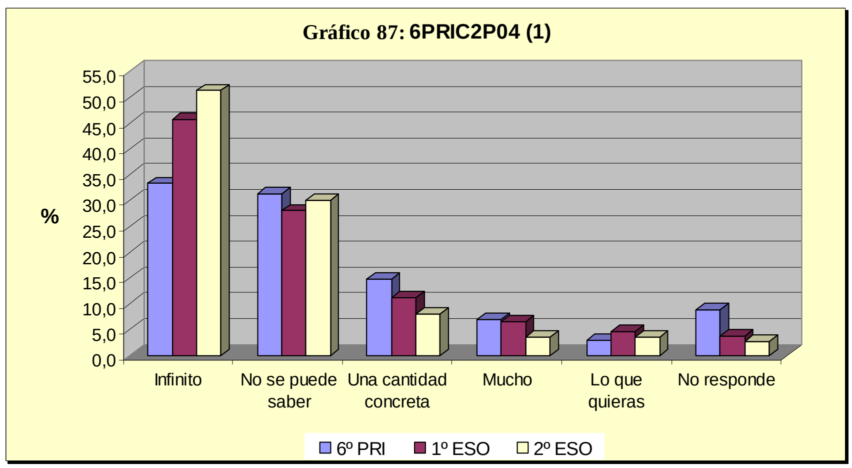
Sbaragli (2004) en el contexto de su investigación sobre las creencias de profesores de educación primaria en torno al concepto de infinito incluye en el cuestionario aplicado los siguientes ítems en la línea de los aquí tratados: *¿Qué piensas que significa el infinito matemático?, ¿Has hablado del infinito durante los cinco años de enseñanza en la escuela primaria?* y *¿existe el término “infinito” en matemáticas tanto como adjetivo como sustantivo?* El 43,8 % de los sujetos tienden a considerar infinito como *indefinido* en el sentido de no saber cuánto es, qué es exactamente o qué representa; el 18,8% afirma que el infinito no es sino un *número muy grande* de valor desconocido y el 31,3% confunde infinito con *ilimitado*, aplicándolo a una línea recta, una semirrecta o bien un plano. Sólo el 6,3% se refiere al infinito como un *proceso* que no termina. Con la tercera cuestión la autora pretende descubrir si los profesores son conscientes de que el infinito representa un objeto matemático. Para el 81,3 % “infinito” en matemáticas es sólo un *adjetivo*; el resto considera que es un sustantivo.

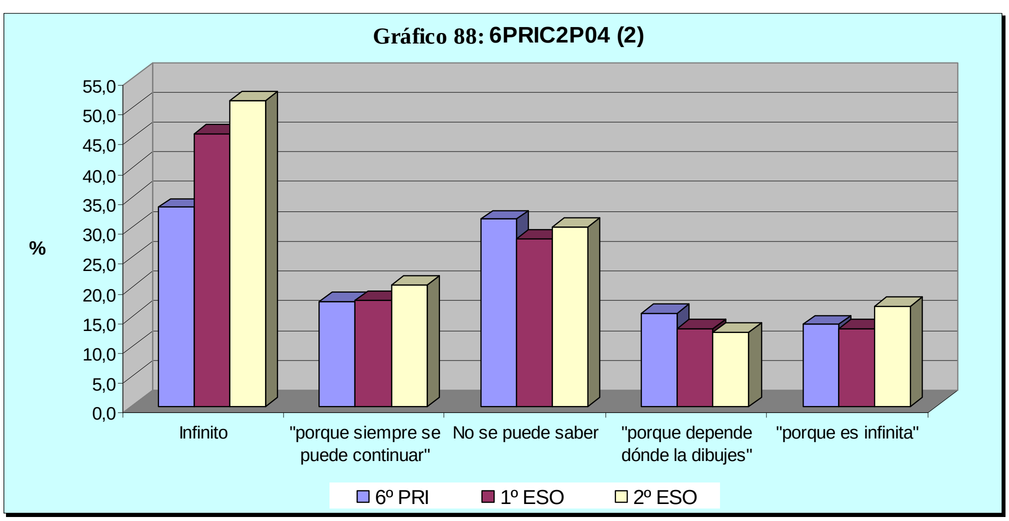
Kim et al. (2005) realiza una investigación bajo el *enfoque comunicativo para la cognición* en el que entre otras cuestiones se pide a los estudiantes que creen frases con la palabra “infinito” como adjetivo y como sustantivo así como que respondan a la cuestión *¿qué es el infinito?.*

6PRIC2P04. En este ítem, incluido en los cuestionarios de PRI y (1+2) ESO, se pretende apreciar cuál es la capacidad de abstracción a partir de una situación real, así como los términos en que se expresa dicha abstracción, a través de la pregunta:

¿Cuánto mediría la línea más larga que se pueda dibujar? Explica tu respuesta

La expresión "que se pueda dibujar" del enunciado introduce connotaciones finitistas o, al menos, induce a tener en cuenta las limitaciones físicas que habitualmente implican actitudes finitistas. Aún así, como se puede observar en el gráfico 87, entre el 30 y el 50% aproximadamente reconocen la infinitud, bajo un patrón de evolución creciente, si bien no todos en el mismo sentido, como veremos a continuación. En efecto, gráfico 88, en la línea de lo que ya hemos encontrado en ítems anteriores, una parte de los sujetos, alrededor del 15%, considera la infinitud de la longitud de la línea como un proceso inacabado e inacabable que impide efectuar cálculo o estimación algunos y que representa la perspectiva potencial del infinito. La categoría "una cantidad concreta" representa diferentes estimaciones de los estudiantes, desde unos centímetros, hasta el tamaño del universo pasando por el tamaño del folio; su patrón de evolución tiende hacia el de un elemento residual. Por su parte, la serie "no se puede saber" ofrece un grado de estabilidad elevado en su patrón de evolución, entre el 25 y el 30%, que pone de manifiesto la presencia del modelo intuitivo de *indefinición* de infinito, al menos en una buena parte como nos indica la serie "porque es infinita". En cuanto a las series "mucho" y "lo que quieras", aún representando a sujetos finitistas, suponen una transición hacia actitudes infinitistas.

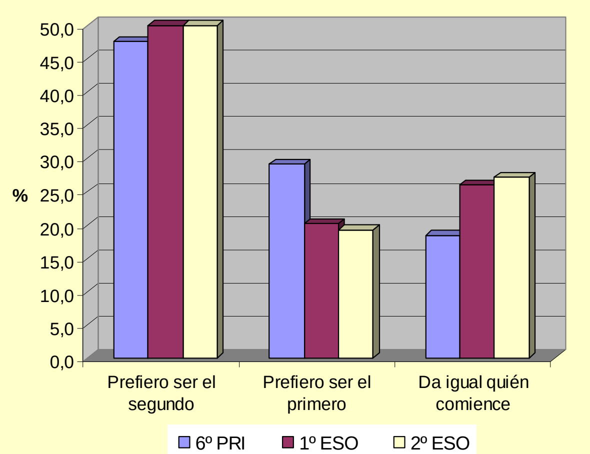




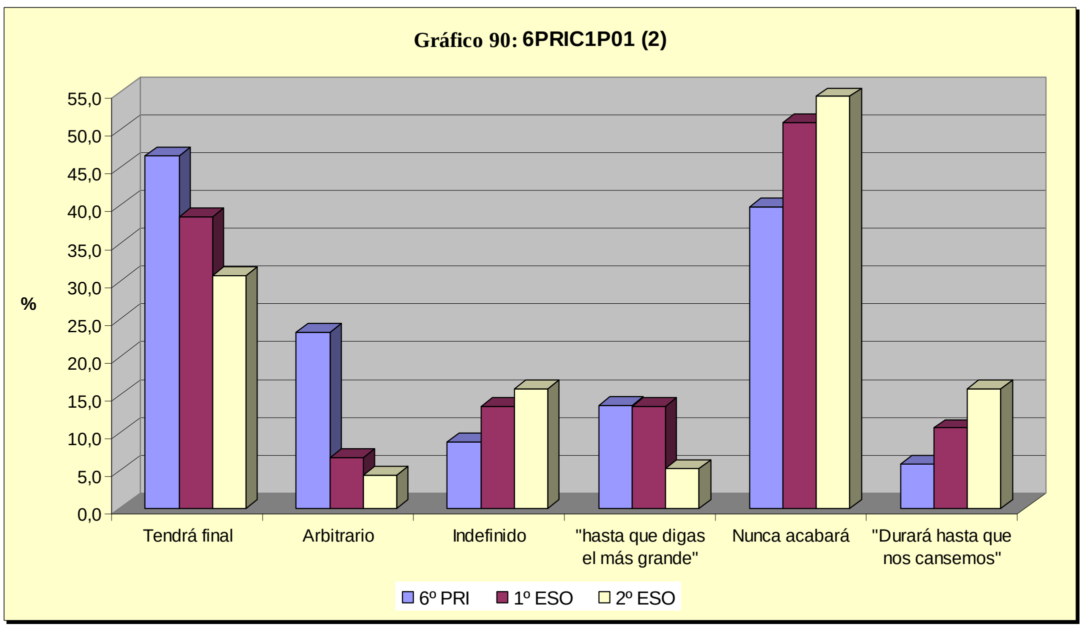
6PRIC1P01	*PRI + (1+2) ESO*
Imagina el siguiente juego entre dos personas. Cada una, dice cuando es su turno, un número. Gana aquél que diga el número más grande. *a)* ¿Preferirías ser tú el que comenzase el juego?, ¿Por qué? *b)* ¿Cuánto durará el juego?, ¿Por qué?	

6PRIC1P01. En el capítulo 3 se han recogido las reflexiones de algunos autores sobre la importancia que los estudiantes de los niveles inferiores conceden al nombre de un número para aceptar su existencia, así como el papel que desempeña la expresión "el número más grande" en el desarrollo del concepto de infinito. El objetivo de este ítem es, precisamente, el de profundizar estos aspectos y presenta ciertas semejanzas con 6PRIC2P01 cuyos resultados se analizaron en el apartado 5.3. En primer lugar, se puede apreciar que el aspecto dinámico de los conjuntos numéricos también se pone de manifiesto en este ítem ya que, como se puede ver en el gráfico 89, prácticamente el 50% de todos los niveles evaluados prefiere "ser el segundo" con la pretensión de "ir ganando siempre", bajo un patrón de evolución muy estable; tras esta actitud hallamos de nuevo la postura finitista de que "en algún momento habrá que parar" y, si es así, mejor ser uno el que finalice el juego; no obstante, entre un 10 y un 20% aproximadamente de estos sujetos reconocerán en la segunda pregunta que el proceso no acaba nunca, evidenciando las profundas contradicciones que conlleva este concepto. La opción "prefiero ser el primero" alude, en su mayor parte, a la posibilidad de decir "el número más grande" y así ganar el juego; esto nos muestra de nuevo una visión finitista, en este caso primaria, de la situación planteada. Por otra parte, entre 1/5 y 1/4 de los alumnos, con cierta tendencia al crecimiento en su patrón de evolución, aprecia la intrascendencia de la decisión, "da igual quién comience", manifestando su posición infinitista potencial que el contexto de este ítem favorece claramente. En efecto, este contexto favorece la inclusión de una variable temporal que nos sirve para discriminar desde otra vertiente al alumno finitista del infinitista. Por otra parte, respecto al ítem 6PRIC2P01, podemos ver que se invierte la relación de porcentajes entre "ser el primero" y "ser el segundo"; mientras que en aquel caso predominaba la primera opción ahora ocurre al contrario. Esto supone que hay una mayor proporción de alumnos que dotan de "existencia" al "número más pequeño" frente a los que consideran imaginable "el más grande".

Gráfico 89: 6PRIC1P01 (1)

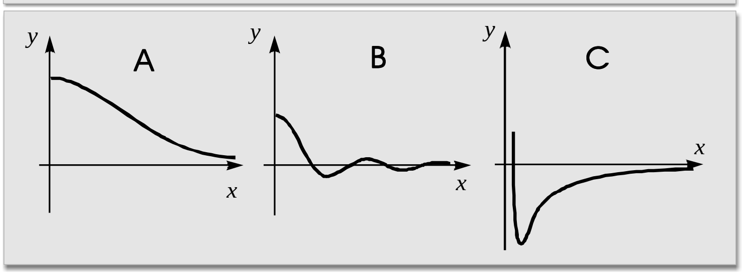


En el gráfico 90 se observa fácilmente cómo se invierte la actitud frente a la duración de esta experiencia en función de la edad e, incluso, cómo algunos de aquellos que aceptan su infinitud se enfrentan a las limitaciones finitas de la realidad física: "durará hasta que nos cansemos"; También aquí podemos apreciar cierta analogía con el ítem 6PRIC2P01, en particular en el perfil de los patrones de evolución correspondientes a "el juego acaba" y "el juego no acaba" aunque no así en los valores porcentuales. En cuanto a la naturaleza del "final", en ambas cuestiones, se pone de manifiesto la fragilidad de las respuestas en la apreciable variación de los porcentajes en cada una de las categorías como ya hemos indicado más arriba. Por último, aún podemos recoger algunos ejemplos de las imágenes relacionadas con la denominación de los números y su importancia a la hora de obtener “el mayor”: “hasta que alguno no sepa decir un número más grande que el que se ha dicho antes”, “hasta que uno sepa un número más grande que el otro”, “hasta que llegue al más grande, porque después del número más grande no existe ninguno”, etc. Todo esto sentará las bases para una actitud finitista que se prolongará, como hemos visto a lo largo de este capítulo, durante varios años y que no siempre se convertirá en un elemento residual; incluso la denominación finitista del “número más grande” se perpetuará mediante el símbolo “∞” en muchos de los casos. Falk (1994) destaca la importancia que algunos sujetos atribuyen al hecho de saber el *nombre* de los números como si el concepto existiese gracias a su nombre: “no conozco un número mayor que un millón, no se cómo podrías llamarlo… no conocemos el número más grande; hay un cierto número pero su nombre es desconocido, nadie lo sabe”, “no puedes terminar nunca el juego, siempre puedes sumar más y más números e inventar nombres para ellos, tantos como tu desees”.



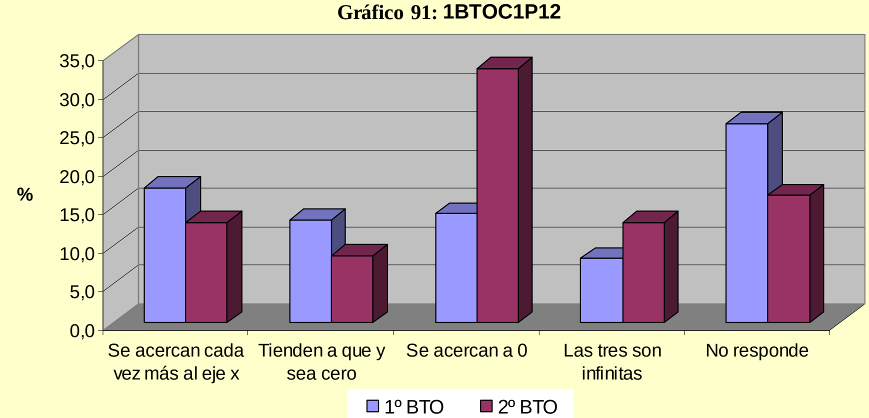
En relación con esta cuestión, Gardiner (1985) mantiene que el mismo proceso de contar, *uno, dos, tres, cuatro, cinco,...*, cuando un niño aprende a “cantar” los números no es aún un proceso potencialmente infinito ya que no existe una manera *automática* de generar nuevas palabras para los números cuando se necesitan para nombrar números grandes tales como decenas, centenas, millares, millones, etc. Sólo la introducción de nuestro sistema de numeración, 0, 1, 2, 3, 4,..., 9, 10, 11,..., 19, 20, 21,..., 99, 100, 101,..., pone de manifiesto por primera vez la apariencia indefinida de dicha sucesión. Evans y Gelman (1982) entrevistaron a niños sobre el “número más grande” y establecieron varios estadios de desarrollo en la comprensión del infinito, desde “finito y pequeño”, pasando por “finito y grande”, hasta “infinito” (citado por Falk et al. (1986)). Como ya se ha mencionado en el capítulo 3, para Falk et al. (1986) la comprensión de la idea de que los naturales no están acotados debería se expresada no sólo recitando la máxima “no existe el número más grande” sino también mediante la habilidad para nombrar un número más grande que cualquier otro que se pueda sugerir. En dicho capítulo se recoge con cierto detalle las experiencias llevadas a cabo por estos autores; las respuestas que aportan se hallan en la línea de las de este trabajo y se concluye en dicho estudio que, grosso modo, a partir de los 8 años, la mayoría de los sujetos verbalizan adecuadamente la idea de que es mejor ser el segundo ya que de esta manera siempre se puede decir un número mayor que el de tu oponente y que este juego no acabará nunca ya que cualquier número por grande que sea siempre puede superarse; estas conclusiones coinciden cualitativamente con los resultados del gráfico 90. Por último, recogemos la aportación de Pehkonen y Hannula (2006) que plantean a una amplia muestra de estudiantes desde 11 a 14 años y a estudiantes universitarios, las siguientes cuestiones: escribe el número más grande que existe. ¿Cómo sabes que es el más grande? y ¿Cuántos números hay entre 0.8 y 1.1? Tras el análisis de sus resultados obtienen, entre otras conclusiones, que el infinito de los números naturales se comprende antes que la densidad de los números racionales y que el infinito potencial se comprende antes que el infinito actual en todos los niveles, si bien a medida que los estudiantes son mayores, el infinito potencial se hace menos frecuente y parece como si fuese un estado intermedio, frente a una actitud finitista, que conduce a la comprensión del infinito actual.

1BTOC1P12	***BTO***
Explica qué les ocurre a las siguientes gráficas para valores muy grandes de x ¿Tienen algo en común sus comportamientos para tales valores?	

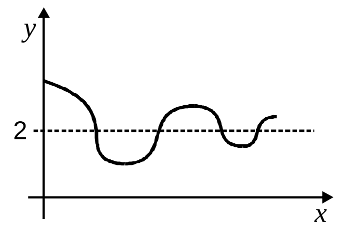


1BTOC1P12. En niveles superiores se ha utilizado este ítem, bajo un contexto analítico y completamente académico, con el fin de registrar las expresiones que aportan los estudiantes para describir los comportamientos representados en las gráficas indicadas; al mismo tiempo esta cuestión nos puede servir como elemento de control respecto de aquellos ítems en los que han tratado tendencias, especialmente los relacionados con la divisibilidad indefinida. Las tres primeras series recogen esa actitud del infinito potencial. Sumadas suponen entre un 45,0%, en 1BTO, y un 54,8% en 2BTO. Esto nos indica que el grado de asimilación de la terminología habitual en el aula no es bajo. Podemos observar que las dos primeras tienen una evolución inversa a la tercera que es la que presenta el menor grado de precisión.

Gráfico 91: 1BTOC1P12



Garbín (2005) plantea a estudiantes universitarios la cuestión:



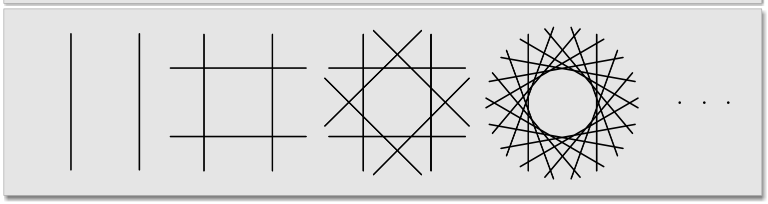
La siguiente figura representa la gráfica de una función. Describe lo que pasa con la función para valores muy grandes de x. ¿Podrías determinar el valor de la función cuando x se hace extremadamente grande? Explica tu respuesta con detalle.

El 64,0 % de los sujetos de este estudio afirma que la función tiende, se acerca o se aproxima a un cierto valor, mientras que en nuestro caso oscila entre el 45% y el 55%; en particular, el 32,6 % indica que ese valor es 2. El 20,2% mantiene que el valor de la función es 2, si bien la mayoría de ellos tras afirmar que f(x) = 2 expresan que la función tiende a 2. Por último, el 5,6 % afirma que la función es infinita o bien que no se puede determinar.

5.7. INDUCCIÓN E INFINITO.

Con el fin de estudiar la relación entre ambos conceptos, muy poco frecuente en la literatura sobre la noción de infinito, se han diseñado algunos ítems para los cuestionarios de los niveles superiores. Como se verá a continuación, la dificultad que entraña la aplicación de razonamientos inductivos puede conducir a resultados contradictorios, paradójicos o simplemente erróneos en los que las referencias explícitas al infinito son inhabituales. No obstante, si se puede detectar en todos los casos la presencia del modelo de *inagotabilidad* que permite a un cierto número de sujetos pensar en la compleción del proceso infinito propuesto.

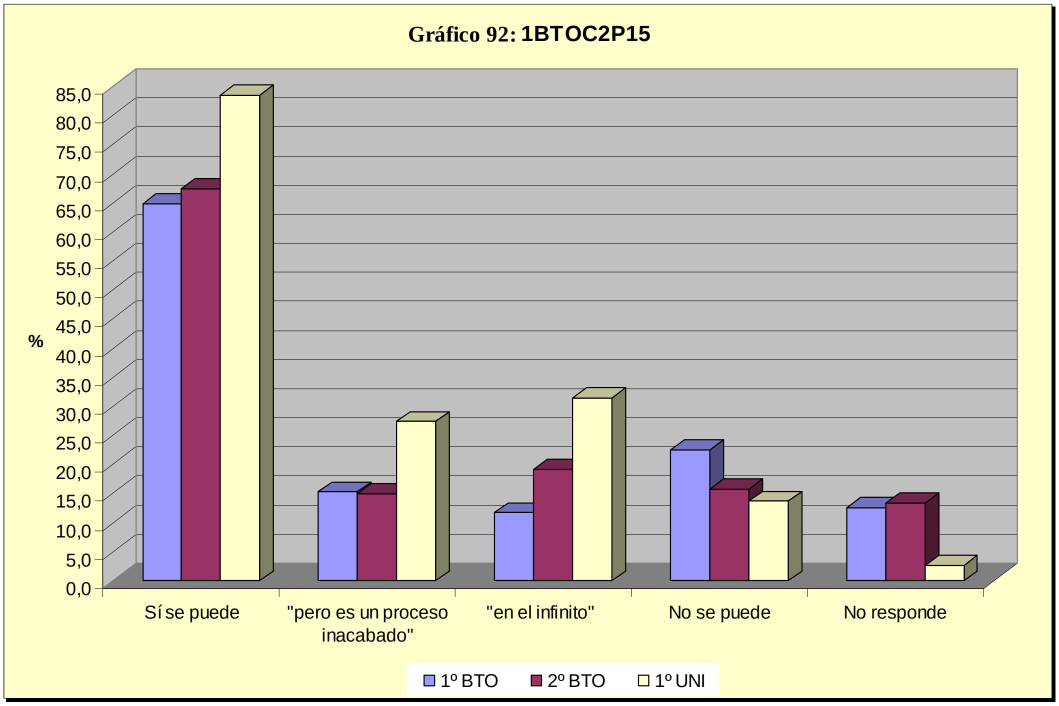
1BTOC2P15	***BTO + UNI***
Si observas el proceso siguiente parece que rotando sucesivamente un par de rectas paralelas se puede obtener un círculo ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.	



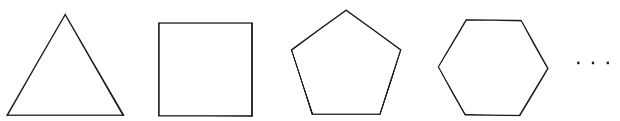
1BTOC2P15. Una medida más sobre la difusa frontera entre las actitudes finitista e infinitista la encontramos en los resultados aportados por este ítem donde el objetivo es observar con qué confianza se acepta que una "cota superior", la circunferencia, es o no alcanzable mediante un proceso de inducción. Los resultados no dejan duda, de nuevo, sobre la profunda contradicción que supone tener que razonar sobre el infinito. La respuesta afirmativa se fundamenta principalmente en dos argumentos; uno potencial, "sí se puede pero nunca se llega", y otro actual, "sí se puede pero en el infinito". Así pues, en ambos casos nos encontramos con que ha funcionado el modelo de *inagotabilidad* que se refleja en la expresión "sí se puede", si bien un cierto número de los sujetos añade un "pero" que delata una inseguridad y fragilidad evidentes. Bien es cierto que a un número importante de respuestas afirmativas no les acompaña justificación alguna pero dada la semejanza de los patrones de evolución podríamos extrapolar a una mayoría de alumnos los dos argumentos mencionados. Por su parte, la categoría "no se puede" presenta un patrón de evolución decreciente pero con un cierto grado de estabilidad[29].

---

29. Gardiner (1985) asocia a la configuración C_n: polígono regular de n lados inscrito en un círculo unidad la sucesión numérica $p_n = n$, siendo n el número de lados. Para Gardiner es natural que C_n tenga un "límite visual" C, el propio círculo unidad, pero por el contrario, no hay un candidato para el límite p de p_n.



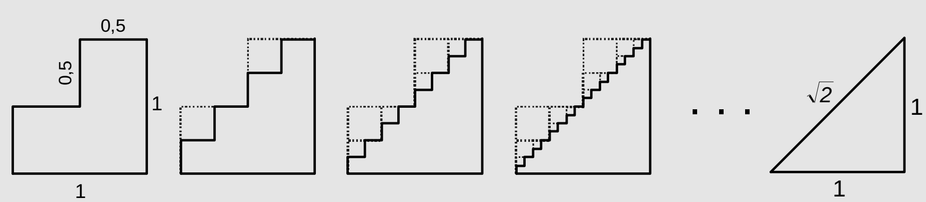
Turégano (1996) presenta la serie de polígonos



y plantea las siguientes cuestiones: ¿Tiene fin este proceso? ¿Podrías dibujar la "última figura"?. Explica tu respuesta; entre los resultados se registran respuestas del tipo "no habría última figura", "sería un polígono de infinitos lados", "no se puede dibujar porque sería un círculo idealizado", etc. también halladas en nuestro estudio, pero no muy numerosas.

1UNIC3P07. En este ítem se propone una aparente contradicción que provocaría la aplicación del modelo de *inagotabilidad* [30]. Pero, lo que ocurre en realidad, a raíz de los resultados recogidos en

1UNIC3P07	***UNI***
Observa el proceso siguiente en el que la longitud de la escalera siempre mide 2. Esta podría ser una forma de "aproximarnos" a la hipotenusa del triángulo rectángulo equilátero de cateto 1; pero en tal caso surge una aparente contradicción: $\sqrt{2}=2$. Intenta explicar dicha contradicción.	



30. Orton (1980) en el contexto de un trabajo sobre el concepto de límite plantea en una entrevista las siguientes cuestiones: (1) Si el procedimiento de la figura se repite indefinidamente, ¿cuál es el resultado final?; (2) ¿Cuántos peldaños extra deben situarse antes de alcanzar el "resultado final"? y (3) ¿Cuál es el área de la forma final en términos del lado *a* del cuadrado, es decir el área bajo la "escalera final"?

la tabla siguiente, es que el modelo de *aproximación* viene a resolver dicha contradicción: la estructura invariante de la geometría del problema queda superada por una perspectiva potencial de infinito; sólo un 13,7% es capaz de apreciar tal invariancia. La interpretación de la mayor parte de los sujetos que responden ya no es tanto "si se puede o no" alcanzar el objeto final, en este caso la hipotenusa, en el sentido del ítem anterior, sino que "nos podemos aproximar" hacia él, cometiendo los errores pertinentes, casi siempre despreciables, dado el carácter infinito del proceso. No obstante, el elevado número de estudiantes que no responde este ítem pone de manifiesto las dificultades intrínsecas de esta cuestión debido a las contradicciones internas entre modelos intuitivos o simplemente a la ausencia de los mismos para resolver esta situación. Por último, hemos de destacar la imagen particular que del mecanismo de inducción habita en el esquema conceptual colectivo; se trata de una extensión natural y exhaustiva de un procedimiento indefinido que se identifica implícitamente con la enumeración de $\mathbb{N}$.

No hay contradicción, se trata de una aproximación	41,1
"Se trata de un proceso infinito"	16,4
"Siempre se comete un error"	9,6
Nunca serán iguales porque se trata de una línea quebrada	13,7
No responde	30,1

1UNIC2P13. Una presentación más ortodoxa del método de inducción es la que se ofrece en el enunciado de este ítem. La variación con respecto a los ítems anteriores es crucial; ahora no se trata de probar la existencia de un objeto final o hallar un límite sino que se debe probar una determinada propiedad numérica. En este caso los resultados se han agrupado en las categorías indicadas en la tabla siguiente con los porcentajes correspondientes. Encontramos que casi un 60% de los sujetos no considera adecuado el método propuesto en el enunciado; ahora bien, dentro de esta disconformidad podemos hallar diferentes tipos de argumentos, tanto infinitistas, "como no es posible hacerlo con todos los números ya que son infinitos, no estaría convencido nunca, supongo que habría que hacer muchísimos casos más", etc. como formales, "pondría como hipótesis que vale para *n* números naturales y lo comprobaría para *n* + 1". Uno de cada cuatro estudiantes propone la inducción como alternativa no siempre aplicada con rigor. A veces el argumento para justificar la respuesta negativa también se utiliza para la afirmativa, como ya hemos visto en otras ocasiones: "sí es adecuado ya que no podríamos demostrarlo para todos los números". En consecuencia, bajo este contexto numérico, la instrucción recibida ha creado ya cierta predisposición a no aceptar cualquier generalización si

1UNIC2P13	***UNI***

Alguien ha encontrado que $1^3 = 1^2$, $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$ y a partir de estos tres ejemplos afirma que los números naturales cumplen esta curiosa propiedad:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots)^2$$

¿Te parece adecuado este método de generalización a partir de tres casos?, ¿qué harías tú para estar convencido de que esa propiedad se cumple siempre?

No es adecuado este método	58,4
"habría que probar con muchos o infinitos números"	15,6
"habría que aplicar el método de inducción"	26,0
Sí es adecuado este método	13,0
Enuncia correctamente el método de inducción	6,5
No responde	24,7

bien no siempre se utilizan los recursos necesarios y aún se recurre a modelos infinitistas en un porcentaje no despreciable.

5.8. REFERENCIAS DIDÁCTICAS.

Consideraremos a continuación los datos obtenidos de los cuestionarios que han rellenado los profesores que imparten sus clases en los grupos de estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato, a los que se han aplicado las pruebas analizadas en los apartados anteriores. Esta información nos será de utilidad para interpretar una parte del comportamiento del alumnado así como aislar algunos de los obstáculos didácticos registrados en el capítulo siguiente.

En primer lugar podemos observar que, en el primer ciclo de Educación Secundaria, la mayor parte de las referencias se centran en la infinitud de los conjuntos numéricos conocidos hasta ese momento, “les escribo los naturales como {1, 2, 3,…, ∞}”, “les pregunto cuántos números hay”, “les hablo del conjunto de los números enteros como algo infinito pero no lo simbolizo”, etc.; este hecho, aún induciendo a los estudiantes a una visión actual de infinito, supondrá la consolidación del modelo *infinito = infinito* ya que en estos primeros cursos se destaca el cardinal infinito de estos conjuntos discretos pero posteriormente no se comparará con el de los números reales, dejando a la intuición la decisión sobre la relación entre ambos. También aparece con frecuencia la mención a los números decimales, en particular los periódicos, su densidad, el caso de π como ejemplo de irracional, la relación entre fracciones y decimales, etc., “les indico que entre dos enteros siempre hay números decimales con infinitas cifras decimales”; estas imágenes potenciarán, por su parte, la perspectiva potencial de infinito. Por último, cabe destacar las relaciones que se establecen entre la recta numérica y el concepto de infinito, ya que este hecho contribuye a la fijación, sino al establecimiento, de algunas de las imágenes e intuiciones ya analizadas con anterioridad: “se trata de un concepto intuitivo de algo que está muy lejano en la recta”, “en la recta numérica no hay límites ni a la izquierda ni a la derecha”, “represento los números naturales sobre la recta numérica”, etc.

El profesor/a se refiere a infinito cuando habla sobre…	**1º ESO n = 21**	**2º ESO n = 14**
o Los conjuntos numéricos (ℕ, ℤ, múltiplos, primos, las fracciones, etc.)	86 %	71 %
o La división y los números decimales (periódicos, valor de π, etc.)	38 %	43 %
o La recta numérica	38 %	43 %
o La densidad de los números decimales	5 %	7 %
o No se refieren a ello en ningún momento	10 %	7 %

En cuanto al segundo ciclo de Educanción Secundaria y a Bachillerato, podemos apreciar en la tabla siguiente la reducción de las referencias a conjuntos, decimales o recta numérica; por el contrario, en estos niveles la atención se centra en la noción de sucesión y una idea preliminar de límite, en 3ESO y 4ESO, “se comentan casos de progresiones geométricas cuya tendencia al seguir escribiendo términos es 0 ó ∞”, “entre dos números racionales siempre podemos encontrar otro número y este procedimiento se repite infinitamente”, “estudiamos la función k/*x*”, “les indico que a/0 no es una fracción”, “damos sentido a los intervalos (a, +∞) ó (-∞, b)”, “pongo ejemplos para que vean qué pasa cuando se divide un número por una sucesión que tiende a cero”, “sumamos los infinitos términos de una sucesión geométrica”, etc.; y, en 1BTO y 2BTO, sobre el concepto de límite de una función y su interpretación gráfica que incluye el estudio de discontinuidades infinitas y comportamientos asintóticos: “se hace referencia muchas veces a que el denominador no puede ser cero”, “utilizo con frecuencia la idea de tendencia al hablar sobre límites”, “hablamos sobre la cantidad de números que hay en cualquier intervalo de la recta real”, “analizamos las ramas infinitas de las gráficas”, “hablo sobre operaciones con infinito”, “resolvemos sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones e interpretamos su sentido gráfico”, etc. Todas estas alusiones, relacionadas con procesos indefinidos, contribuyen definitivamente a afianzar la imagen potencial de infinito en el ECN como un elemento propio del mismo. El resto de menciones, sobre conjuntos, intervalos de la recta real, soluciones de un sistema de ecuaciones, etc., permitirá que un porcentaje significativo de sujetos, aunque minoritario, incorpore también a su esquema conceptual un punto de vista actual de infinito, si bien lo hará sin los elementos de comparación de conjuntos suficientes para discriminar entre diferentes “tamaños” de infinito.

El profesor/a se refiere a infinito cuando habla sobre… (%)	**3º ESO n = 15**	**4º ESO n = 14**	**1º BTO n = 13**	**2º BTO n = 15**
o Conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)	27	43	31	33
o Números decimales (periódicos, irracionales, etc.)	33	21	8	0
o La recta numérica e intervalos	27	36	31	0
o Densidad de $\mathbb{Q}$	20	29	23	7
o Sucesiones, suma de infinitos términos, noción y cálculo de límites	53	36	92	93
o División entre 0	13	21	15	7
o Soluciones de un sistema de ecuaciones	27	21	23	33
o Discontinuidad y asíntotas de funciones	0	14	54	53

5.9. RESUMEN.

Podría pensarse, como hacen Fischbein et al. (1979), que las respuestas de los estudiantes respecto del infinito y los procesos vinculados al mismo presentan un elevado grado de aleatoriedad; sin embargo, los resultados en determinados casos donde los porcentajes de respuestas infinitistas superan el 60% o el 70% nos obligan a admitir la existencia de una idea intuitiva de infinito. A lo largo de este capítulo se ha tratado de determinar cuáles son los modelos intuitivos que operan cuando un sujeto se enfrenta a cuestiones cuya respuesta implica necesariamente el uso o la manipulación del concepto de infinito. Algunos de estos modelos aparecen reconocidos en la literatura correspondiente mientras que otros que no quedan claramente definidos en las referencias consultadas se introducen en el presente trabajo; se trata de los modelos de *indefinición*, de *divergencia* y de *aproximación*. Todos estos modelos no son sino recursos que alberga el esquema conceptual asociado que sirven para solventar la deficiencia o ausencia de elementos formales. Podemos enumerar todos estos modelos detectados y analizados en las páginas anteriores donde han sido definidos:

- Modelo intuitivo de *indefinición*
- Modelo intuitivo *infinito = infinito*
- Modelo intuitivo *acotado-finito/no acotado-infinito*
- Modelo intuitivo de *inagotabilidad*
- Modelo intuitivo *punto-marca*
- Modelo intuitivo de *inclusión*
- Modelo intuitivo de *divergencia*
- Modelo intuitivo de *aproximación*

Estos modelos entran en conflicto con frecuencia bajo determinadas representaciones de ciertos contextos provocando contradicciones internas que se manifiestan mediante respuestas incoherentes. Tal carácter contradictorio se debe no sólo, como apunta Fischbein, al dualismo finitista/infinitista sino también al enfrentamiento entre modelos diferentes dentro de cada una de dichas actitudes. Así mismo, hemos podido constatar, tanto en los cuestionarios escritos como en las entrevistas, la acusada fragilidad de muchas de las respuestas así como la fuerte sensibilidad de las mismas frente a aspectos contextuales. Y, en lo que respecta a la identificación de concepciones propias de la evolución histórica del concepto podemos decir que, en efecto, también se hallan entre los modelos anteriores tales como el modelo *infinito = infinito*, el modelo *punto-marca* y el modelo de *inclusión* pero, de acuerdo con Penalva (2001), es posible reconocer nuevos elementos característicos de este concepto asociados exclusivamente al proceso de aprendizaje como se puede observar en la relación anterior y que se tratarán con más detalle en el capítulo 6.

Tras introducir los conceptos de *patrón de evolución nivelar* y *grado de estabilidad* del mismo se han establecido los patrones de evolución de las respuestas registradas a lo largo de los diferentes niveles educativos analizados con el fin de averiguar la implantación de los modelos anteriores en cada uno de los niveles, así como la influencia de diferentes contextos y representaciones sobre ellos. En primer lugar, es posible apreciar en este análisis que existen, en numerosos casos, diferentes niveles de estabilidad dentro de un mismo patrón de evolución; es decir, ocurre que a lo largo de dos o más niveles no se advierten variaciones significativas de un determinado modelo o categoría de respuesta y tras ello se produce un salto notable en el perfil de dicho patrón. Esto coincide con las conclusiones obtenidas por otros autores como Fischbein o Monaghan sobre la práctica invariabilidad de actitudes finitistas e infinitistas durante amplios periodos del proceso educativo. El fuerte arraigo de la naturaleza sincrética de los modelos intuitivos y su autoevidencia se extiende a todos los periodos piagetianos, tanto preoperacionales como operacionales, garantizando su perdurabilidad. Y, en segundo lugar, cabe destacar la existencia de *elementos emergentes* y *elementos residuales* que nos aportan una valiosa información sobre los momentos del proceso de conocimiento en los que se implantan nuevas imágenes del esquema conceptual o en los que van desapareciendo otras que desempeñaron su papel durante años, adaptándose todos ellos a la realidad del contexto educativo.

Capítulo 6

ELEMENTOS PARA UN ESQUEMA CONCEPTUAL DEL INFINITO

Nuestras mentes son finitas, pero incluso en estas circunstancias de finitud estamos rodeados de posibilidades que son infinitas; el propósito de la vida es comprender en la medida de lo posible esta infinitud.

A. N. Whitehead

El objetivo del este capítulo es el de establecer un esquema conceptual *colectivo* de la noción que nos ocupa para cada uno de los niveles educativos considerados, a partir de diferentes tipos de elementos constitutivos. Para ello consideraremos una estructura compartimentada que recoja a la vez el proceso evolutivo de su conocimiento, los vínculos entre diferentes imágenes de dicho esquema y las singularidades que lo distinguen de otros conceptos matemáticos con presencia en todos y cada uno de los estadios de madurez definidos. A lo largo del capítulo anterior se han establecido, mediante el análisis cuantitativo de los resultados, aquellos elementos que constituirán el núcleo fundamental de un esquema conceptual de infinito; se trata de los *elementos propios* de dicha estructura cuya presencia se sustenta en frecuencias significativas. No obstante, la riqueza característica de un esquema conceptual quedaría incompleta si no se recogiesen también las numerosas perspectivas y peculiaridades que nos ofrecen las respuestas tanto escritas como orales de los sujetos de la investigación, independientemente de sus valores porcentuales. Por lo tanto, el esquema conceptual de los diferentes niveles educativos examinados estará constituido por imágenes cuyas expresiones representativas irán desde los términos más elementales hasta las definiciones más sofisticadas registrados en el desarrollo del presente trabajo. Así, lo que nos encontraremos a continuación será un compendio de respuestas de las que se destacará su categoría y su relevancia dentro de la edad correspondiente y en relación con el resto de niveles. La amplia gama de expresiones seleccionadas para cada uno de los tipos de elementos del esquema conceptual nos permitirá obtener un mapa bastante bien definido de imágenes metafóricas, simbólicas y pre-formales, finitistas e infinitistas, obstaculizadoras y contradictorias, todas ellas relacionadas con infinito, habitantes singulares de la mente de nuestros estudiantes. Por último, los aspectos contextuales, como ya se ha podido observar en el capítulo 5, constituirán un ingrediente fundamental para un concepto que es el primero, en el aprendizaje de las matemáticas, que se introduce sin un objeto asociado al ámbito cotidiano como ocurre con el concepto de número vinculado al de colección o el de polígono al de forma; en este sentido, podremos apreciar en las páginas siguientes cómo una terminología ajena a la matemática invade su espacio con frecuencia pretendiendo acotar la idea de infinito.

6.1. COMPONENTES DEL ESQUEMA CONCEPTUAL NIVELAR.

Ya se han definido en el capítulo 5 las nociones de esquema conceptual nivelar y elemento del esquema conceptual; así mismo, se han introducido los tipos de elementos básicos con el fin de facilitar la descripción de los patrones de evolución hallados. A continuación desglosaremos estos elementos en componentes más específicas. En la figura 1 se representan las cinco componentes en que consideramos vertebrada dicha estructura. Cuatro de ellas corresponden a estadios evolutivos, tienen carácter troncal y recogen las variaciones temporales o madurez del concepto, mientras que las otras dos son transversales, es decir se podrá constatar su presencia en cualquiera de las cuatro anteriores. Las componentes evolutivas se denominarán elementos *metafóricos*, *simbólicos*, *pre-formales* y *formales*, mientras que las componentes transversales, o *elementos característicos*, recibirán el nombre de elementos *finitistas e infinitistas*, y elementos *obstáculo*. En lo que resta de este apartado analizaremos detalladamente cada uno de los elementos anteriores.

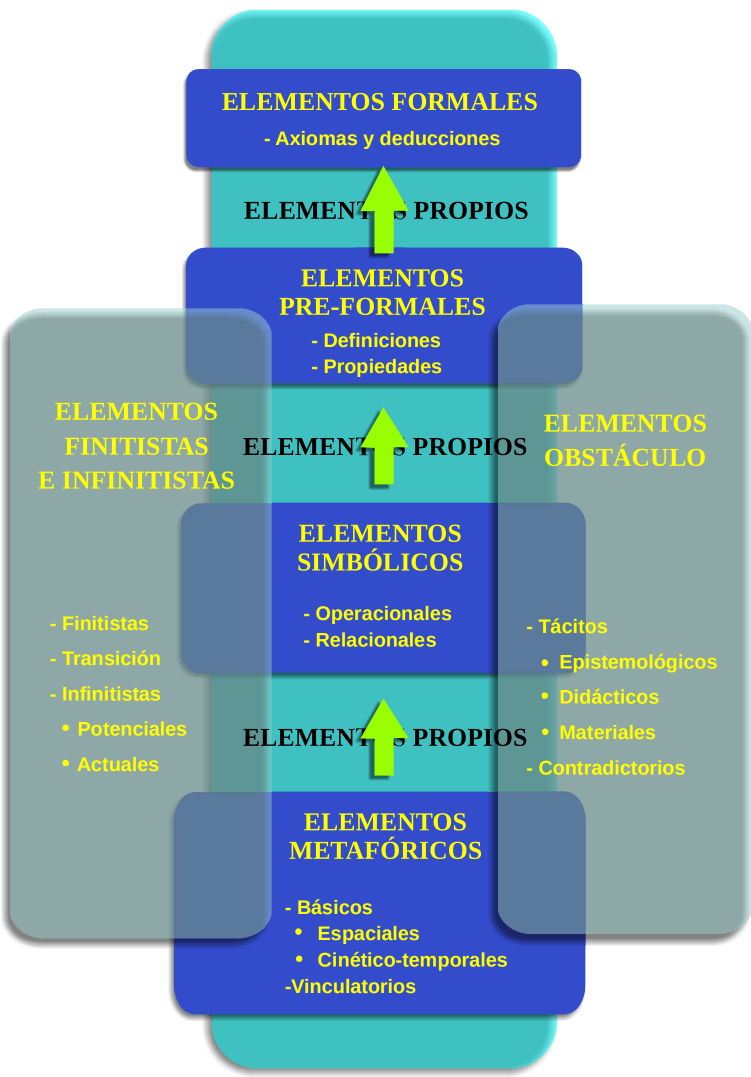


Fig. 1: Elementos del Esquema Conceptual Nivelar

Junto al esquema conceptual pleno de imágenes de diversa naturaleza, la definición conceptual genera su propio esquema conceptual que incorporaremos al esquema conceptual global o nivelar[1]. De las ideas de Vinner (1983) recogidas en el capítulo 2, centraremos nuestra atención en las figuras 5 y 6 de dicho capítulo *respuesta y pensamiento intuitivos*. En esencia, la tesis de Vinner sobre el proceso psicológico del desarrollo de los conceptos consiste en que un estudiante medio de enseñanza secundaria no considera la definición matemática como el criterio último para juzgar si cualquier cosa es o no un ejemplo específico de una noción dada, sino más bien como un "andamiaje" que sirve para construir una estructura mental y que inmediatamente se rechaza como inútil. A continuación, los ejemplos de la noción son reconocidos o construidos intuitivamente y no analíticamente por los alumnos. Esta situación responde adecuadamente al comportamiento de un estudiante medio frente al concepto de infinito, ya que la definición del mismo no aparece en ningún momento de la educación primaria ni secundaria; sólo en determinados estudios universitarios. A diferencia de otros conceptos clásicos del currículo de matemáticas en los que alumnos, profesores y libros de texto convergen en una *definición conceptual estándar*, en este caso y en ausencia de dicha definición, el sujeto genera la suya propia, que denominaremos *definición conceptual personal* a partir del esquema conceptual que han creado sus experiencias cotidianas tanto en el aula de matemáticas como en cualquier otro ámbito de su vida. A partir de dicha definición el estudiante resolverá aquellas situaciones que considere relacionadas con el infinito; este tipo de comportamiento se recoge en la figura 5 del capítulo 2 y guarda relación con el infinito natural de Tall (2001) referido en el capítulo 3; y, como indica Vinner, cuando la definición conceptual estándar entre en conflicto con el esquema conceptual, será éste último el que gane.

6.1.1. ELEMENTOS METAFÓRICOS.

En nuestro modelo de esquema conceptual nivelar definiremos *elementos metafóricos* como aquellas expresiones lingüísticas que se sustentan en percepciones y acciones corpóreas del individuo en relación con su propio medio; buena parte de la habilidad matemática se basará en el uso de metáforas que permitan la conceptualización de ideas matemáticas abstractas en términos de una estructura inferencial de imágenes sensomotoras más concretas. La mayor parte de los elementos metafóricos, se adquieren en el periodo de corporeización y muchos de ellos perdurarán a lo largo de etapas posteriores. Los *elementos metafóricos básicos* son aquellos que favorecen la proyección desde la experiencia cotidiana a conceptos abstractos. Dentro de los elementos metafóricos básicos, distinguiremos entre aquellos que hacen referencia a aspectos *espaciales*, asociados a nociones tales como dimensión, medida, tamaño, longitud, etc., y aquellos otros que se encuentran ligados a referencias *cinético-temporales* tales como duración, evolución, movimiento, velocidad o rapidez, etc. Gardiner (1986) al mencionar algunos de los primeros encuentros que tienen los niños con los procesos infinitos en matemáticas y su influencia en la intuición de los mismos mantiene que

> La experiencia lineal del tiempo –hacerse viejo- y la repetición cíclica –días, semanas, meses, estaciones, años- contribuye a nuestra intuición de ausencia de fin y de comienzo. En efecto esta intuición es tan fuerte que es difícil concebir un principio o un final del universo.

1. Conjugaremos en lo que sigue la teoría de los tres mundos matemáticos de Tall con las idea de obstáculo cognitivo y modelo intuitivo que quedarán integradas en la estructura del esquema conceptual del infinito que construiremos, primero para cada nivel de edades establecido y, posteriormente, en el ámbito global de todos ellos. Así mismo, la terminología utilizada presentará claras referencias a los trabajos de Lakoff y Núñez, como se puede observar revisando el capítulo 2.

Para Singer y Voica (2003) los significados cotidianos de los niños sobre el infinito enfatizan, entre otras, una dimensión espacial, una temporal y otra de proceso. Tall (1992), por su parte, cita un trabajo de Sierpinska en el que entre otras categorías incluye la de aquellos estudiantes que adoptan una postura "infinitista cinética" para los que la idea de infinito está vinculada a la idea de tiempo. No obstante, Fischbein (1998) puntualiza, al analizar las paradojas de Zenón, que:

> Psicológicamente, el tiempo es uno, es continuidad. Lo que podemos dividir indefinidamente es el espacio que lo sustituye, el espacio como metáfora del tiempo [···] Todos los medios con los que el tiempo puede ser dividido, medido, estimado, sólo son realizables mediante la introducción del modelo de espacio. El modelo de espacio actúa como un sustituto tácito para interpretar, describir y medir el tiempo. La metáfora del espacio se haya profundamente inmersa en nuestro lenguaje, en nuestra lógica, no sentimos ninguna discrepancia cuando hablamos y razonamos sobre el tiempo en términos espaciales.

Por su parte, los *elementos metafóricos vinculatorios* son aquellos que establecen conexiones entre diferentes contextos matemáticos. Así, por ejemplo, la conversión de un enunciado geométrico en uno aritmético o viceversa constituirá un elemento metafórico vinculatorio.

El análisis de los elementos metafóricos permitirá la comprensión del resto de elementos que se irán consolidando a lo largo de los distintos niveles educativos. Así, por ejemplo, los elementos simbólicos o los formales se sustentarán en aquellos y sólo la instrucción adquirida en los cursos más elevados permitirá cierta liberación de las metáforas básicas iniciales. Igualmente, es muy importante tener en cuenta el origen en el aprendizaje de muchos de los elementos metafóricos considerados. No siempre es fácil distinguir entre la metáfora experiencial o la inducida en el contexto educativo desde las primeras edades. Por último, convendrá tener presente las ideas introducidas en el apartado 5.6 del capítulo anterior a la hora con el fin de complementar este tipo de elementos.

6.1.2. ELEMENTOS SIMBÓLICOS.

Tras un cierto periodo de tiempo en el que la corporeización se materializa mediante operaciones físicas con objetos reales, el centro de atención se desplaza de estas acciones sobre objetos hacia procesos compuestos de operaciones sobre dichos objetos que los transforman preservando o no las estructuras bajo las que se hayan. Para ello, como ya se ha indicado en el capítulo 2, es preciso introducir símbolos que pongan en funcionamiento dichos procesos, como contar, sumar, derivar, integrar, y pensar en los símbolos también como conceptos que podemos almacenar en nuestra mente, tales como números, sumas, derivadas, integrales. Recordemos que, esencialmente, un procepto es un símbolo matemático cuya flexibilidad permite representar bien un proceso matemático o bien el resultado de ese proceso; así, el concepto de límite es un procepto: la misma notación representa tanto el proceso de tender hacia el infinito como el valor del límite. En consecuencia, la corporeización nos aporta ideas conceptuales, mientras que los símbolos matemáticos nos permiten enumerar, medir, calcular, manipular, etc. Las acciones son encapsuladas como conceptos mediante símbolos que nos permiten cambiar sin esfuerzo de procesos para hacer matemáticas a conceptos para pensar en ellas (Tall, 2004b y 2006). Para Tall y sus colaboradores, un símbolo actúa como un pivote entre proceso y concepto; en cambio, la encapsulación conlleva una estructura mental de mayor rango que incluye imágenes visuales, propiedades, relaciones, percepciones, acciones, emociones y así sucesivamente, que ya están presentes en la mente[2]. Al familiarizarse el estudiante con un determinado proceso, éste adopta la forma de una serie de operaciones que pueden realizarse sin pensar; el estudiante ha alcanzado el pensamiento operacional respecto a este problema. En una etapa posterior, la imagen mental de este proceso cristaliza en una entidad simple, un nuevo *objeto*. Una vez alcanzado este nivel, el estudiante es capaz de pensar sobre esta noción bien dinámicamente como un proceso o bien estáticamente como un objeto. La compresión de información en simbolismo que pueda ser manipulado es lo que da a las matemáticas su auténtico poder[3].

En nuestro caso los *símbolos* corresponden a infinito y a las operaciones que lo impliquen como resultado de un algoritmo, como objeto susceptible de ser sometidos a su vez a operaciones o bien como relaciones entre conjuntos infinitos. A la vista de todo esto, en lo que sigue, denominaremos *elemento simbólico* a toda expresión utilizada para calcular y manipular objetos matemáticos así como cualquier referencia a propiedades o relaciones entre dichos objetos asociados al concepto de infinito. Distinguiremos dentro de los elementos simbólicos los denominados *operacionales* que suponen la extensión de las operaciones o relaciones aritméticas elementales al tratamiento de procesos indefinidos ya sean aritméticos o geométricos vinculados a procedimientos numéricos; así mismo, se incluirán en esta categoría las operaciones entre conjuntos infinitos y aquellas otras que contemplen el símbolo ∞ como objeto susceptible de una cierta aritmética. También consideramos, dentro de este apartado, los elementos *relacionales* que implican el establecimiento de una ordenación, una equivalencia o, en general, una comparación entre los elementos de un conjunto, una sucesión, etc. o bien entre objetos infinitos.

Siguiendo la terminología introducida por Gray y Tall, estableceremos dentro de las categorías anteriores la diferencia entre proceso y concepto; los procesos pueden comprimirse en conceptos pensables, a menudo mediante el uso de símbolos para referirse tanto a los procesos, “siempre se suma la mitad infinitas veces”, como al concepto, “es infinito porque siempre se suma algo”. Y, como ya hemos visto, un símbolo que puede utilizarse para cambiar de un proceso realizable a un concepto pensable se denomina *procepto*.

6.1.3. ELEMENTOS FORMALES.

En el pensamiento matemático avanzado las definiciones son sutilmente diferentes de las definiciones prescriptivas de las matemáticas elementales; se sitúan en el lenguaje de la teoría de conjuntos y no necesitan mantener vínculos con referencias materiales concretas. Las *propiedades* en sí constituyen el asunto en cuestión y serán el punto de partida para *deducciones* que se formularán como *teoremas*. Una vez demostrado, el enunciado del teorema se convierte en un *concepto* que puede utilizarse en la demostración de nuevos teoremas. A partir de un proceso, la

2. La palabra *procedimiento* se utiliza para indicar una secuencia específica de pasos que conducen a un determinado paso en un cierto tiempo. El término *proceso* se utiliza en un sentido más general que incluye cualquier número de procedimientos que tienen esencialmente “el mismo efecto”. Por ejemplo, el proceso de derivar la función $(1+x^2)/x^2$ puede realizarse mediante diferentes procedimientos. En (Gray y Tall, 2001) se puntualizan estas ideas.

3. Tall, a diferencia de Lakoff y Núñez, considera que la manipulación de símbolos puede conducir a actividades coherentes que pueden estar desprovistas de cualquier vínculo con la imaginación geométrica del individuo. Según Tall hay evidencias de que los símbolos pueden ser manipulados sin referencia alguna a la corporeización correspondiente como, por ejemplo, los números complejos, mientras que, en cambio, los conceptos espaciales pueden existir sin representación simbólica alguna; el mundo de la corporeización conceptual y el del simbolismo *proceptual* pueden funcionar separadamente.

demostración se comprime en un concepto utilizable para probar nuevos teoremas y extender más allá la teoría. De esta manera, llegamos a una nueva forma de compresión de la información, en una lista compacta de axiomas generativos, que ahora alcanza su nivel máximo. En este nivel los conceptos surgen debido a que les dotamos de definiciones verbales y argumentamos sobre sus propiedades utilizando la deducción formal, permitiéndonos trabajar no con objetos familiares de nuestra experiencia, sino con axiomas que son cuidadosamente formulados para definir estructuras matemáticas en términos de propiedades específicas. El lenguaje retorna a su posición central; en las matemáticas formales, “conjunto” tiene un significado técnico, se designa por un símbolo tal como *A* y puede prestarse a una prueba para ver si un elemento “pertenece” o no a él. Las matemáticas formales se aplican no sólo a un *corporeización* particular, sino a *cualquier corporeización* que satisfaga los axiomas. En realidad, la estructura formal que satisfaga los axiomas no necesita, en absoluto, tener un significado *corporeizado*.

Definimos *elemento formal* como aquel que implica necesariamente un proceso de deducción, inducción o prueba a partir de un conjunto de definiciones y postulados. En nuestro caso resulta evidente que el aspecto formal de infinito queda aún lejos de una encapsulación definitiva que permita su manipulación al margen de posibles corporeizaciones, dada la dificultad previa que supone la incorporación de la biyección como elemento propio del esquema conceptual; el establecimiento de axiomas relacionados con el infinito y de deducciones a partir de ellos corresponde a niveles superiores a los aquí considerados. En consecuencia, esta componente del esquema conceptual quedará vacía en el presente estudio y, en su lugar, estableceremos una categoría de *elementos pre-formales* que serán todos aquellos que hagan referencia a axiomas, propiedades o definiciones relacionados con el concepto de infinito y que sólo mostrará su presencia en 2BTO y 1UNI.

6.1.4. ELEMENTOS FINITISTAS E INFINITISTAS

Es Fischbein quien establece la separación de los sujetos en dos categorías fundamentales según su actitud frente al concepto de infinito: *finitistas* e *infinitistas*. Se refiere con el primer término a aquellos individuos que aún no han incorporado a su esquema conceptual el carácter infinito de ciertos procesos u objetos o bien de aquellos otros que se encuentran en un periodo de transición hacia la asimilación de dicho carácter. Por otra parte, son *infinitistas* aquellos sujetos que han comprendido la infinitud, en un sentido más o menos preciso, como una propiedad o un objeto matemáticos. Turégano (1996) introduce una tercera categoría denominada de “transición” caracterizada por las inconsistencias encontradas a la hora de responder diferentes cuestiones y Garbín (2000), por su parte, define tres líneas de coherencia en función del tipo de respuestas dadas por los sujetos: finitista, actual y potencial, así como el comportamiento incoherente que corresponde a la mezcla de respuestas de los tres tipos señalados. Recogiendo las ideas de estos autores, llamaremos *elemento finitista* a todo aquel elemento del esquema conceptual que eluda en algún sentido el carácter infinito de los procesos u objetos considerados. Por el contrario, aquel elemento que reconozca dicho carácter será denominado *elemento infinitista*. En el presente capítulo distinguiremos también entre *elemento infinitista potencial* si la idea de infinito es asociada a la de proceso, mientras que se tratará de un *elemento infinitista actual* si lo es a la de objeto. Así mismo, consideraremos como *elementos de transición finitista/infinitista* a aquellos en los que se mezclen aspectos de ambas perspectivas con incoherencias evidentes.

6.1.5. ELEMENTOS OBSTÁCULO.

A primera vista la corporeización puede contribuir a la encapsulación proceso-objeto y llevar al sujeto desde la rutina de realizar procedimientos matemáticos a un pensamiento flexible sobre las matemáticas. Pero este vínculo tiene sin embargo, según Tall (2006), su punto débil. Basar el pensamiento en una corporeización específica puede dar lugar a modelos, en cierto sentido los *met-befores* introducidos por Tall, que inhiban el pensamiento en determinadas direcciones y en diferentes contextos. Existe, por lo tanto, una fuerte tensión entre la corporeización como significado y la corporeización como obstáculo cognitivo en una situación inapropiada. Esta tensión entre diferentes corporeizaciones y sus significados puede conducir a un espectro de situaciones en las que algunos sujetos se apeguen a aspectos no esenciales de una corporeización particular y se equivoquen al dar un sentido flexible al simbolismo matemático esencial. Podemos pensar en una conexión entre la noción de *modelo* y la de *obstáculo*. Destacaremos de esta última, según lo recogido en el capítulo 2, que *un obstáculo es un conocimiento*, por lo que es preciso reformular la “dificultad” que se estudia en términos, no de la falta de conocimiento, sino de conocimiento falso, incompleto, etc. A su vez, el conocimiento obstáculo tiene un *dominio de validez y de eficacia* y, por lo tanto, también un dominio en el que es a priori pertinente pero donde se revela falso, ineficaz y fuente de errores a posteriori. Y, por último, es preciso comprobar la *resistencia* de los conocimientos obstáculo y explicarla.

Los conceptos, aunque son imágenes mentales que subyacen bajo las palabras o símbolos con los que se expresan regularidades, suelen tener elementos comunes en todos los sujetos como resultado del proceso de enseñanza y aprendizaje; pero, también pueden poseer matices individuales. Si el obstáculo es epistemológico, aparecerá en casi todos los estudiantes de manera normal y recurrente y puede presentar diferentes aspectos. En primer lugar, los obstáculos que manifiestan los alumnos al utilizar el lenguaje cotidiano como lenguaje matemático, la terminología y notación matemáticas. En segundo lugar, el obstáculo que surge al intentar crear estructuras conceptuales acordes con la estructura lógica que guía la construcción del conocimiento matemático. Y, en tercer lugar, los obstáculos que surgen al no poder relacionar un concepto con una estructura conceptual, que impide que el alumno generalice dicha noción. Esta última dificultad también se puede considerar como obstáculo ontogénico. Por otra parte, los aspectos sintácticos, semánticos y pragmáticos del lenguaje matemático, nos permiten comprender el cambio de contexto en términos de un cambio de lenguaje y de entender la generalización de un contexto también en términos de la generalización del lenguaje. Bajo este presupuesto, los obstáculos epistemológicos, en tanto que objetos matemáticos, pueden encontrarse en la sintaxis de los lenguajes matemáticos, por lo que es preciso leer el modelo de manera diferente. Artigue (1990), por su parte, mantiene que a pesar de que un análisis histórico ayude a identificar “aquellos núcleos de resistencia” en el aprendizaje no puede por sí solo ser una prueba de un determinado obstáculo en los alumnos. Incluso aunque se constate el origen histórico de un obstáculo, podemos percibir muchas veces que se ve reforzado por un obstáculo de otro origen, generalmente didáctico. Schwartzenberger, Tall y Vinner se interesan especialmente por aquellos elementos del esquema conceptual que están en contradicción bien con otros elementos de este esquema conceptual bien con la definición formal. Tall y Vinner (1981) consideran los elementos del primer género como menos peligrosos para el desarrollo de los conocimientos del estudiante porque hay una cierta probabilidad de que aparezcan simultáneamente factores contradictorios. Esto provoca un conflicto cognitivo real y la necesidad de acomodación de la estructura para restablecer el equilibrio. Por el contrario, los factores del esquema conceptual que no están en conflicto mas que con la definición formal presentan el riesgo de no provocar nunca un conflicto cognitivo e impedir seriamente el aprendizaje de la teoría formal. Los estudiantes con tales factores en su esquema conceptual pueden sentirse cómodos con sus interpretaciones de las nociones y considerar la teoría formal como no operativa e incluso inútil.

En relación con todo esto, y en lo que sigue, recogeremos con la denominación de *elementos obstáculo* todas y cada una de aquellas imágenes del esquema conceptual que aún habiendo sido satisfactorias durante un tiempo para el tratamiento de ciertos problemas dejan de serlo frente a nuevas situaciones en el proceso de aprendizaje; estas pueden venir provocadas por extensiones de conceptos antiguos o bien por la introducción de nociones desconocidas, pero en cualquiera de los casos la aplicación de un elemento obstáculo por parte del estudiante supondrá una interpretación o una conclusión erróneas o simplemente la inhabilitación para abordar la situación planteada. Dentro de los elementos obstáculo distinguiremos entre *tácitos*, aquellos que constituyen estructuras intuitivas de pensamiento a las que se somete el desarrollo de nuevos conceptos y que son identificables con los modelos analizados en el capítulo 5, y *contradictorios* en lo que se manifiesta de manera explícita o implícita la incoherencia entre diferentes tipos de elementos del esquema conceptual. Dentro de los elementos obstáculo tácitos diferenciamos tres categorías: *epistemológicos*, *didácticos* y *materiales*. Los tipos de elementos epistemológicos se han establecido a partir de los hallados en el capítulo 1 recorriendo la evolución histórica de infinito; respecto a los didácticos se han elegido como referencias los trabajos de Penalva (1996) y de Sbaragli (2004), revisados en el capítulo 3, sobre convicciones de los profesores en torno al concepto de infinito; y, finalmente, las subcategorías que se han considerado para los elementos materiales suponen una síntesis de los resultados obtenidos en diversas publicaciones y trabajos de investigación junto con los de esta propia tesis sobre la relación entre la noción de infinito y las limitaciones físicas que supone su tratamiento, es decir, representan un intento de reducir dicho tratamiento a la realidad cotidiana que, en general, gira en torno a la noción de medida en su sentido más amplio.

6.2. CONSTRUCCIÓN DE LOS ESQUEMAS CONCEPTUALES NIVELARES.

Procederemos a continuación al establecimiento del esquema conceptual nivelar, en adelante ECN, de cada uno de los niveles considerados en este estudio a partir de los tipos de elementos definidos en el apartado anterior. En primer lugar se enumerarán los *elementos propios* que resultan del análisis cuantitativo ya efectuado en el capítulo 5 y que constituirán el sustrato básico de cada ECN. Posteriormente, se presenta un catálogo de respuestas para cada uno de los tipos de elementos que pretende sintetizar de una manera global las actitudes de los estudiantes ante el infinito. No van acompañadas de sus frecuencias respectivas –el análisis estadístico se presentó en el capítulo anterior- pero son exhaustivas en el sentido de recoger la totalidad de expresiones utilizadas en las respuestas a todas las cuestiones; la mayor parte de ellas son representaciones canónicas de series de respuestas en las que puede cambiar el orden de alguno de los términos utilizados pero no su significado; sin embargo, en muchas de ellas la densa información que contienen permite utilizarlas como modelos de diferentes tipos de elementos: básicos e infinitistas, vinculatorios y pre-formales, espaciales y finitistas, etc. No se ha eliminado ninguna perspectiva, significado o uso particular de verbos, adverbios, adjetivos, etc. que hicieran referencia a cada uno de los elementos considerados. Las ideas representativas de cada postura ante el infinito se encuentran recogidas aquí y si el giro de una frase, aún haciendo uso de las mismas partículas, aportaba un nuevo matiz también se ha incluido dicha frase. Es por ello que esta recopilación permite interpretar con bastante claridad las imágenes que van poblando el esquema conceptual de infinito. Un ECN, aún teniendo un ámbito definido para una cierta edad, deber ser considerado necesariamente en relación con los ECN de otras edades con el fin de valorar y contextualizar cada uno de sus elementos representativos. El hilo conductor estará constituido por las líneas establecidas en el capítulo anterior: comparación de conjuntos, divisibilidad indefinida, sumas infinitas, operatividad e infinito y lenguaje del infinito.

La agrupación por niveles o ciclos que hemos realizado, de dos años salvo en 6PRI y 1UNI, se basa en los resultados obtenidos por Fischbein y otros autores que, como ya hemos recogido en el capítulo 3, mantienen que la evolución del concepto de infinito a lo largo de las diferentes etapas de instrucción no presenta discontinuidades reseñables.

6.2.1. SEXTO CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: 11-12 AÑOS

6.2.1.1. ELEMENTOS PROPIOS

Recordemos que los elementos propios son aquellos cuya presencia supera en cada nivel educativo el 15%, definiendo el sustrato básico del ECN.

Comparación de conjuntos. Si observamos los resultados que se refieren a conjuntos discretos, tabla 1, destaca el hecho del carácter absoluto que se le otorga a $\mathbb{N}$ frente a cualquier otro conjunto. Así se aprecia si se trata de comparar dicho conjunto con él mismo disminuido en un millón de elementos, con el conjunto de los múltiplos de tres o con cualquier conjunto de objetos materiales incluido el de los puntos en el interior de un cuadrado a los que, como ya se ha estudiado anteriormente, se les dota de dimensiones físicas. Aún así, la infinitud de los conjuntos no es considerada en estas edades como una propiedad especialmente destacable y la igualdad entre conjuntos infinitos sólo es perceptible de manera significativa si la diferencia entre conjuntos es una cantidad finita; este resultado sintoniza con el hecho de proponer una ordenación para una serie de conjuntos finitos e infinitos no siempre definidos con precisión. No obstante, es preciso observar algunas variaciones en las respuestas al cambiar el contexto y solicitar no la numerosidad de los conjuntos sino el alcance de los mismos como ocurre al comparar $\mathbb{N}$ y los múltiplos de 4; en este caso, el carácter infinito de ambos presenta un reconocimiento considerable mientras que la supremacía de los números naturales queda relegada a valores no reseñables. Es obvio que la interpretación dinámica ha influido decisivamente en las respuestas a esta situación pero, indirectamente, ha contribuido a establecer cierta equivalencia entre ambos conjuntos si bien el criterio mayormente empleado, “porque los dos llegarán a infinito”, dista de comprender la existencia de una correspondencia biyectiva.

Tabla 1	Elementos propios: comparación de conjuntos discretos	
ℕ – {1, 2, 3, …, 1.000.000}	Quedan infinitos No se sabe los que quedan Quedan muchos, millones, etc.	28% 23% 20%
ℕ *vs.* ℕ – {1, 2, 3, …, 1.000.000}	El primero contiene más El segundo contiene más Son iguales	38% 26% 24%
ℕ *vs.* {3, 6, 9, 12, …}	El primero contiene más o porque va de uno en uno El segundo contiene más	41% 21% 26%
a) Número de estrellas *b)* Número de granos de arena *c)* Números naturales *d)* Números de puntos en un cuadrado *e)* Número de células en el cuerpo	Dan una ordenación $d < e < b < a < c$ El menor es *d)* El mayor es *c)* No se pueden ordenar	52% 16% 38% 36% 18%
A = ℕ *vs.* B = {4, 8, 12, 16, 20, 24, …}	El segundo alcanza el valor más grande A y B alcanzarán un valor tan grande como queramos o porque los dos llegarán a infinito	23% 66% 22%

Por su parte, la comparación entre conjuntos continuos, tales como cuadrados, líneas o segmentos, viene marcada por las atribuciones dimensionales que se le otorgan al punto geométrico, véase tabla 2. En este caso, el punto como elemento gramatical o gráfico tiene una influencia definitiva y el modelo tácito correspondiente en un contexto matemático es, prácticamente, ineludible para la mayor parte de los individuos; en dicho contexto, la naturaleza adimensional de un punto no hace sino añadir un grado de sofisticación que le desconecta de la realidad inmediata del sujeto. Todo esto lleva a que más de la tercera parte de los estudiantes de este estudio manifieste su incapacidad para opinar sobre el cardinal del conjunto en cuestión mientras que más de la cuarta parte declara su dependencia del tamaño de punto; esta dependencia aún alcanza valores más elevados cuando se compara el conjunto en cuestión con otros conjuntos de naturaleza diferente, incluso finitos, como se puede apreciar en la tabla 1.

Tabla 2	Elementos propios: comparación de conjuntos continuos	
Puntos en un cuadrado	Hay muchos, miles, millones No se puede saber ◦ porque depende del tamaño Depende del tamaño En el de 30 cm. Hay más puntos Da una cantidad	15% 35% 22% 27% 27% 26%

Divisibilidad indefinida. Este tópico se ha abordado a lo largo de esta investigación en un contexto tanto geométrico como numérico. En el nivel que nos ocupa, y en ambos contextos, podemos ver que aproximadamente una quinta parte de los sujetos entiende que el proceso de división no finaliza, mientras que la dependencia del contexto entre aquellos otros que consideran su carácter limitado se manifiesta con porcentajes muy diferentes, entre un 25% y un 60%, según se divida un número o un segmento respectivamente. No obstante, es preciso advertir en este último caso que uno de cada cinco sujetos justifica la finalización del proceso con la desaparición del segmento, respuesta que en el caso numérico no presenta resultados significativos. Esto pone en evidencia desde edades tempranas la práctica ausencia de vínculos entre situaciones equivalentes de contextos diferentes. Por otra lado, más de la cuarta parte de los niños de esta edad entiende que "el número positivo más pequeño" existe e incluso la mayoría de ellos le asigna un valor concreto; esto supone, de nuevo, la desvinculación no sólo de contextos sino también de representaciones dentro de un mismo contexto así como el carácter contradictorio implícito en este tipo de procesos. Solamente planteamientos explícitos tales como el que presenta la sucesión 0,1, 0,01, 0,001,… permiten encontrar un acuerdo absoluto sobre su desenlace entre individuos de niveles diferentes. Por último, el caso particular de la relación entre $1,\overset{\frown}{9}$ y 2 presenta interpretaciones de divisibilidad indefinida cuando una buena parte de los sujetos considera que entre ambos números se extiende la sucesión infinita de decimales del primero de ellos[4].

Tabla 3	Elementos propios: divisibilidad indefinida	
División de un segmento por la mitad	El proceso "no acaba"	18%
	El proceso "acaba"	61%
	o Se obtiene un segmento o muchos segmentos	28%
	o Nada, desaparecerá, cero	22%
División de un número por la mitad	El proceso "no acaba"	19%
	El proceso "acaba"	25%
	o Da un número decimal	19%
Juego: decir el más pequeño	Prefiero ser el primero	44%
	o Para decir "el más pequeño"	27%
	Prefiero ser el segundo	34%
	o Para superar al contrincante	20%
	El juego no acaba	18%
	El juego acaba, tiene un final	63%
	o Indefinido	39%
¿Existe algún número entre $1,\overset{\frown}{9}$ y 2?	No existe ninguno	63%
	o Porque 2 es el siguiente	17%
	o Porque hay infinitos nueves o es periódico	20%
	Sí existe	28%

Sumas infinitas. El equilibrio entre los dos tipos de respuestas predominantes recogidos en la tabla 4 sólo es aparente ya que si observamos los resultados detenidamente encontramos que un porcentaje significativo de sujetos que consideran finita la suma mantiene que se obtendrá "una longitud muy grande", lo que representa una postura de transición entre las actitudes finitista e infinitista; en consecuencia, predomina el modelo intuitivo de divergencia. Por otra parte, si comparamos estos resultados con los obtenidos en la tabla 3 se puede apreciar que la idea de proceso inacabado coincide prácticamente en todos los casos, en torno al 20%.

Tabla 4	Elementos propios: sumas infinitas	
Sumar segmentos cada uno la mitad del anterior	Resultado infinito	44%
	o Porque siempre se suma o nunca se acaba	21%
	Resultado finito	43%
	o Una longitud tan grande que no se puede medir	15%
	o 2 metros	18%

4. Los diferentes colores utilizados en los textos de las tablas corresponden a diversas consideraciones; así, cuando van acompañado de una viñeta (v.g. tabla 3) se refieren a distintas justificaciones dadas por los estudiantes a un determinado tipo de respuesta; en otros casos representan el elemento correspondiente (v.g. tabla 7); en otros, a los elementos que perduran del nivel anterior (v.g. tabla 11); y, aún en otros, ponen de manifiesto las contradicciones en una misma respuesta (v.g. tabla 22).

Tabla 5	Elementos propios: operatividad e infinito	
7,424242... - 3,151515...	No se puede	44%
	◦ porque no se acaban los números	16%
	◦ porque los números son infinitos	15%
	Sí se puede	43%
	◦ 4,272727	30%

Operatividad e infinito. Las operaciones que implican una cantidad infinita de números o de cifras nos ofrecen la posibilidad de explorar nuevas imágenes del esquema conceptual. Así, en el caso de cantidades con infinitos decimales, una parte muy importante de los sujetos considera dicha operación inviable ya que no es posible localizar el origen que permita iniciar la operación. Si bien es preciso tener presente que en este nivel la familiaridad con números de infinitas cifras decimales es muy poca, volveremos a encontrar situaciones análogas en edades superiores. Una muestra de dicha ausencia de familiaridad es la respuesta 4,272727 que alcanza porcentajes elevados e ignora la periodicidad representada por los puntos suspensivos, poniendo de relieve el rechazo intuitivo a operar con cantidades infinitas.

Lenguaje del infinito. Entre las expresiones utilizadas para intentar representar semánticamente el término infinito nos encontramos dos tipos predominantes de referencias. Por una parte, un tipo de adjetivos con una interpretación prácticamente literal como son *interminable* o *inacabable* y, por otra, una serie de términos con claras referencias a un marco espacial tales como *lejos, largo, inalcanzable, inconmensurable*, etc. Esta bipolaridad nos muestra, entre otros aspectos, la convivencia en el seno del esquema conceptual de unas imágenes con un sentido asociado necesariamente a la realidad física cotidiana cuya finitud se extrapola y de otras con un sentido puramente formal y abstracto asociado a lógica del lenguaje.

Tabla 6	Elementos propios: lenguaje del infinito	
Expresiones equivalente a infinito	Interminable	53%
	Referencias espaciales	36%
	Muy grande	16%
Funciones lingüísticas	Adjetivo	32%
	Adverbio	19%
	Verbo	20%
	Sustantivo	18%

6.2.1.2. ELEMENTOS METAFÓRICOS.

Los elementos metafóricos asociados al concepto de infinito suponen, desde los once años, la corporeización de experiencias perceptivas tanto *espaciales*, o materiales[5], como *cinético-temporales*; estos últimos se generan a partir de los primeros ya que se apoyan en buena parte de la estructura espacial, por lo que son posteriores y en numerosas ocasiones el sentido oscila entre ambas interpretaciones. Entre los elementos metafóricos espaciales encontramos las ideas de *medida, tamaño, jerarquía, etc.* [no se puede medir, es muy largo, no tiene principio ni fin, el valor más grande, depende de la medida de los puntos, tan pequeños que no los verías] y de *secuenciación* [llegar al final –en sentido estático, como final de una secuencia espacial-, empieza de 1 para arriba, van seguidos, después de... viene, sigue pero no llega a 2, está muy cerca de, no se hasta qué número llegar]. En algunas de las expresiones registradas se pueden observar la convivencia de ambas perspectivas, resaltando cada una de ellas en el apartado correspondiente.

5. Utilizaremos en lo que sigue los términos *espacial* y *material* indistintamente bajo su significado común de característica extensiva o dimensional propia de los objetos físicos de nuestra cotidianidad.

Por otra parte, el hecho de pensar en términos materiales no impide reconocer las tres posturas establecidas en todos los trabajos de investigación revisados: *finitista* [tan pequeños que no los verías, se puede alcanzar el valor más grande, no se pueden unir porque son demasiado pequeños], *infinitista* [muy largo pero no llegará a 0, sigue pero no llega a 2] y de *transición* [algo que está muy lejos, es tan grande –o pequeño- que no se puede medir].

Tabla 7	Elementos metafóricos básicos: métrico-espaciales
Habría muchísimos puntos pero depende de cómo sea la punta del lápiz Caben muchos porque los puntos son muy pequeños Pueden caber 100, 1000, depende de lo grandes que sean La línea sería tan grande que no se puede medir Saldría un segmento tan pequeño que ni lo podríamos medir No se sabe porque creo que no se puede medir No se podrán unir porque son demasiado pequeños Serían tan pequeños que no los verías No quedará nada porque va desapareciendo Los números no se gastan porque llegan a infinito El 2 es el siguiente de $1,\overset{\frown}{9}$ / Después del $1,\overset{\frown}{9}$ vendría el 2 0'.... se hace muy grande pero no se va a poder llegar al final Será un número muy largo pero no llegará a 0	Siempre que lo divido bajará Los números también son infinitos hacia abajo [el 0] El primer conjunto empieza desde 1 para arriba Sería infinito porque no tiene principio ni fin Ese número está muy cerca del 2 El primer conjunto es mayor porque los números van seguidos y en el segundo no Si vas añadiendo metros llegarás al infinito Como son infinitos *no se* hasta qué número llegar Cada vez se alargará más No se puede medir porque es infinito Infinito es lo más grande Infinito es algo que está muy lejos No hay una regla tan grande para medirlo

En lo que a la vertiente cinético-temporal se refiere encontramos su reflejo en el uso insistente de adverbios [siempre, nunca] y verbos de movimiento [ir, seguir, subir, bajar, no llegar, etc.] o bien de adjetivos relacionados con la "velocidad" de una sucesión o conjunto [rápido, lento] cuyo protagonismo en el "lenguaje" del infinito consideraremos más adelante.

Tabla 8	Elementos metafóricos básicos: cinético-temporales
No acabará nunca el juego porque los números son infinitos Durará siempre porque los números son infinitos Durará hasta que diga el número más grande Duraría todo el tiempo del mundo / toda la vida Hasta que nos cansemos o aburramos Seguirías infinitamente / No se para de poner ceros *A* tardará más que *B* porque *B* va de 4 en 4 y va más rápido Los números son infinitos, pero va a llegar antes la serie B que la A / B va más rápido y A más lento Tarde o temprano llegaremos al número que queramos	Siempre *sale* la mitad / Siempre *se puede* añadir Siempre se puede hacer más pequeño Cada vez se alargará más Se obtiene 1 porque va bajando Las dos sucesiones van subiendo y nunca acaban Los números van hacia delante y no hacia atrás Iría más adelantado y llegaría antes 1,999… sigue pero no llega al 2 Si vas añadiendo metros llegarás al infinito

Por último, observamos que el apartado correspondiente a los elementos *vinculatorios* es exiguo en estas edades y, como se recoge en otras investigaciones, se incrementará a medida que los estudiantes incorporen nuevos conocimientos, si bien es una de las componentes más deficientes del esquema conceptual debido a la ya mencionada *compartimentación* introducida por Vinner. Los elementos vinculatorios irán enriqueciendo las capacidades cognitivas del sujeto permitiéndole intercambiar diferentes contextos, ampliando la gama de recursos con los que enfrentarse a situaciones novedosas.

Tabla 9	Elementos metafóricos vinculatorios
Volvería a ser la mitad una y otra vez; es como la materia que no se puede destruir	
Si cortamos el segmento por la mitad y así sucesivamente es como los números que nunca acaban	
El número está dividido en pequeñas partes	
La línea puede medir infinito porque los números son infinitos	
Si a $\mathbb{N}$ le quitas un millón quedan infinitos; es como si al espacio le quitas un planeta, seguiría siendo infinito	

A continuación profundizaremos algo más en el análisis del lenguaje empleado. Como ya se ha recogido en el capítulo 2, la utilización de determinados verbos aporta una información complementaria muy valiosa a la hora de componer el esquema conceptual de infinito, en particular desde una perspectiva aspectual. En la tabla adjunta se registran verbos tales como *alcanzar, llegar, terminar* y *acabar* que son verbos aspectuales del español junto con *desaparecer* que señalan un punto temporal definido significando la culminación de un proceso que implica una lectura durativa y delimitada o *télica* de dicho proceso. Los verbos *acabar* y *terminar* presentan una variante que otorga prominencia al significado culminativo con predicados que designan "realizaciones", el hecho de que una situación llega a ocurrir por completo, más que a la progresión que lleva a un término inherente en la fase final. Podemos observar el uso reiterado de la negación de "terminar" y "acabar" para representar la potencialidad del infinito. No obstante, es preciso considerar un aspecto adicional de verbos como *alcanzar, llegar, terminar,* etc. en relación con la idea de infinito actual; bajo esta perspectiva tales verbos ya no representan una actitud finitista sino infinitista que, tras la abstracción de un proceso infinito, considera imaginable el objeto final del mismo a la vez que susceptible de manipular. Por otra parte, verbos como *seguir*, *continuar, superar*, así como *seguir + prolongar, seguir + alargar, seguir + aumentar*, *seguir y seguir*, *seguir y no acabar* e *ir* dotan a las expresiones de un carácter imperfectivo propio del concepto de infinito potencial reflejando situaciones dinámicas durativas *atélicas*, es decir sin referencia a un punto final de la eventualidad. Como se indica en las tablas anteriores también se hace uso de verbos con claras connotaciones espaciales [*agrandar, prolongar, alargar*] y temporales [*aburrirse, cansarse, durar, tardar, ir+gerundio*] que refuerzan los elementos recogidos más arriba.

Tabla 10					
Verbos espaciales			**Verbos cinético-temporales**		
Finitud	**Infinitud**	**Otros**	**Finitud**	**Infinitud**	**Otros**
Alcanzar Llegar Terminar Acabar Desaparecer	Seguir Alargar Añadir Aumentar Superar Continuar Agrandar Prolongar	Disminuir Medir Contar Saltar Comparar	Llegar Alcanzar Parar Terminar Acabar	Cansarse Aburrirse No parar Seguir No acabar Seguir y no acabar Seguir y seguir	Tardar Durar Saltar Ir

La ubicación del verbo en el contexto lingüístico bajo la acción de adverbios y complementos podrá reflejar también la dicotomía finitista/infinitista: *alcanzar/no alcanzar*, *llegar/no llegar, parar/no parar*, etc. Resultan reseñables los tiempos verbales utilizados en estos casos; así, mientras que el presente o el pasado se asocia con procesos finitos o bien con el carácter actual de infinito [antes o después llega a 1; 1,999… es 2 en el infinito; habrán salido infinitos doses], el futuro y el potencial normalmente refuerzan la carga infinitista potencial de las expresiones [no parará/no pararía de contar números, el número de segmentos se irá/iría a infinito].

La imposibilidad o incapacidad de tratar con el infinito, lo que supone de alguna manera la asunción de su existencia, se manifiesta en su forma más explícita a través de la expresión *no se puede* + verbo sensomotor [*hacer, escribir, dibujar, medir, contar,...*]. Esta estructura que participa en la corporeización del infinito se repetirá a lo largo de todos los niveles educativos considerados.

La introducción de adverbios de modo [*periódicamente, sucesivamente, aproximadamente*] que transforman la función gramatical de un adjetivo mediante el sufijo *-mente*, de tiempo [*siempre, nunca, jamás*] y de lugar [muy *cerca* de] apunta hacia la noción de infinito potencial al subrayar el carácter dinámico de un proceso inacabado. Por el contrario, los adverbios de cantidad [*mucho, bastante*], de tiempo [*tarde o temprano*] o de lugar [*lejos*] siempre reflejan una actitud finitista o de transición.

Tabla 11

Adverbios	Adjetivos		Sustantivaciones, adverbializaciones y otros términos y expresiones
Aproximadamente Periódicamente Sucesivamente Infinitamente Bastante Mucho Siempre Nunca Jamás Tarde o temprano Cerca Lejos	Impronunciable Inimaginable Impensable Incontable Incalculable Indefinido Impreciso Interminable Inacabable Inagotable Irreducible Inacabado	Largo Gigante Grande Mucho Rápido Lento + Superlativos	El más allá Me llevaría/tardaría toda la vida Llegar un momento en que... / Hasta que… Todo, nada El mayor puede ser cualquiera Si es infinito no se puede escribir Cuando no sepan un número se acaba No se puede contar porque perdería la cuenta Prolongar hasta donde queramos Todo el tiempo que quieras Cabrán tantos como quieras

En cuanto al adjetivo, resulta destacable el uso masivo del prefijo de negación *in-* y el sufijo *–able,* que supone la adjetivación de un verbo, para representar la imposibilidad de una serie de acciones todas ellas asociadas necesariamente con el infinito [*pronunciar, imaginar o pensar, calcular o contar*] y con el infinito potencial en particular [*terminar, acabar, agotar, reducir*] . Al respecto, hemos detectado el hecho recogido por Falk et al. (1986) de la importancia que tiene en las edades inferiores el conocer el nombre de los números, como si el concepto existiese gracias a su nombre; así lo ponen de manifiesto adjetivos tales como *impronunciable, inimaginable, impensable* o expresiones del tipo *cuando no sepa un número se acaba* y *ese número no se puede escribir*. En todas aquellas cuestiones donde implícita o explícitamente se requería una definición o un sinónimo de infinito, los estudiantes han recurrido en su mayoría al adjetivo, como ya se ha indicado en el capítulo 5; además de los ya mencionados no es breve la lista de los que se han registrado, como se puede observar en la tabla 11, y que nos remiten a una concepción aún preliminar a la de infinito; en el nivel que estamos considerando, destaca el hecho del carácter espacial de la mayor parte de ellos [*largo, gigante, grande, mucho*] y los aumentativos y superlativos correspondientes así como la ausencia de referencias temporales [*eterno, periódico*] que irán surgiendo a edades más avanzadas; por el contrario, sí hallamos referencias cinéticas [*rápido*, *lento*] para describir, más que la finitud o infinitud de un proceso, el tipo de "movimiento" o naturaleza cinética del proceso a lo largo de una sucesión tanto numérica como geométrica. El adjetivo "inagotable" es paradigma de uno de los modelos tácitos recogidos por Fischbein y también en este trabajo.

Por su parte, la adverbialización[6] y sustantivación recurrente de determinadas expresiones [toda la vida, el más allá, el mayor, lo más grande, el valor más grande, todo el tiempo del mundo, etc.] permite al sujeto subrayar la singularidad de una cantidad tanto temporal como numérica o espacial, asimilándola a la noción de infinito con claras reminiscencias finitistas; de manera análoga, contribuyen a dicho significado expresiones limitativas muy frecuentes tales como *hasta, llega un momento en que* y *tarde o temprano*. Frente a estas construcciones, las ubicuas y tópicas en niveles superiores, *hasta donde queramos* y *tantos como quieras*, se presentan de manera incipiente en unas edades donde la influencia del proceso de enseñanza de conceptos tales como el de sucesión y límite aún no son emergentes. En consecuencia, a los once años, aparecen perfectamente diferenciadas en el lenguaje utilizado por todos los sujetos las coordenadas espaciales (estáticas) y temporales (dinámicas) en las que quedará definida la noción de infinito y las diferentes actitudes ante dicho concepto. Es claro que la imagen básica que se incorpora al esquema conceptual de infinito desde estas edades –también antes según otras investigaciones- es la de una secuencia material espacio-temporal de carácter lineal, bien finita o infinita –a veces indefinida- que conducirá, como veremos, a la corporeización paulatina del concepto de infinito potencial.

Por último, en cuanto a la función gramatical atribuida al término "infinito", observamos en la tabla 12 que aparece principalmente como adjetivo o bien como sustantivo pero en calidad de atributo de ciertos objetos tales como conjuntos, números, resultados, líneas, etc.; es decir, en cualquiera de los casos supone una propiedad que define a dichos objetos. Esto, como hemos visto al tratar algunos modelos tácitos, no supone siempre dotar de existencia al infinito, como podría parecer, sino que en numerosas ocasiones significa indefinición; así, por ejemplo, *los números son infinitos* puede indicar que son *muchos* o bien que *no se sabe cuántos son*. El carácter absoluto de infinito, en cambio, siempre viene representado como sustantivo referido a una cota o límite, a veces alcanzable, a veces inalcanzable: *llegar a/al infinito*. Respecto al problema de la existencia encontramos las siguientes respuestas: "todo el tiempo hasta que se cansen porque todos los números existen"; "hay muchos números que no se pueden decir". La continuidad es redefinida por los estudiantes en función del contexto. Así, un mismo sujeto puede escribir en una de las cuestiones que "$\mathbb{N}$ es mayor que el conjunto de los múltiplos de tres porque en el primer conjunto los números van seguidos y en el segundo no" y, a la vez, en otra cuestión el mismo estudiante puede responder que "2 es el número siguiente a $1,\widehat{9}$".

Tabla 12	Función gramatical del término "infinito"
Los números son infinitos El resultado es infinito Hay infinitos números / decimales Pueden entrar infinitos puntos	Siempre se suma la mitad infinitas veces Una línea infinita no se puede medir Añadiendo segmentos llegará al infinito Hasta llegar al infinito

6. Las adverbializaciones más frecuentes son de naturaleza temporal [toda la vida, todo el tiempo, todo el tiempo que quieras etc.] y espacial [hasta donde queramos, tan grande como queramos, etc.].

6.2.1.3. ELEMENTOS SIMBÓLICOS.

Dentro de los elementos simbólicos *operacionales* la opción más consolidada es la referida a los procesos, es decir, aquellas expresiones que reconocen el carácter indefinido de una cierta operación sin considerar la naturaleza o existencia de su resultado: “no se sabe lo que sale ya que siempre estás dividiendo”, “a los números siempre se les puede añadir más”. También podemos hallar referencias a infinito como resultado de dichos procesos operativos: “es infinito porque siempre se suma la mitad infinitas veces”. Y, por último, es posible encontrar afirmaciones generales que proponen algún tipo de resultado para tales operaciones a modo de propiedad prescriptiva: “no puedes dividir entre dos sucesivamente porque te quedarías sin números”.

Tabla 13	Elementos simbólicos: operacionales
A los números se les puede añadir más	
No se puede empezar a hacer la resta porque hay muchos / infinitos números	
No se sabe ya que siempre está dividiendo	
Da cero coma mucho porque puedes dividir entre 2 hasta que te canses	
Se obtendría un número mucho más pequeño ya que estamos dividiendo	
Es infinito porque siempre se suma la mitad infinitas veces	
No puedes dividir entre dos sucesivamente porque te quedarías sin números	

En los elementos simbólicos *relacionales* hallamos dos categorías muy diferenciadas. Por una parte, las relaciones de orden indefinidas entre números que en la mayor parte de los casos suponen un crecimiento ilimitado, “no se puede llegar a un número máximo”, o bien una cota inferior si las sucesiones consideradas son decrecientes, “hasta que se llegue al número más pequeño”. Y, por otra, las relaciones entre conjuntos o bien entre los cardinales de dichos conjuntos; en este caso el resultado de la comparación presenta como categorías la equivalencia entre conjuntos infinitos, la preponderancia del todo sobre sus partes y la indefinición propia atribuida al concepto de infinito. La reiteración de una operación determinada –sumar, añadir, dividir- supone un proceso que conduce a la encapsulación del infinito como objeto inacabado, incompleto. Es así como el infinito potencial se convertirá en la interpretación habitual para la mayor parte de los estudiantes. El establecimiento de una relación de orden entre los elementos de un conjunto numérico infinito contribuirá a dicha encapsulación, si bien el carácter necesario de los extremos de dichos conjuntos conducirá a buena parte de los sujetos a una actitud finitista como veremos en un apartado posterior.

Tabla 14	Elementos simbólicos: relacionales
Puedo decir siempre un número mayor	
No se puede llegar a un número máximo	
Siempre hay un número más pequeño que el que se dice	
Se tarda un cuarto de hora hasta que se llegue al más pequeño	
Si empiezo, puedo decir el número más pequeño que es 0,001	
El primer conjunto es mayor porque el otro va saltándose números	
El primer conjunto es mayor porque empieza antes	
No se pueden ordenar estos conjuntos porque todos son infinitos	
Como hay infinitos números el mayor puede ser cualquiera	
Los dos tendrán los mismos porque son infinitos y no se pueden contar	

6.2.1.4. ELEMENTOS FINITISTAS E INFINITISTAS.

Los elementos finitistas en este nivel educativo, en cualquiera de los cinco tópicos fundamentales considerados en los elementos propios, se diferencian claramente por el contexto en el que se sitúan[7]. Así, si se trata de un ámbito numérico vienen representados por expresiones del tipo "hasta que uno diga el número más alto o el más bajo"," te quedarías sin números", "al final ya no se puede dividir", etc. que imponen limitaciones tanto a conjuntos numéricos como a operaciones inicialmente indefinidas; por otra parte, bajo un contexto geométrico la actitud finitista se expresa mediante la atribución de propiedades físicas o dimensiones adicionales a elementos geométricos tales como puntos o segmentos: "depende del tamaño de los puntos", "depende de lo largo que sea el folio", etc.

Tabla 15 — Elementos finitistas
Si soy el primero, el otro diría un número más grande y acabaría ganado él
Hasta que uno diga el número más alto que conozcas
Hasta que se acaben los números porque no hay muchos números pequeños
Yo diría el más pequeño que es 0,01
Durará hasta que uno diga el número más bajo
Depende del tamaño de los puntos
Caben muchos puntos (ó 1.000.000 de puntos) porque son diminutos
No podrías dividir entre 2 sucesivamente porque te quedarías sin números
Al final ya no se puede dividir
Se obtendría un número mucho más pequeño ya que estamos dividiendo
La línea más larga que puedo dibujar depende de lo largo que sea el folio

Detectar los elementos de transición entre una actitud finitista y otra infinitista no es una cuestión inmediata, ya que normalmente se encuentran asociados a contradicciones o incoherencias que no siempre se reflejan en las respuestas escritas. En algunos casos estas contradicciones representan un indicio de dicha transición pero en muchos otros suponen exclusivamente el conflicto propio que genera este concepto en la mente de individuo al enfrentarse con sus entornos tanto cotidiano como matemático necesariamente finitos a las edades que estamos considerando. No obstante, es posible hallar una serie de respuestas que aún presentando una raíz finitista ponen de manifiesto dicha transición a través de expresiones que abren la puerta a la infinitud del proceso o conjunto en cuestión: es "muy difícil o imposible contarlos", "cabrán millones y millones", "depende de las veces que lo divida o sume", "tendríamos un trozo de segmento diminuto que iría disminuyendo", etc.

Tabla 16 — Elementos de transición
No podemos ordenarlos porque es muy difícil contarlos
Habría muchos puntos y sería imposible contarlos
Son muchos puntos y perderías la cuenta
Un trozo de segmento diminuto porque si vamos cortando a trocitos, iría disminuyendo
En los dos cuadrados cabrán millones y millones
Mediría mucho porque una línea puede ir por todo el mundo
Da 0'mucho porque puedes dividir entre 2 hasta que te canses
Lo que obtengo depende de las veces que lo divida

En cualquiera de los niveles educativos que vamos a considerar, los elementos infinitistas potenciales son que los que presentan una mayor diversidad y riqueza, en particular en lo que a

7. Aunque las frases o expresiones se copian completas con el fin de respetar el contexto original, en este análisis no se considerarán las implicaciones de los elementos finitistas o infinitistas en el resultado o respuesta de una determinada cuestión ya que dicho estudio se efectuó en el análisis cuantitativo correspondiente, en el capítulo 5.

imágenes y lenguaje que las representa se refiere. En el nivel que nos ocupa encontramos las siguientes categorías:

- *Siempre* + una acción: "siempre puedo decir otro", "siempre se podría continua"r, "siempre se puede añadir uno más", "siempre se podría seguir dibujando", etc.
- Locuciones gramaticales del tipo *todos los* [puntos, ceros, números, etc.] *que tu quieras*
- Locuciones gramaticales del tipo *cada vez* [el número, la suma, el segmento, etc.] "se hará más y más pequeño/grande"
- *Nunca* o negación + un verbo perfectivo: "los números nunca se acaban", "nunca llegará a 2", "no se va a poder llegar", etc.

Es frecuente que dos o más de estas categorías aparezcan en una misma respuesta con el fin de reforzar el carácter potencial de la afirmación: "no habrá final porque siempre se va aumentando y no acabará".

Tabla 17	**Elementos infinitistas: potenciales**
Duraría infinito porque siempre hay un número mayor que otro	
Si él dice un número yo siempre puedo decir otro más pequeño	
Siempre se puede añadir uno más	
No habrá final porque siempre se va partiendo por la mitad y no acabaría	
La línea sería infinita porque siempre se podría continuar / podrías seguir dibujando eternamente	
El resultado no se sabe porque seguirías dividiendo infinitamente	
A la larga saldrán decimales que irán aumentando y no creo que se pueda decir un final	
No se puede empezar a hacer la resta porque podrías seguir poniendo números y no acabar	
Duraría siempre porque los números nunca se acaban y no podrá haber ningún ganador	
Por muchos nueves que haya nunca llegará a 2	
Si quitas un millón, siguen quedando infinitos porque los números no acaban	
Puede durar lo que tu quieras [no terminará nunca] porque hay infinitos números	
Puedes poner los puntos que quieras en los dos cuadrados	
No llegará a 0, porque puedes seguir poniendo todos los ceros que quieras y un uno al final	
El número se hará cada vez más y más pequeño porque siempre dividimos	

La localización de elementos infinitistas actuales es mucho más complicada que la de elementos potenciales o incluso que la de los de transición; esto es debido a que el grado de abstracción requerido es considerablemente mayor dada su desconexión con el entorno finito y con los primeros elementos corporeizados. En realidad, como ya hemos podido observar en el capítulo anterior y como lo podremos hacer a lo largo del presente, la proporción de sujetos que llegan a interiorizar el carácter actual del cardinal de un conjunto infinito o del resultado de un proceso infinito es demasiado pequeña como para adquirir la categoría de elemento propio del ECN. La dificultad mencionada se agrava si consideramos en detalle las explicaciones aportadas por los estudiantes, tanto en los cuestionarios como en las entrevistas, tras una respuesta aparentemente infinitista actual. No obstante, es posible encontrar tras esta información tan abundante en contradicciones algunos indicios en los que reconocer ciertas actitudes en el sentido mencionado. Así, por ejemplo, respuestas tales como "el resultado será cero", "me quedo sin nada", "llegarás al infinito", "una línea es infinita", etc. ponen de manifiesto la aceptación, si no la existencia, de ciertos objetos como límite de un proceso indefinido; junto a estos elementos es preciso constatar la presencia de elementos infinitistas potenciales que, desde nuestro punto de vista, acentúan el carácter actual de la respuesta completa. Respecto a la equivalencia de conjuntos infinitos la situación es diferente ya que en este caso el modelo tácito *infinito = infinito* subyace en un porcentaje importante de respuestas; sin embargo, aunque lejos de hallar precedentes de una correspondencia uno a uno entre conjuntos, apreciamos de nuevo en expresiones tales como "los dos igual porque los números son infinitos" el papel atributivo que desempeña el término infinito como característica de un conjunto.

Tabla 18	Elementos infinitistas: actuales
El resultado será cero porque si divido va disminuyendo	
Me quedo sin nada porque va desapareciendo el segmento al dividirlo	
Una línea es infinita	
Creo que no los puedo contar todos porque los números son infinitos	
Habría infinitos puntos en los dos cuadrados	
Los dos igual porque los números son infinitos y los múltiplos de tres también	

6.2.1.5. ELEMENTOS OBSTÁCULO Y MODELOS TÁCITOS.

En correspondencia con los modelos tácitos introducidos en el capítulo 5, hallamos una serie de elementos obstáculo que se interponen en la comprensión adecuada del sentido matemático de infinito. Los *elementos* de este tipo que hemos denominado *epistemológicos* son fácilmente reconocibles en el desarrollo histórico de este concepto como ya se ha recogido en capítulos anteriores y en la bibliografía correspondiente. En el primero de los tipos considerados, *infinito = infinito*, se suelen utilizar como criterios bien la *numerosidad* de ambos conjuntos con un significado ciertamente opaco, bien *un final al que se supone que llegan* con toda la carga contradictoria que supone tal afirmación. La inclusión como argumento para justificar la relación de orden entre los cardinales de conjuntos también se halla en las raíces históricas y se sustenta en una extrapolación finitista. La inclusión la encontramos bajo numerosas acepciones como podemos observar en la tabla 19. Por último, la identificación de un punto, como objeto geométrico, con la acepción cotidiana de punto que recoge fielmente cualquier diccionario[8] implica una dificultad notable, en primer lugar, para reconocer el cardinal infinito de otros elementos geométricos como segmentos, líneas, polígonos, etc. y, en segundo lugar, para observar una relación de equivalencia entre tales conjuntos.

Tabla 19	Elementos obstáculo: tácitos epistemológicos
Infinito = infinito	Son iguales porque los dos son infinitos o llegan a infinito
Inclusión	El primer conjunto es mayor porque empieza antes El primero es mayor porque al segundo le faltan números El primero es mayor porque el segundo se salta números
Punto = Marca	Depende cómo hagas de grandes los puntos Si haces los puntos muy grandes sí se podrían contar 100 puntos / 900 puntos

Dentro de la categoría que denominamos *elementos obstáculo tácitos didácticos* contemplamos aquellos que se han incorporado al esquema conceptual a lo largo del proceso de

8. Las siguientes son algunas de las setenta y cuatro acepciones que recoge *el Diccionario del español actual* de Manuel Seco:

1. Señal o marca de dimensiones pequeñas, ordinariamente circular, perceptible en una superficie
2. Signo ortográfico con que se señala el final de una oración
3. Extremo [de la pluma de escribir] que se apoya directamente sobre el papel
4. Agujero que forma parte de una serie destinada a graduar o ajustar la disposición de una cosa
5. Porción mínima concebible del espacio
6. Instante o momento

instrucción, en la mayor parte de los casos de manera indirecta o inducida a partir de diferentes alusiones al infinito en diferentes contextos tanto matemáticos como no matemáticos. La imagen de “el número más grande” o “el más pequeño” que habita el esquema conceptual de los niveles educativos inferiores representa claramente la herencia de las matemáticas finitas con las que el niño se ha familiarizado durante muchos años y uno de los tópicos que más profesores reconocen haber difundido en las investigaciones realizadas. La categoría denominada *indefinición* corresponde al modelo tácito de indefinición introducido en el capítulo 5 y es la más frecuente en los niveles educativos inferiores. Responde, en general, a la fórmula *no se puede saber* o *hacer porque son/hay infinitos*, o bien al establecimiento de cierta arbitrariedad en el significado de un proceso indefinido como *no se sabe porque depende de la veces que*… dividamos, sumemos, etc.; en cualquiera de los casos la ignorancia sobre el infinito se convierte en una propiedad definitoria que permite “resolver” cualquier eventualidad al respecto. Otra imagen de infinito en este sentido es la que le dota de un *carácter inagotable* vinculado tanto a su perspectiva potencial, inacabable [“siempre puedes hacer el segmento más pequeño”], como a cierta capacidad para conseguir cualquier objetivo, alcanzable [“divides tanto el segmento que te quedas sin nada”]. Por último, hemos de destacar el elemento asociado al modelo tácito de divergencia que asigna un resultado infinito a cualquier suma infinita ya sea de números, segmentos, áreas, etc. Este obstáculo especialmente arraigado entre las imágenes del infinito manifiesta una particular resistencia a la hora de desarticularlo del esquema conceptual mediante tareas de conexión entre diversos contextos. Tras esta resistencia, se halla una sólida unión entre la noción de sumar que implica *siempre aumentar* y el hecho de pensar habitualmente en términos de números enteros hasta niveles avanzados de ESO.

Tabla 20	**Elementos obstáculo: tácitos didácticos**
El más grande / el más pequeño	Preferiría ser el primero porque como los dos conocemos los mismos números yo diría el más alto / el más pequeño que conociese
Indefinición	No se sabe cuántos quedan porque seguirías infinitamente / porque no se acaban No se puede decir cuántos quedan porque necesitamos muchos ceros No se los que quedan porque no los puedo contar todos ya que los números son infinitos No podemos hacer la resta 7,4242… - 3,1515… porque no acaban los decimales y no sabemos cuántos tendremos que poner No se pueden ordenar estos conjuntos porque todos son infinitos Lo que se obtiene depende de las veces que se divida
divergencia	Si unimos todos los segmentos dará infinito porque siempre se está sumando El resultado es infinito porque nunca se acaban los números Da infinito porque siempre sumamos 1+0,5+0,25+0,12+0,06+···

Respecto de los elementos obstáculo tácitos, e íntimamente relacionados con los didácticos, hemos considerado pertinente diferenciar aquellos que se sustentan en imágenes físicas o materiales y que heredan las características o limitaciones propias de los objetos a los que se refieren. Hemos distinguido dos categorías dentro de este tipo de elementos; en una de ellas consideramos aquellas referencias explícitas a las limitaciones que se derivan de nuestra naturaleza finita y la de nuestro entorno: “los segmentos serían muy pequeños y no se podrían coger”, “te pasarías toda la vida poniendo puntitos”, “no hay una regla tan larga para medirlo, no se puede dibujar”, etc.; y, por otra parte, un aspecto infrecuente en los primeros niveles pero que se irá consolidando con la edad, está relacionado con la aproximación de procesos infinitos a procesos finitos que se suponen que dan un resultado muy cercano al solicitado: "si unes todos los segmentos dará alrededor de 2 metros", "1,999... es aproximadamente "2, etc. Podríamos pensar que tras esta actitud se encuentra un precedente de la noción de límite pero consideramos que, por el contrario, responde a un modelo que establece una equivalencia entre los procesos indefinidos propuestos con la noción de medida que implica necesariamente un redondeo que ajuste el resultado a las limitaciones del instrumento utilizado.

Tabla 21	**Elementos obstáculo: tácitos materiales**
Limitaciones físicas	No se podrían unir los segmentos porque serían muy pequeños y no se podrían coger Depende del espacio que tengas para dibujar la línea No puedo saber lo que mediría la línea porque no la puedo dibujar No se podrá medir porque una línea es infinita y no hay una regla tan larga Es imposible saberlo porque te pasarías toda la vida poniendo puntitos El número de estrellas es infinito pero no hay tecnología para averiguarlo
Aproximaciones	Si unes todos los segmentos dará alrededor de 2 metros

El carácter contradictorio del infinito fue la primera característica reseñable que detectaron Fischbein y sus colegas y es, probablemente, la más evidente al realizar cualquier exploración del concepto. En nuestro caso, hemos recogido aquellas contradicciones que más información nos pudiesen aportar a la hora de interpretar su origen y sólo nos detendremos en analizar algunas de estas. En el nivel que estamos considerando podemos observar que una parte de las contradicciones está ligada a una interpretación arbitraria del concepto (respuestas 1, 2); en otras se establece una equivalencia entre un resultado, normalmente *infinito*, y un elemento de desinformación tal como no *se sabe cuantos hay*, *no los podemos contar*, etc. (respuestas 3, 4, 5 y 6); por último, hemos introducido en este apartado un aspecto que, aunque en la mayor parte de los casos va asociado a algún tipo de contradicción, merecería una consideración aparte; se trata del lugar que ocupa la *existencia* del infinito en los diferentes esquemas conceptuales (respuesta 7), recogida en Boero (2003).

Tabla 22	**Elementos obstáculo: contradictorios**
1. El juego puede ser infinito pero tu puedes acabar cuando quieras	
2. Serían infinitos puntos, depende cómo sea su medida	
3. No se puede hacer la resta pero si se pudiese hacer su resultado sería 4,272727...	
4. Todos son iguales porque no se sabe cuántos hay	
5. Los dos son infinitos porque no los podemos contar	
6. Quedan infinitos porque nunca podemos saber cuántos números existen	
7. No existe la línea más larga porque es infinita	

6.2.2. PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA: 12-14 AÑOS

6.2.2.1. ELEMENTOS PROPIOS.

Comparación de conjuntos. En esta ocasión los resultados obtenidos para el caso de conjuntos discretos no sufren prácticamente variaciones respecto al nivel anterior presentando un elevado grado de estabilidad como ya se recogió en el capítulo 5. No obstante, es preciso constatar la mayor presencia de argumentos inclusivos para justificar el tamaño de $\mathbb{N}$ frente a otros conjuntos: $\mathbb{N}$ *contiene más porque empieza antes*, *porque va de uno en uno*, etc. y, frente a este hecho, también es posible apreciar que la idea de equivalencia entre conjuntos infinitos aparece cada vez más, en este caso al comparar los números naturales con los múltiplos de tres o de cuatro, lo que supone una incorporación importante para el esquema conceptual, aún siendo un elemento obstaculizador que se materializa en expresiones del tipo “porque son o llegarán al infinito” o “porque podemos llegar hasta donde queramos”.

Tabla 23	Elementos propios: comparación de conjuntos discretos	1ESO	2ESO
ℕ – {1, 2, 3, …, 1.000.000}	Quedan infinitos No se sabe los que quedan Quedan muchos, millones, etc.	26% 21% 21%	31% 22% 22%
ℕ *vs.* ℕ – {1, 2, 3, …, 1.000.000}	El primero contiene más o porque empieza antes El segundo contiene más Son iguales	39% 22% 23% 22%	40% 20% 22% 22%
ℕ *vs.* {3, 6, 9, 12, …}	El primero contiene más o porque va de uno en uno El segundo contiene más Son iguales o porque son infinitos	42% 22% 18% 21% ------	42% 25% ------ 25% 18%
a) Número de estrellas *b)* Número de granos de arena *c)* Números naturales *d)* Números de puntos en un cuadrado *e)* Número de células en el cuerpo	Dan una ordenación $d < e < b < a < c$ El menor es *d)* El mayor es *c)* No se pueden ordenar	61% 22% 38% 38% 17%	59% 21% 37% 46% 17%
A = ℕ *vs.* B = {4, 8, 12, 16, 20, 24, …}	El segundo alcanza el valor más grande A y B alcanzarán un valor tan grande como queramos o porque los dos llegarán a infinito o porque podemos llegar hasta donde queramos	19% 68% 28% 15%	------ 72% 30% 18%

En lo que a conjuntos continuos se refiere, también se mantienen en general los porcentajes que acreditan los mismos elementos propios del nivel anterior pero se incorpora la categoría “hay infinitos”; en realidad los valores son ligeramente superiores en este caso salvo para la categoría “dan una cantidad” que se reduce probablemente en favor de las restantes categorías; esto representa una fase de transición hacia posiciones más indefinidas de infinito. La imagen conceptual que adjudica dimensiones a los puntos se consolida en este nivel incrementando su presencia y, por lo tanto, también lo hace el elemento “no se puede saber” debido a la dependencia de dichas dimensiones.

Tabla 24	Elementos propios: comparación de conjuntos continuos		
Puntos en un cuadrado	Hay muchos, miles, millones Hay infinitos No se puede saber o porque depende del tamaño Depende del tamaño En el de 30 cm. hay más puntos Dan una cantidad	19% ----- 42% 24% 28% 27% 22%	19% 17% 41% 32% 36% 30% 23%

Divisibilidad indefinida. De nuevo en este tipo de situaciones encontramos prácticamente los mismos elementos propios del nivel anterior, si bien hemos de destacar algunas variaciones porcentuales y alguna incorporación notable. En general, en todos los casos pero especialmente en el contexto geométrico, se observa un incremento en el elemento *el proceso no acaba* en perjuicio del correspondiente a *el proceso acaba* y, aunque todavía la mayor parte de los sujetos alberga la imagen de que el proceso finalizará, ya se puede apreciar en este nivel que tales valores tienden a invertirse. Por otra parte, en el caso de la división de segmentos se incorpora el elemento *se obtiene un segmento muy pequeño* dentro de la categoría *el proceso acaba* que constituye un precedente de la noción de infinitésimo; en cambio, las referencias al *número más pequeño* se reducen apreciablemente como resultado de una ligera reducción de posiciones finitistas. Precisamente en este contexto hallamos una novedad importante respecto al nivel anterior como es la inclusión de la imagen *da igual quién comience el juego* como elemento propio, lo que supone un reconocimiento explícito del carácter indefinido del proceso.

Tabla 25	**Elementos propios: divisibilidad indefinida**	**1ESO**	**2ESO**
División de un segmento por la mitad	El proceso "no acaba"	22%	24%
	El proceso "acaba"	54%	51%
	o Un segmento o muchos segmentos	24%	15%
	o Un segmento pequeño o muy pequeño	------	17%
División de un número por la mitad	El proceso "no acaba"	15%	23%
	El proceso "acaba"	26%	25%
	o Da un número decimal	21%	17%
Juego: decir el más pequeño	Prefiero ser el primero	42%	35%
	o Para decir "el más pequeño"	26%	19%
	Prefiero ser el segundo	32%	32%
	o Para superar al contrincante	17%	20%
	Da igual quién comience el juego	21%	31%
	El juego no acaba	31%	44%
	El juego acaba, tiene un final	54%	39%
	o Indefinido	29%	24%
¿Existe algún número entre $1,\overset{\frown}{9}$ y 2?	No existe ninguno	69%	73%
	o Porque 2 es el siguiente	18%	16%
	o Porque hay infinitos nueves o es periódico	29%	32%
	Sí existe	23%	21%

Sumas infinitas. Sigue dándose el equilibrio al que nos referíamos en el nivel anterior entre las dos categorías principales, si bien desaparecen elementos finitistas de transición típicos tales como "se obtiene una longitud muy grande". Por el contrario, argumentos potenciales del tipo *siempre se suma, nunca se acaba o siempre se puede dividir* experimentan un cierto crecimiento, es particular en 2ESO, reforzando el modelo de divergencia. Respecto de la respuesta *2 metros* hemos de señalar que, en la mayor parte de los casos, no va acompañada de justificación, si bien en las entrevistas se ha podido comprobar que dicho resultado se basa fundamentalmente en argumentos de redondeo o aproximación.

Tabla 26	**Elementos propios: sumas infinitas**	**1ESO**	**2ESO**
Sumar segmentos cada uno la mitad del anterior	Resultado infinito	42%	46%
	o Porque siempre se suma o nunca se acaba	25%	35%
	Resultado finito	44%	41%
	o 2 metros	19%	18%

Operatividad e infinito. Aparece como elemento propio la respuesta "4,272727..." que nos indica ya cierta familiaridad con los números decimales y, en particular, con los números decimales periódicos, así como un incipiente grado de comprensión del carácter indefinido y potencial que representan los puntos suspensivos. A lo largo del ciclo que estamos considerando, experimenta un incremento significativo el porcentaje de estudiantes de 2ESO que responde afirmativamente con lo que se rompe el equilibrio que se daba en 6PRI y 1ESO entre las dos categorías consideradas. Esto, junto con la respuesta arriba indicada, supone la creación de un vínculo en el esquema conceptual entre periodicidad e infinito que permitirá al sujeto abordar la resolución de operaciones que implican una serie ilimitada de cifras.

Tabla 27	Elementos propios: operatividad e infinito	1ESO	2ESO
7,424242... - 3,151515...	No se puede	45%	37%
	◦ porque los números son infinitos	17%	16%
	Sí se puede	45%	54%
	◦ 4,272727	23%	18%
	◦ 4,272727...	------	19%

Lenguaje del infinito. Dentro de este tipo de elementos propios se consolidan el vocablo *interminable* como sinónimo de infinito así como las *referencias espaciales*; desaparece la expresión finitista de transición *muy grande* y se incorporan referencias numéricas alusivas al infinito así como la expresión más literal *sin fin*. Y en cuanto a las funciones gramaticales desempeñadas por el término infinito podemos observar que se consolidan las de adjetivo, con un incremento considerable en 2ESO, y adverbio mientras que se reduce la de verbo y desaparece la de sustantivo.

Tabla 28	Elementos propios: lenguaje del infinito	1ESO	2ESO
Expresiones equivalentes a infinito	Interminable	56%	63%
	Referencias espaciales	37%	37%
	Sin fin	------	36%
	Referencias numéricas	16%	16%
Funciones lingüísticas	Adjetivo	47%	50%
	Adverbio	18%	18%
	Verbo	15%	15%

6.2.2.2. ELEMENTOS METAFÓRICOS.

A medida que avancemos hacia niveles superiores podremos observar que se mantiene la mayor parte de los elementos metafóricos de los niveles inferiores aunque no así sus valores porcentuales como se puede apreciar en el capítulo 5. Junto a ellos se irán incorporando paulatinamente un número cada vez mayor de matices que enriquecen el esquema conceptual, permitiéndonos analizar con mayor precisión el proceso de creación del infinito corporeizado. Así, entre los que aluden a ideas de *medida, tamaño, ordenación,…* hemos de añadir: "depende de la distancia a la que pongas los puntos, suponemos que cada punto equivale a un milímetro, lo podrías ver con aparatos especializados, costará mucho medirlo" y entre aquellos otros que se refieren a *secuenciaciones* espaciales: "llegará un punto en que…, podemos alargarla hasta donde queramos o siempre se podrá alargar, puedes alcanzar el resultado que quieras, se extiende hasta el infinito, los dos llegan al mismo sitio, nunca se podrá poner un número detrás, son números muy próximos".

Tabla 29	Elementos metafóricos básicos: métrico-espaciales
Aunque tu no veas el segmento, lo podrías ver con aparatos especializados No existe ningún objeto para medir esa longitud Al final no se podría partir pues se llegaría al átomo Depende de la medida del punto pero también del boli y si se dejan huecos Depende de lo que midan [del tamaño/grosor de] los puntos El número de puntos en un cuadrado es infinito porque puedes poner unos puntos encima de otros Suponemos que cada punto equivale a un milímetro El espacio que nos dan para rellenar de puntos es cerrado Depende de la distancia a la que pongas los puntos Quedan infinitos porque los números no se pueden medir Aunque no se podrían medir seguirían estando allí Si no tiene fin la línea no puedo ver cuánto mediría No puedes tener un número exacto de cuánto puede medir Sería una longitud muy grande pero sí se podría medir Es una medida tan grande que no se puede medir Si mide 10.000.000.000 no se podría medir Medirá kilómetros porque una línea es infinita La línea mediría una medida infinita Costará mucho medirlo El primer conjunto es mayor porque van de uno en uno	El primer conjunto es mayor porque tiene más recorrido hasta el infinito Hay infinitos porque no sabemos hasta dónde pueden llegar Llegará un punto en el que no quede segmento Milímetro a milímetro la longitud [se alarga poquito a poco] es cada vez más grande Digas el que digas siempre te podrán superar Sería infinita porque al ser una línea sin cerrar se puede extender por ambos lados Podemos prolongarla / alargarla indefinidamente hasta que queramos y cortemos la sucesión Se extiende hasta el infinito Puedes alcanzar el resultado que quieras Los dos igual porque llegan al mismo sitio Vas rellenando con la mitad, la mitad de la mitad, … y nunca llega a ser más grande de 2 metros Después del 1,9... viene el 2 El 2 es el siguiente de 1,9... 1,999... está muy cerca / próximo del 2 Como 1,9999… es periódico nunca se podría poner un número detrás

El examen detenido de la tabla 29 nos permite apreciar, mucho mejor que en el nivel anterior, determinados bloques de expresiones con características comunes. Podemos distinguir, en primer lugar, toda una gama de alusiones al concepto de medida; también son numerosas aquellas otras que se refieren a propiedades extensivas ya sea de objetos geométricos como numéricos; y, por último, encontramos las metáforas correspondientes a las relaciones de orden: siguiente, detrás de, muy cerca de, etc.

Por su parte, los elementos referentes a aspectos cinético-temporales presentan como diferencias reseñables respecto al nivel 6PRI nuevas acepciones de las mismas ideas, análogamente al caso anterior; no obstante, como ya se ha indicado en capítulos anteriores, la diversidad que nos ofrece el tratamiento temporal de infinito frente al espacial es notablemente inferior. A pesar de ello, en el nivel que nos ocupa es posible distinguir netamente ambas categorías a la vista de la tabla 30: duración y movimiento. Dentro de la primera de ellas es preciso comparar la expresión "durará hasta que diga el número más grande", de 6PRI, con "puede durar hasta que uno diga infinito" de 1ESO; como podemos ver la incorporación del término "infinito" al vocabulario de los estudiantes no implica ni mucho menos un uso adecuado del mismo, sino que en no pocos casos se identifica con elementos finitistas anteriores. En cuanto a los vínculos que se establecen entre la idea de infinito y la noción de movimiento cabe diferenciar aquellos que, a través de algún verbo particular, inciden en el carácter continuado de un proceso, "lo que estamos haciendo es mover el 1 un lugar a la derecha en cada número", "el primer conjunto va de uno 1 en 1", "el primero es mayor porque no se salta números", etc., de aquellos otros que se refieren a la propia naturaleza del movimiento como "mientras continue al mismo ritmo", "cambiaría la velocidad de aumento", "aunque una vaya más rápida y otra mas lenta…", etc.

Tabla 30	Elementos metafóricos básicos: cinético-temporales
Puede durar hasta horas/hasta que uno diga infinito Durará hasta que uno de los dos se canse/rinda/aburra Se podrá / puede estar dividiendo todo el tiempo que quieras / toda la vida Podrías morirte sin averiguarlo Al tener infinidad de números tardaría muchísimo Tarde o temprano llegarás a una división incalculable Los números no se acaban nunca No se sabe porque jamás pararías de escribir / dividir Siempre puedes seguir dibujando/dividiendo Si parásemos una de las dos series, la otra le alcanzaría Lo que estamos haciendo es mover el 1 un lugar a la derecha en cada número [0.1, 0.01, 0.001, …]	El primer conjunto contiene más pues va de 1 en 1 La serie B es más rápida que la A El segundo conjunto siempre le llevará ventaja al primero Si sigues dividiendo y dividiendo, llegarás a 1 1,999... sigue pero no llega al 2 El primero es mayor porque no se salta números El resultado se va haciendo cada vez más pequeño Aunque una vaya más rápida y otra más lenta, se llegará al mismo lugar Puede alcanzar un número tan grande como queramos pero despacio porque va de 1 en 1 La serie B va avanzando de cuatro en cuatro Mientras continúe al mismo ritmo Cambiaría la velocidad de aumento

Por último, el número de elementos vinculatorios sigue siendo muy reducido, con un ligero incremento respecto al nivel anterior, y siempre en el sentido contexto geométrico → contexto aritmético.

Tabla 31	elementos metafóricos vinculatorios
Es como en los números, nunca vas a saber cuándo llegas al final [división indefinida de un segmento] Dará un número positivo que se podrá dividir cuanto quieras [división indefinida de un segmento] Es como el ejercicio de dividir un número entre 2, que nunca acabaría, sería infinito Se obtiene un segmento con muchísimos decimales aunque no terminarías nunca de dividir El segmento puede ser tan grande que nunca se acabaría al igual que los números La línea mediría infinito porque los números no tienen fin No se puede dibujar ya que los números son infinitos y siempre puede haber otra línea más larga	

Los verbos espaciales y los cinético-temporales se mantienen bastante estables respecto del nivel anterior sin incorporaciones destacables. El verbo *comparar* surge, tanto en el nivel anterior como en este, aunque con frecuencias muy bajas, apuntando hacia la futura consideración de los conjuntos como objetos y no sólo como meras sucesiones de números. Se indican en color azul los términos presentes en niveles anteriores y en negro las nuevas aportaciones.

Tabla 32 (en color azul los términos que ya han aparecido en niveles inferiores; en negro los que se incorporan en este nivel)

Verbos espaciales			Verbos cinético-temporales		
Finitud	**Infinitud**	**Otros**	**Finitud**	**Infinitud**	**Otros**
Alcanzar Llegar Terminar Acabar Desaparecer Gastarse Conseguir	Seguir Alargar Añadir Aumentar Continuar Superar Crecer Extender	Medir Contar Saltar Comparar Caber	Alcanzar Llegar Terminar Acabar Parar	Cansarse Aburrirse Rendirse No acabar No parar Seguir Seguir y no acabar Seguir y seguir Avanzar	Tardar Durar Saltar Ir (+ gerundio) Empezar (antes que) Costar

En cuanto a los adverbios, destaca la incorporación del adverbio de cantidad *casi*, que contribuirá a materializar el modelo de aproximación y eludir el infinito o los infinitésimos [*casi infinito*, *casi invisible*], y la locución adverbial *poco a poco* para reforzar la perspectiva potencial.

También se recogen en este nivel los primeros adjetivos con referencias temporales [*duradero*, *eterno*] y se acentúa el uso de otras expresiones típicas asociadas al infinito potencial tales como *hasta donde* [*tantos como*, *tan grande como*] *queramos*.

Tabla 33

Adverbios	Adjetivos		Sustantivaciones, adverbializaciones y otros términos y expresiones
Aproximadamente	Impronunciable	Ilimitado	Hasta / El más allá
Periódicamente	Inimaginable	Largo	Me llevaría/tardaría toda la vida
Sucesivamente	Incontable	Gigante	Todo el rato / Todo el tiempo
Infinitamente	Incalculable	Grande	Llegar un momento en que... / Hasta que…
Continuamente	Indefinido	Mucho	Todo, nada
Eternamente	Impreciso	Rápido	Prolongar hasta donde queramos
Bastante	Interminable	Lento	Todo el tiempo que quieras
Mucho	Inacabable	Lejano	Cabrán tantos como quieras
Siempre	Inagotable	Inmenso	Tan grande como queramos
Nunca	Irreducible	Duradero	Siempre hay otro más grande / pequeño
Jamás	Inalcanzable	Eterno	Cada vez más pequeño
Tarde o temprano	Insuperable	+	Casi infinito / casi invisible
Cerca / Lejos	Insondable	Superlativos	Infinidad
Casi	Intangible		Eternidad
Poco a poco	Imposible		

Podemos observar que los registros para expresar el infinito, aún en su versión potencial, son más numerosos que los empleados para referirse a la finitud [*llega un momento en que..., al final, hasta*, *acaba desapareciendo*]. Esta riqueza pone de manifiesto la dificultad de aprehender el concepto bajo su sentido actual; el sujeto intenta acotarlo desde todas las vertientes a las que le permite acceder su bagaje lingüístico. Por su parte, las funciones que desempeña el término "infinito" en las expresiones utilizadas por los estudiantes de este nivel son similares a las del nivel anterior, atributo o sustantitvo, como se puede observar en la tabla 34.

Tabla 34	Función gramatical del término "infinito"
Los números son infinitos	Uniendo segmentos se hace infinito
La cantidad de números es infinita	Llegaremos a un número infinito
El resultado es infinito	Se extiende / Sigue hasta el infinito
Las líneas son infinitas	El infinito nunca tiene fin
Hay infinitos números / decimales	Si dices infinito no te pueden superar
Pueden entrar / caber infinitos puntos	

6.2.2.3. ELEMENTOS SIMBÓLICOS.

De nuevo podemos observar que las respuestas relacionadas con operaciones que implican los conceptos de infinito o bien de proceso secuencial se pueden agrupar entre aquellas que se limitan a constatar la posibilidad de repetir indefinidamente una cierta operación, *siempre hay una mitad*, aquellas otras que además se pronuncian sobre la existencia o no del resultado, "la suma de todos los demás segmentos juntos suman 1 m.", o bien sobre la viabilidad de la operación en cuestión: "no se podría sumar exactamente porque los últimos números serían diminutos", "terminarías llevándote tantas que no podrías realizar la resta", "si le sumas lo mínimo a 1,999… sale 2", "al dividir y dividir entre 2 sale 0". Además, dentro de todas las anteriores, también es posible encontrar una serie de respuestas en las que se afirma una cierta propiedad o resultado: "siempre habrá la mitad de la mitad", "los números pueden crecer añadiendo otros números", "cada vez que divido los decimales se hacen más grandes", "la suma de infinitos números es infinito", etc. En este nivel se ha incrementado sensiblemente la gama de imágenes que alberga el ECN.

Tabla 35	Elementos simbólicos: operacionales
Siempre habrá la mitad de la mitad Siempre se puede sumar / dividir cierto número Sí se podría hacer la resta pero me tiraría toda la vida Los números pueden crecer añadiendo otros números Cada vez que divido, los decimales se hacen más grandes	
Terminarías llevándote tantas que no lo podrías realizar [7,4242... – 3.1515...] Si fuera una cifra terminada sí se podría restar [7,4242... – 3.1515...] No se sabe cuál es el último número del conjunto, por lo tanto no se le puede restar un millón Como los números son infinitos no sabríamos a qué número restarle un millón No se podría sumar exactamente porque los últimos números serían diminutos No se puede calcular porque siempre se puede dividir entre 2 No se podría llegar a 1/4 que sería el más pequeño El denominador se iría haciendo cada vez más grande pero los números son infinitos y, por lo tanto, no terminaría de hacerse más pequeño el resultado Se obtendrá un número muy pequeño porque se puede dividir muchísimas veces y no parar	
Al segmento de 1 m. le sumas todos los demás segmentos que juntos también suman 1 m Si le sumas lo mínimo a 1,999… sale 2 Al dividir y dividir entre 2 llegas a 0 Si dices infinito por infinito ganarás el juego La suma de infinitos números es infinito	

En lo que se refiere a los elementos relacionales no observamos variaciones importantes con el nivel anterior siendo análogas las imágenes que se recogen en un caso y en otro respecto al modelo de *inclusión* y al modelo *infinito = infinito*; no obstante, es conveniente advertir la aparición, en el nivel que nos ocupa, de un tipo de elemento que establece una relación singular entre dos conjuntos o series de números y que tendrá consecuencias cruciales, en niveles superiores, a la hora de comparar el cardinal de dos conjuntos; se trata de una relación de funcionalidad entre los elementos de dos conjuntos: "B será cuatro veces más grande que A porque es el número que ponga en A por 4" o bien, "si hay límite, la serie B lo va a alcanzar antes porque es 4 veces la serie A".

Tabla 36	Elementos simbólicos: relacionales
Siempre hay uno mayor / más pequeño que otro Al ser los números infinitos no existe el valor más grande Decir el último número de los que existen No hay un número que sea el más grande ni el más pequeño 1,999..., es justo el anterior a 2 / 1,9 es el número más cercano a 2	
El primer conjunto es mayor porque el otro va saltándose números El primer conjunto es mayor porque empieza antes No se pueden comparar / ordenar porque son infinitos Como en cada conjunto hay muchos no se podrían ordenar No se pueden comparar porque es casi imposible contar los granos de arena, las estrellas, los puntos, ... Serían iguales ya que no importa que vayan de 1 en 1 o de 4 en 4 B será cuatro veces más grande que A porque es el número que ponga en A por 4 Si hay límite, la serie B lo va a alcanzar antes porque es 4 veces la serie A	

6.2.2.4. ELEMENTOS FINITISTAS/INFINITISTAS.

El enriquecimiento del lenguaje con la edad permite expresar con un mayor número de matices las diferentes interpretaciones de la "realidad" finito/infinito mediante la incorporación de metáforas más sofisticadas, locuciones ad hoc o, simplemente, la terminología propia de la instrucción matemática una vez interpretada por el esquema conceptual de cada individuo. La finitud puede proceder de limitaciones numéricas tal como "ganaría el juego diciendo el número más pequeño que existe" o bien de limitaciones físicas como "llega un momento en que el segmento ya no se puede cortar más", "cabrían muchos puntos pero habría un final" o bien "la línea más larga mediría unos 30 cm porque un cuaderno mide eso". Esta última respuesta resulta de una lógica impecable y, como escribe Monaghan, es un tipo de respuesta completamente previsible; en cambio, si la enfrentamos a la respuesta "mediría una longitud infinita" de otros estudiantes, observamos que existe una fractura en la actitud de unos sujetos frente a otros ante la interpretación del mundo que les rodea y la capacidad para desarrollar abstracciones a partir de una realidad material. En la expresión "si dices infinito el juego se acabará" lo que encontramos en realidad no es una actitud infinitista sino la asociación del término "infinito" a la expresión *el más grande*; se trata de un fenómeno de sincretismo característico de los periodos de transición: se adoptan nuevos términos o expresiones con significados equivalentes a los antiguos.

Tabla 37	Elementos finitistas
Para ganar tienes que decir el número más pequeño [el último número de los que existen] a la primera	
Ganaría diciendo el número más pequeño que existe, por ejemplo el 0,000001	
Diría el 0,1 que es el más pequeño después del 1	
Si el primero dice infinito el juego se acabará	
Cabrían muchos puntos pero habría un final	
10.000 puntos ya que 10.000 son muchos y no creo que se puedan hacer más / 30.000 por lógica	
Hay un momento en que tendrá que parar de cortar ya que el segmento se acabará porque no es infinito	
No queda nada ya que el segmento tiene principio y fin	
Al final ya no se podría partir puesto que se llegaría al átomo	
Llega un momento en que ya no se puede cortar más / seguir dividiendo	
Sería una longitud muy grande pero sí se podría medir	
El resultado depende de cuántos segmentos haya	
La línea medirá unos 30 cm. porque un cuaderno mide eso	
Después de muchos nueves pasará al 2	
Si fuera una cifra terminada sí se podría restar [7,4242… - 3.1515…]	
Sí se puede hacer pero te llevaría más de dos horas	

Expresiones tales como "sí se podría hacer, pero me tiraría toda la vida restando" o "se puede restar pero saldría larguísima" contienen el germen de la contradicción interna entre una actitud finitista, *se podría*, y otra infinitista, "toda la vida restando", "saldría larguísimo", que aunque explícitamente supone ciertas limitaciones, en realidad representan la intención de superar cualquiera de ellas. También respuestas como "al final se obtendrá un segmento muy

Tabla 38	Elementos de transición finitista/infinitista
Sí se podría hacer, pero me tiraría toda la vida restando / No podría o tardaría muchísimo	
Sí el que empieza dice 0.0000(infinitos ceros)1 ganará	
Se puede restar pero saldría larguísima [7,424242... - 3.151515...]	
Un segmento cada vez más pequeño hasta que ya no lo puedas cortar por la mitad	
Al final se obtendrá un segmento muy pequeño	
Si haces demasiadas mitades desaparecería el segmento	
Se podrían seguir cortando miles de veces	
Al final las dos series llegarán a un número muy grande	
No se cuántas veces tengo que dividir	
No sabemos hasta dónde puede llegar / Nunca vas a saber cuándo llegas al final	
Quedarán millones y millones de números porque los números son infinitos	
Cabrá más de un billón de puntos	
No puede ganar nadie porque el número más pequeño sería un número muy infinito	

pequeño" dejan abierta la puerta a un proceso infinito con la indefinición de la expresión *muy pequeño*. Por último, expresiones tales como "no se cuántas veces tengo que dividir" o "no sabemos hasta dónde puede llegar" reflejan la ambigüedad referida entre ambas actitudes y apuntan hacia el modelo de *indefinición*.

Los elementos infinitistas potenciales responden a estructuras gramaticales muy bien definidas que implican, en su mayor parte, la utilización de los términos *siempre*, para referirse a una acción repetible indefinidamente, y *nunca*, si se quiere expresar la imposibilidad de alcanzar un determinado objetivo, así como expresiones del tipo *tantos como* [*todos los que*, *hasta donde*] *queramos*, *tan pequeño* [*grande*] *como se quiera*, etc. También es posible encontrar adverbios de modo, *continuamente*, o combinaciones de diversos tiempos verbales, *seguir y seguir*, *van creciendo*, que marcan la pauta de un proceso inacabado; en particular la construcción [presente o futuro] + gerundio es habitual a la hora de expresar un proceso secuencial.

Tabla 39	Elementos infinitistas potenciales
Por muy pequeño que imagines un número siempre existirá otro menor	
Son infinitos porque siempre hay un número mayor que otro	
Siempre se puede sumar cierto número	
Nunca acabará porque siempre puedes dividir/partir por la mitad	
Hay infinitos puntos porque siempre cabrá un punto más	
La línea será infinita porque siempre puede hacerse más larga / Siempre se podría seguir dibujando	
Puedes estar diciendo números continuamente	
Quedan infinitos porque aunque le quites un millón, los números continúan	
No existe el número más grande porque [no se puede alcanzar] los números no acaban	
Los números siguen y no acaban	
Nunca se acabará de unir segmentos	
Nunca llegará a dos metros ya que siempre vamos sumando la mitad de la mitad	
Los dos conjuntos son iguales porque los números nunca se acaban, son infinitos	
No se puede restar porque nunca termina [7,4242… - 3.1515…]	
Hasta el infinito nunca se llega	
No se puede medir porque no terminas nunca	
Se obtiene un segmento [un número] cada vez más pequeño / tan pequeño como quiera	
Puedes poner todos los puntos que tu quieras	
Podemos alargarlas hasta donde queramos	
La longitud se alarga poquito a poco	

También en esta ocasión, al igual que en el nivel anterior, observamos en expresiones del tipo *los dos llegarán a ser infinitas, escribir hasta el infinito, da 0, cabrán infinitos puntos, todas las mitades suman 1 metro*, etc. la imagen mental de cierto objeto, no muy bien definido, pero susceptible de ser manipulado como tal para representar la numerosidad o el cardinal de una colección de objetos matemáticos.

Tabla 40	Elementos infinitistas actuales
Los dos igual porque los números son infinitos	
Aunque una de ellas acabe antes las dos llegarán a ser infinitas	
Da 0, porque cada vez que se divide el número va disminuyendo	
Cabrán infinitos puntos	
[Llega un momento en que] no queda nada porque al final se termina gastando el segmento	
Todas las mitades miden 1 metro y si añades el otro metro quedan 2 metros	

6.2.2.5. ELEMENTOS OBSTÁCULO Y MODELOS TÁCITOS.

Los obstáculos tácitos epistemológicos no han variado prácticamente respecto al nivel anterior, salvo la introducción de los términos *ilimitado*, para justificar la identidad de cualquier cantidad infinita, y *equivalente* para expresar dicha identidad.

Tabla 41	**Elementos obstáculo: tácitos epistemológicos**
Infinito = infinito	Los dos igual porque los números son infinitos / porque llegan al mismo sitio El número de estrellas y el de los naturales son iguales porque son ilimitados Si se extienden hasta el infinito serán equivalentes los dos conjuntos
Inclusión	El primero es mayor porque ha empezado antes El primer conjunto es mayor porque en el segundo te saltas números El primero es mayor porque cuenta todos los números y en el segundo sólo los impares
Punto = Marca	Supondremos a un punto por mm. Depende de la medida de la punta 100 puntos / 900 puntos

En cuanto a los obstáculos didácticos encontramos que se consolidan las cuatro categorías establecidas. Las imágenes de “el más grande” y “el más pequeño”, o bien alguna expresión equivalente, aunque reducen sus porcentajes en este nivel aún forman parte del ECN. La indefinición, a veces imprecisión o a veces imposibilidad, que se atribuye a la idea de infinito también se encuentra representada ampliamente en este nivel.

Tabla 42	**Elementos obstáculo: tácitos didácticos**
El más grande / el más pequeño	Yo diría el “último número de los que existen” y ganaría Puedo decir el número más alto cuando quiera Si yo digo infinito no me podrá superar El que diga 0,1 ganará El juego podría ser interminable si ninguno de los dos jugadores dijera infinito
Indefinición	No se sabe porque no se acabaría / porque los números son infinitos No se cuántas veces tengo que dividir No podemos contar los que quedan porque son infinitos No puedes restar si no sabes cuántos hay Infinitos porque no sabemos hasta dónde pueden llegar No se pueden comparar porque son todos infinitos Los puntos son infinitos y no se podrían calcular con exactitud Son infinitos porque puedes poner los que quieras No se pueden contar los puntos, depende de los que ponga cada persona
Divergencia	La suma de infinitos números es infinito Da infinito porque cada vez se va uniendo un trozo más Es infinito porque siempre vas a sumar una mitad La suma de todos los trozos dará infinito porque puedes partir el segmento por la mitad infinitas veces

En las categorías que hemos diferenciando dentro de los elementos obstáculo materiales encontramos imágenes similares a las del nivel anterior. No obstante, aquellas que se refieren a limitaciones puramente físicas son las más numerosas; en todas ellas se establece un modelo material tácito que sustituye al planteamiento teórico de la cuestión y que asume las propiedades de dicho modelo incluidas las limitaciones propias de nuestros sentidos. Es este el caso más evidente del lenguaje metafórico que caracteriza el esquema conceptual de infinito.

Tabla 43	Elementos obstáculo: tácitos materiales
Limitaciones físicas	Si haces los puntos con lápiz y papel cabrán menos que si los haces con un microscopio y utensilios adecuados Para calcular el número de puntos habría que tener en cuenta la separación mínima de un átomo No se podría hacer porque serían muchos puntos y te confundirías al contarlos Si llenamos el cuadrado de puntos estaría todo pintado y ya no los podríamos contar Los trozos van siendo más pequeños y aunque no se podrían medir seguirían estando allí Llega un momento en que no se ven los trozos Cuando se llegue a un segmento "microscópico" ya no se podría cortar más Depende dónde dibujes la línea será más larga o más corta: en un folio, sobre la Tierra, en el espacio, el diámetro de la Tierra No se puede dibujar porque una línea es infinita No hay tiempo suficiente para decir todos los números
Aproximaciones	Ambos conjuntos tienen casi los mismos porque son infinitos Aproximadamente cabe 1.000.000 de puntos Habrá un momento en que ya no puedas dividir más y la suma será aproximadamente 2 m

En este nivel podemos apreciar nuevos tipos de contradicciones junto a las ya detectadas en 6PRI. Así, en relación con la suma de infinitos términos recogemos la respuesta 6 en la que se admite simultáneamente la convergencia y divergencia de la serie. Por otra parte, en la respuesta 5 se enfrenta una postura infinitista tal como *cada vez más pequeño* con otra finitista *hasta que ya no lo puedas cortar más*.

Tabla 44	Elementos obstáculo: contradictorios
1. Depende cómo sean los puntos pero cabrían miles 2. En los dos cuadrados hay infinitos puntos siempre que los puntos se hagan con un bolígrafo, un lápiz, … 3. Infinitos porque no sabemos hasta dónde puede llegar 4. La línea es infinita porque si no tiene fin no puedo ver cuánto mediría 5. Un segmento cada vez más pequeño hasta que sea tan pequeño que no lo puedas cortar por la mitad 6. Si la cantidad de segmentos es infinita, la medida de todos será infinita, aunque si continuamos dividiendo habría un segmento que no mediría ni una nanomilésima de milímetro, así que tampoco sería una longitud muy grande 7. Aunque una de las series acabe antes, las dos llegarán a ser infinitas 8. El juego durará hasta que uno diga infinito porque nunca se acaba 9. Las dos alcanzarán un valor tan grande como queramos pero la serie B tendrá un valor más grande	

6.2.2.6. ENTREVISTAS.

Como ya se ha recogido en el capítulo 4, el objetivo de las entrevistas es el de incorporar la mayor cantidad de matices a las respuestas registradas en los cuestionarios escritos así como el de resolver ambigüedades sistemáticas encontradas en los mismos. De los resultados de las entrevistas podemos observar la fortaleza de ciertos modelos tácitos del esquema conceptual, algunos de ellos frente a argumentos contradictorios planteados en el diálogo.

Tabla 45	Entrevistas: ratificaciones
Los números son infinitos porque siempre se puede sumar otro y así constantemente El número de puntos en un cuadrado es infinito porque puedes poner unos puntos encima de otros El número de puntos en un cuadrado depende del tamaño de los puntos Si los puntos fuesen muy pequeños cabrían infinitos En un cuadrado puede haber millones de puntos pero no infinitos porque se acabaría llenando Aunque en los dos cuadrados hay infinitos tiene que haber más puntos en el más grande Podemos llegar a puntos de tamaños inapreciables pues habría millones de ellos Los dos conjuntos son infinitos aunque uno tenga un millón menos ya que todos los infinitos son iguales El número de estrellas, los números naturales y los puntos en un cuadrado son iguales porque son infinitos No se pueden ordenar todos esos conjuntos porque no sabemos la cantidad exacta Si nos detenemos en algún punto, habría más números naturales que múltiplos de tres, pero como son infinitos no se pueden comparar	
Si continuamos dividiendo entre dos no se llegará a cero porque hay infinitos decimales Si continuamos dividiendo entre dos se llegará a cero realizando muchísimas divisiones Igual que un número se puede dividir, un punto también se puede seguir dividiendo 2 es el siguiente a 1,999… porque si le sumas cualquier número por pequeño que sea pasa a 2 1,999… y 2 no son iguales porque queda un poquito entre los dos / porque se escriben distintos El número más pequeño sería cero coma infinitos ceros y un uno Cuando llegas al átomo ya no se puede seguir dividiendo el segmento porque es lo mínimo. Si lo calculas con números como no se acaban puedes seguir, pero si lo calculas materialmente pues llegas al átomo y se acaba Un número se puede dividir todas las veces que quieras pero un segmento no Si vamos dividiendo un segmento por la mitad siempre queda otro segmento	
Si unimos infinitos segmentos cada uno la mitad del anterior obtendríamos un segmento infinito porque nunca se acaba de añadir, siempre se va alargando aunque lentamente Si pones todas las mitades de estos segmentos dentro de un segmento de un metro acabas por pasarte del extremo	
Da igual quién comience el juego porque tu puedes decir un número más alto que otro pero nunca se acaba Da igual quién comience porque el juego consiste en que el primero que se canse ha perdido Si alguno dice infinito en el juego no vale porque no especifica el número, si no el otro puede decir infinito mas uno	
Sí se puede realizar la resta porque aunque haya infinitos decimales pones un periodo y haces la resta	

También se recogen en las entrevistas cambios respecto de la postura mantenida en el cuestionario tras la mediación del compañero o compañera que participa en la conversación enfrentando sus argumentos, o bien del entrevistador que puede llevar a cabo, eventualmente, una *tarea de conexión* (Garbín y Azcárate, 2002) con otros contextos o representaciones con el fin de explorar la resistencia de determinados modelos intuitivos. En algunos de los casos no se produce un cambio y su aceptación definitiva, sino que el individuo se hace consciente de una contradicción latente tras su actitud inicial. En la tabla 46 se registran las rectificaciones más representativas.

Tabla 46		Entrevistas: rectificaciones
Si divido 35 entre 2 da 17 y pico y ya no se podría continuar porque sale un número decimal	→	Si valen los decimales sería infinito porque llegaría muy lejos
Si continuamos dividiendo entre dos pasaría por debajo de cero	→	No, no pasaría porque no dividimos números negativos
A los números naturales no le puedes quitar un millón porque no conoces el fin	→	Sí se podría, pero quedarían infinitos
No se puede resolver la resta 7,4242… - 3,1515… porque no se sabe dónde termina	→	Sí se podría pero el resultado no terminaría

Tabla 46 (cont.)		Entrevistas: rectificaciones
Mediría infinito porque unimos infinitos trozos	→	Si los vamos situando sobre un segmento de un metro… entonces serían dos metros
La unión de todos tendría una medida infinita	→	Pero no podrían salirse de un segmento de dos metros
Yo preferiría ser la segunda en este juego para ver el número que dice la otra persona	→	Se pueden poner muchos decimales y entonces no acabará el juego; es indiferente quién comience
Siempre quedará algo ya que vas haciendo mitades	→	Pero si sigues cortando entonces ya no quedaría nada
La línea más larga depende del espacio que tengas	→	Si tuviese todo el espacio que pueda imaginar sería infinita
No se podría saber los puntos que hay en un cuadrado porque te cansarías de poner tantos	→	Sería infinitos pero tendrían que ser microscópicos
Las dos series alcanzarán un valor tan grande como queramos	→	Si uno es infinito el otro sería 4 por infinito…. supongo que infinito también… no se… uno es x y el otro es $4x$

Como ya hemos indicado, también surgieron nuevas contradicciones a pesar de la mediación a través de tareas de conexión, o simplemente giros hacia posiciones aún incoherentes u obstaculizadoras. La omnipresencia de contradicciones o su reconversión en otras diferentes pone de manifiesto la sensibilidad de algunos de los modelos establecidos frente a la variación de contexto o de representación dentro de un mismo contexto. En los niveles que nos hallamos la corporeización del concepto aún es demasiado dependiente del lenguaje, y su ambigüedad, que la ha originado.

Tabla 47 Entrevistas: contradicciones
Aunque ambos conjuntos sean infinitos yo creo que hay un punto final, no se…, cualquier número, y si uno tiene un millón menos pues el conjunto que queda es más pequeño
Si quitas un millón, ambos conjuntos serán infinitos; uno tendrán un millón menos pero no será mucha la diferencia
Los dos son infinitos; como uno de ellos va de tres en tres tiene menos números pero como son infinitos no se nota…
Igual en los dos conjuntos porque como nunca pararías de seguir contando no podrías llegar a compararlos
1,999… y 2 son distintos porque siempre hay una separación entre ellos, pero no hay ningún número entre ellos
Prefiero ser la segunda porque diría un cero más e iría ganando, pero da igual porque él luego me volvería a ganar
No existe la línea más larga porque siempre puedes estar dibujando y mediría infinito
Si unes todas las mitades de los segmentos tendrían que sobrepasar el extremo del segmento de dos metros porque vas sumando y los números no se acaban

Y, por último, dentro de la información que proporcionaron las entrevistas es posible extraer una serie de definiciones que forman parte del ECN y que permiten justificar algunos de los modelos hallados en el capítulo anterior. La amplia gama de definiciones registradas en las entrevistas frente a las obtenidas en el cuestionario escrito se debe a la necesidad que siente el sujeto de resolver sus contradicciones frente a las tesis aportadas en los diálogos y no siempre presenta un grado de consolidación elevado, especialmente en lo que al concepto de infinito se refiere; por el contrario, como ya se ha podido apreciar en el capítulo 5, la definición de "punto", subsidiaria de aquél, presenta una solidez considerable que condiciona las respuestas que implican su uso.

Tabla 48	Entrevistas: definiciones
Un punto es un círculo pequeño / Un punto podría tener forma de círculo o de cuadrado Un punto es como una marca redonda Un punto muy grande puede ser un punto mientras esté relleno y no sea una circunferencia Una marca con un rotulador grueso también es punto que a su vez se compone de puntitos más pequeños Un punto es la marca que deja un boli o un rotulador pero a partir de cierto tamaño ya no sería un punto Un punto es la intersección de dos segmentos, aunque en clase suelen dibujar un segmento y a cada extremo le llaman punto A y punto B Si estás escribiendo letras muy grandes un punto puede ser muy grande, puede tener cualquier tamaño	
El infinito es un número que no se sabe; por ejemplo si en una división te sale 1,3333…, el 3 es infinito porque no sabes cuántos treses hay Las estrellas son infinitas porque nunca acabas de contarlas Infinito es que no acaba y que no puedes llegar nunca al punto donde no acaba El infinito es algo que no se puede dibujar El infinito es un territorio muy largo que nunca acaba El infinito es como un círculo que da vueltas una y otra vez, no como un segmento que empieza aquí y termina allí No puedo decir lo que es el infinito	

6.2.3. SEGUNDO CICLO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA: 14-16 AÑOS

6.2.3.1. ELEMENTOS PROPIOS.

Comparación de conjuntos. En esta ocasión los dos aspectos más reseñables son, por una parte la desaparición como elemento propio del ECN de la imagen que atribuye a un subconjunto infinito un cardinal superior al del conjunto a que pertenece y, por otra, la consolidación aunque lenta de aquella otra imagen que establece la equivalencia o "igualdad" entre conjuntos infinitos. Esto ha supuesto un incremento sustancial de sujetos que suscriben la implicación finitista

$$Si\ \ B \subset A \ \ \rightarrow \ \ \ Card(B) \ < \ Card(A)$$

y algo menor de aquellos otros que mantiene la equivalencia "porque son infinitos". También es de destacar la incorporación del elemento propio *queda un millón menos* o *infinitos menos un millón* que, como ya se ha visto en el capítulo anterior, se corresponde en buena parte con la expresión *no se sabe los que quedan* que refleja el carácter indefinido atribuido a infinito; sólo a partir de 4ESO hay un reconocimiento explícito significativo de la infinitud del conjunto resultante de eliminar un millón de sus elementos. La influencia del contexto se puede apreciar claramente al comparar, véase la tabla 49, los resultados de los dos primeros ítems y los del cuarto; mientras que en todos ellos los porcentajes del modelo de *inclusión* son semejantes, alrededor al 40%, en el caso de 2,131131… ha resultado más evidente la infinitud de los dos conjuntos a comparar.

El incremento porcentual de aquellos individuos que dan una ordenación de los conjuntos indicados es ya muy significativo y corresponde a tres de cada cuatro, mientras que ya no es un elemento propio del ECN la imagen de que *no se pueden ordenar* tales conjuntos. Sin embargo, aunque ya supera el 50% la imagen de $\mathbb{N}$ como el mayor de los conjuntos dados, se acentúa la presencia del elemento *el conjunto de puntos en el interior de un cuadrado es el menor de los conjuntos*; la naturaleza material con que se dota a los puntos geométricos y los límites tangibles de un cuadrado de 10 cm. justifica la práctica totalidad de este tipo de respuestas cuyo eco hallamos en el tipo de ordenación mayoritario, $d < e < b < a < c$, donde resulta evidente que el continente define prioritariamente el tamaño de un conjunto frente a su contenido.

Tabla 49	Elementos propios: comparación de conjuntos discretos	3ESO	4ESO
$\mathbb{N}$ – {1, 2, 3, …, 10.000.000}	Quedan infinitos No se sabe los que quedan Queda un millón menos, infinitos menos un millón	28% 18% ------	47% 18% 21%
$\mathbb{N}$ *vs.* $\mathbb{N}$ – {1, 2, 3, …, 10.000.000}	El primero contiene más o porque empieza antes Son iguales o porque los números son infinitos	43% 25% 25% 17%	40% 20% 33% 22%
$\mathbb{N}$ *vs.* {3, 6, 9, 12, …}	El primero contiene más o porque va de uno en uno Son iguales o porque los números son infinitos	47% 26% 24% 15%	47% 21% 27% 18%
a) Número de estrellas *b)* Número de granos de arena *c)* Números naturales *d)* Números de puntos en un cuadrado *e)* Número de células en el cuerpo	Dan una ordenación El menor es *d)* El mayor es *c)* $d < e < b < a < c$	73% 50% 50% 31%	76% 56% 58% 33%
2,131131131 . . .	El 1 y el 3 aparecen infinitas veces El 1 y el 3 aparecen las mismas veces: infinitas El 1 aparece más veces que el 3 o El doble de veces	45% ------ 41% 27%	63% 16% 37% 29%

En lo que a conjuntos continuos se refiere observamos una cierta consolidación en la imagen infinita de estos conjuntos, si bien en el caso de conjuntos unidimensionales no se explicita en un porcentaje significativo. El elemento asociado a la indefinición de infinito, *no se puede saber*, se muestra estable al llegar a este nivel y sigue vinculado en la mayor parte de los casos a la dependencia del tamaño variable que se atribuye a los puntos que componen estos conjuntos. Esto viene a explicar que entre una cuarta y una tercera parte de los sujetos establezca una ley de proporcionalidad entre el número de puntos de conjuntos geométricos infinitos y las dimensiones de las figuras que los contienen. Así, como ya hemos mencionado más arriba, las dimensiones del continente, o bien su ausencia como veremos más adelante, son decisivas a la hora de cuantificar el contenido de conjuntos continuos. De nuevo observamos la influencia que ejerce la variación de representación sobre los modelos utilizados; en efecto, en este caso, el modelo de inclusión viene afectado, dentro de un contexto geométrico y acotado, por el cambio de representación, duplicándose los porcentajes del segundo ítem respecto del primero.

Tabla 50	Elementos propios comparación de conjuntos continuos	3ESO	4ESO
Puntos en un cuadrado	Hay infinitos No se puede saber o porque depende del tamaño Depende del tamaño En el de 30 cm. hay más puntos Dan una cantidad	16% 43% 34% 37% 33% 26%	28% 43% 34% 42% 29% 25%
Puntos contenidos en las líneas A, B y C	La línea A es la que más puntos tiene o porque es la más larga	60% 39%	59% 32%

Divisibilidad indefinida. En este caso, tanto bajo un contexto numérico como geométrico, se incrementa la presencia de la imagen correspondiente a que *el proceso no acaba*, si bien dicho incremento es más acentuado en el primero de ellos. Mención aparte merece la estabilidad de los resultados de la última cuestión de este apartado sobre la equivalencia de 1,999… y 2; para un porcentaje muy elevado de sujetos conviven sin mayor problema el hecho de que se trate de dos números diferentes y a la vez que no exista valor alguno entre ellos, mientras que por otra parte más de la quinta parte de los estudiantes de este nivel aún no comprende el significado de periodicidad e intercala un número entre ambos.

Tabla 51	**Elementos propios: divisibilidad indefinida**	**3ESO**	**4ESO**
División de un segmento por la mitad	El proceso "no acaba"	22%	37%
	o Porque siempre hay un segmento más pequeño	16%	21%
	El proceso "acaba"	50%	48%
	o Un segmento o muchos segmentos	24%	20%
División de un número por la mitad	El proceso "no acaba"	29%	43%
	o Es infinito	17%	27%
	El proceso "acaba"	26%	24%
	o Da un número decimal	15%	19%
	No se puede saber	16%	------
La máquina que divide entre 2	El proceso "no acaba"	32%	42%
	o Siempre se puede dividir entre 2	------	19%
	No se puede saber	28%	34%
El número más pequeño entre 2 y 3	Sí es posible averiguarlo	43%	38%
	o 2,1 ó 2,01	20%	------
	o 2,000…1	19%	17%
	No es posible averiguarlo	38%	45%
	o Porque hay infinitos ceros o decimales	20%	28%
¿Existe algún número entre $1,\widehat{9}$ y 2?	No existe ninguno	70%	75%
	o Porque 2 es el siguiente	20%	24%
	o Porque hay infinitos nueves o es periódico	30%	33%
	Sí existe	24%	21%

Sumas infinitas. Destaca en primer lugar la gran estabilidad que se da a lo largo de los tres niveles considerados hasta ahora, correspondientes a cinco cursos escolares, en la cuestión referente a la unión de segmentos procedentes de la división de uno dado. El equilibrio entre la respuesta finita y la infinita es también un resultado a considerar por su elevado grado de estabilidad. La profundización en este tópico a partir del presente nivel nos aporta ciertos resultados que es preciso tener en cuenta. En primer lugar, dentro del contexto geométrico, podemos observar que cuando existe un contorno o cota que limite la suma, la respuesta infinita presenta porcentajes inferiores a cuando tal limitación no es explícita como en el caso de la unión de segmentos o de la suma de series numéricas. En estas últimas, el resultado infinito es muy superior al finito que no aparece como elemento propio. Debemos descartar la presencia de los puntos suspensivos como factor determinante de las respuestas ya que en las propuestas geométricas también aparecen en las figuras que acompañan al enunciado. De cualquier manera el modelo de divergencia, *la suma de infinitas cantidades da un resultado infinito*, se impone en la mayor parte de los casos, presentando una fuerte implantación en el ECN.

Tabla 52	Elementos propios: Sumas infinitas	3ESO	4ESO
Sumar segmentos cada uno la mitad del anterior	Resultado infinito	45%	48%
	o Porque siempre se suma o nunca se acaba	36%	41%
	Resultado finito	42%	43%
	o 2 metros	23%	22%
Sumar los diámetros de todos los círculos inscritos en un triángulo	Resultado infinito	27%	35%
	o Porque siempre se suma	------	19%
	Resultado finito	23%	27%
	No se puede calcular	38%	31%
	o Porque no se conocen los diámetros	19%	18%
Suma de áreas de triángulos en el interior de una cuadrado de lado 10 cm.	Resultado infinito	42%	40%
	o Porque siempre se suma	29%	27%
	Resultado finito	38%	37%
	o Porque es una figura finita	14%	14%
	No se puede calcular	15%	19%
$\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots$	Resultado infinito	54%	52%
	o Porque siempre se suma	25%	30%
	o Porque hay infinitos números	17%	------
	No se puede calcular	32%	32%
	o Porque sigues sumando	------	20%
$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$	Crece indefinidamente	53%	54%
	o Porque se añade	27%	31%
	Decrece indefinidamente	24%	26%
	o Porque el denominador es cada vez mayor	15%	17%

Operatividad e infinito. En este ciclo se introducen productos que implican números periódicos, las dos primeras cuestiones de la tabla 53, y una aproximación a la "división entre infinito" en las dos últimas. Respecto al primer caso, observamos que aunque los estudiantes de este ciclo conocen la relación entre fracciones y números decimales tal aspecto no se registra como elemento propio del ECN. La imagen indefinida de un número periódico prima en el momento de dar una respuesta, bien para indicar la imposibilidad de la operación, en la primera cuestión, bien para ofrecer un resultado periódico, en la segunda cuestión, que es la imagen dominante en ambos casos. Respecto a la *división entre infinito* destaca el hecho de que en el contexto probabilístico existe cierto reconocimiento de tal operación o, al menos, se le dota de cierto sentido, *P(5) es muy pequeña*, si bien una quinta parte de los sujetos entiende que su resultado depende del dividendo, *P(x) > P(5)*; en cambio, la última cuestión pone más de relieve el cuestionamiento de su existencia; de hecho, en torno al 60% la niega.

Tabla 53	Elementos propios: operatividad e infinito	3ESO	4ESO
Número decimal que multiplicado por 9 de cómo resultado 1	No se puede	61%	56%
	o Porque sólo te puedes aproximar	23%	20%
	o Porque siempre sale mayor o menor que 1	19%	18%
	Sí se puede	18%	30%
	o 1/9 ó 0,111…	------	25%
$0,\overset{\frown}{9} \times 0,\overset{\frown}{9}$	Resultado finito	55%	53%
	o Un número decimal finito (0,9999 ó 0,81)	15%	------
	o 0,999…	17%	26%
	o 0,8181…	18%	------
	El resultado es "infinito"	15%	------
	No se puede calcular	14%	14%

Tabla 53 (cont.)	Elementos propios: operatividad e infinito	3ESO	4ESO
Probabilidad de extraer un 5 entre los números naturales: P(5). Probabilidad de extraer un número entre 1 y 10.000.000: P(x)	P(5) = 1/∞ P(5) es muy pequeña P(x) = 10.000.000 / ∞ P(x) > P(5)	16% 26% ------ 22%	36% 24% 23% 18%
¿Origen? $\cdots \frac{1}{35}, \frac{1}{34}, \frac{1}{33}, \frac{1}{32}, \cdots$ ¿Final?	No tiene origen o Porque hay infinitos números Sí tiene origen o Es infinito No tiene final Sí tiene final o Es 1	58% 16% 15% ------ 27% 40% 21%	61% 18% 26% 18% 31% 52% 33%

Lenguaje del infinito. Por último, en lo que se refiere a elementos semánticos y funciones gramaticales relacionadas con infinito encontramos en este ciclo que las interpretaciones literales del término así como las referencias espaciales y numéricas incrementan sus porcentajes consolidando su presencia como elementos propios del ECN; así mismo, el adjetivo es la función que permanece con dicha categoría frente al adverbio y el verbo hasta ahora presentes en los niveles inferiores.

Tabla 54	Elementos propios: lenguaje del infinito	3ESO	4ESO
Expresiones equivalentes a infinito	Interminable Referencias espaciales Sin fin Referencias numéricas	63% 35% 33% 19%	58% 27% 32% 24%
Funciones lingüísticas	Adjetivo Adverbio Verbo	50% ------ ------	47% 15% 15%

6.2.3.2. ELEMENTOS METAFÓRICOS.

En este nivel continúan apareciendo imágenes relacionadas con nuestras capacidades de observación y medición tales como “aunque no los veamos, pueden llegar a ser microscópicos”, “al final el círculo ni se verá y no se podrá medir”, etc.; imágenes sobre la naturaleza del resultado como “acabaría destruido”, “dejaría de existir”, “tan pequeño que desaparece”, etc.; y, por supuesto, sobre el carácter secuencial de los procesos descritos como “seguir prolongando”, “cadena sin fin”, “alargando la sucesión indefinidamente”, “está muy cerca del 2”, etc. Sin embargo, se incorpora un nuevo elemento metafórico espacial que hace referencia al tipo de *recinto, espacio* o *contenedor* que alberga los elementos de los conjuntos considerados: “están en un sitio cerrado”, “te quedas sin espacio para rellenar”, “es un espacio delimitado”, “está contenido en algo y se acabará”, etc. Este tipo de imagen ampliamente implantada en el ECN condiciona definitivamente la actitud de los sujetos ante el resultado de determinadas operaciones o relaciones como ya hemos visto en repetidas ocasiones. Frente a ésta hallamos su contrapuesta, “puedes unir y seguir uniendo porque no hay un espacio definido”, uno de los argumentos del modelo de divergencia. También la idea de inclusión se recoge en algunas expresiones con el fin de establecer un orden entre conjuntos.

Tabla 55	**Elementos metafóricos básicos: métrico-espaciales**
Mirando por el microscopio se podría seguir dividiendo el segmento Los segmentos se siguen cortando aunque no los veamos Si es un objeto real, por ejemplo un palo de madera, lo mínimo que puedes obtener al final es un átomo de materia En realidad hay un tope de tamaño que no se puede dividir Los círculos puede llegar a ser microscópicos Al final las mitades serían microscópicas y para la vista humana sería como un punto No se puede saber porque al final el círculo ni se verá y no se podrá medir [cantidades tan pequeñas] El segundo conjunto es mayor porque hay más distancia entre número y número Llega un momento en que es muy pequeño, pero siempre habrá una medida / una parte aunque sea pequeñísima Es un número bastante grande y no se puede medir No se puede medir la unión de todos los segmentos pero es finita Depende de qué tamaño haga los puntos Habría infinitos ya que los puntos pueden ser muy pequeños Si el triángulo tiene unas medidas definidas, los círculos se terminarían en algún momento La línea *A* es más larga porque si la presionas se extiende por los dos lados y, por lo tanto, tiene más puntos Todas tienen los mismos puntos porque hay 2 cm. de puntos Aunque tenemos millones [de células] no son infinitas porque están en un sitio cerrado Aunque los números son infinitos, tienen algún límite por remoto que sea Hasta que te quedes sin espacio para rellenar Es un espacio delimitado y se tiene que acabar El resultado es finito porque está contenido en algo y al final se acabará En el primer conjunto entran pares e impares y en el segundo *sólo* entran los pares El primer conjunto abarca del 1 al infinito El segundo conjunto es mayor porque hay más distancia entre número y número	
Depende hasta dónde lleguemos contando Los números son infinitos hasta un punto sin descubrir Todos tienen infinitos y llegarían a ese tope Prolongues lo que prolongues siempre hay un millón más Siempre se pueden seguir prolongando Es una cadena sin fin, incalculable e infinita Siempre queda hueco para otro punto más Sí se llegaría, pero alargando la sucesión indefinidamente Puedes unir y seguir uniendo porque no hay un espacio definido Al no haber un límite, los dos conjuntos tendrían infinitos números	Al final acabaría destruido Se reduciría tanto que dejaría de existir Lo haces tan pequeño que desaparece Después del 1,9.... viene el 2 El 2 es el siguiente de 1,9... El resultado está muy cerca del 2 Todas las líneas contienen miles y miles de puntos consecutivos y muy juntos El primero empieza desde el 1 y el otro mucho más adelante

Los elementos metafóricos cinético-temporales recogidos en este nivel no aportan nuevas imágenes sobre la duración y naturaleza dinámica del proceso a las ya registradas en el nivel anterior debido, como ya se ha indicado, a la mayor sofisticación de tales conceptos; las podemos hallar tanto en contextos geométricos, *acabarían saliéndose los círculos del triángulo*, pero sobretodo las encontramos asociadas a contextos numéricos como se aprecia en expresiones tales como *va creciendo de dos en dos, se acerca continuamente a 4, el primer conjunto va más rápido que el segundo*, etc. La estructura *ir + gerundio*, prototipo de expresión dinámica e inacabada, constituye uno de los gérmenes del modelo de *indefinición* con una presencia importante en el ECN.

Tabla 56	Elementos metafóricos básicos: cinético-temporales
Estará toda la vida dividiendo porque todas las cantidades tienen mitades	
No se puede porque son números infinitos y tardarías un milenio	
El primero empieza en uno y el segundo empieza más tarde	
Llega un momento en que ya no se pueden dibujar más / en que no se podría hacer la mitad	
Acabará más tarde por tener que hacer muchos decimales	
Después de mucho tiempo acabas no siendo capaz de medir el resultado porque no puedes parar de sumar	
Nunca se detendrá, seguirá girando y dividiendo hasta que yo quiera	
El primer conjunto tiene más porque no se salta ninguno	
Va creciendo de dos en dos infinitamente / El primer conjunto va de 1 en 1	
Va bajando posiblemente hasta el cero	
Se acerca continuamente a 4	
Cada vez se acerca más pero nunca del todo	
1,999... sigue pero no llega al 2	
Los números son infinitos no paran y siguen	
Puedes añadir puntos sin parar	
El segundo conjunto siempre le llevará ventaja al primero, por lo que si paramos a la vez, tendrá más números	
Pueden ir creciendo sin saber hasta dónde pueden llegar	
El resultado se va haciendo cada vez mayor	
Nos pasaríamos por milésimas o centésimas o no llegaríamos	
Acabarían saliéndose los círculos del triángulo	
Tendrán igual porque los dos grupos de números van aumentando al mismo ritmo hasta el infinito	
A pesar de que un conjunto vaya más rápido que el otro, al no haber un límite, los dos tendrían infinitos números	

También los elementos vinculatorios se siguen moviendo en torno a imágenes equivalentes a las de niveles anteriores asignando números y relaciones numéricas a puntos, segmentos o medidas; encontramos por primera vez la asociación de dos representaciones dentro de un contexto geométrico, correspondientes a dos ítems diferentes del mismo cuestionario: *con la suma de triángulos ocurre igual que en la pregunta en la que se unían segmentos*.

Tabla 57	Elementos metafóricos vinculatorios
No habrá final porque los números son infinitos y el segmento se podrá dividir infinitas veces	
Como los números no tienen fin, las mitades de los segmentos tampoco lo tienen	
Si sumas los segmentos 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 + 0,03125 + 0,015625 y sigues te da 2 m.	
Con la suma de triángulos ocurre igual que en la pregunta en la que se unían segmentos	
Al dividir el segmento en mitades se obtendrá un número comprendido entre 0 y 1	
Tendrás infinitos segmentos cada vez más pequeños, es como dividir entre 2	
Es un número periódico y quedaría un “espacio” insignificante hasta llegar al 1 [0,999…]	
Siempre habrá un número más pequeño que el anterior [división de segmentos]	
Habrá infinitos puntos ya que nunca podrías llegar al final, siempre habrá otro número por el cual dividir	

Los nuevos verbos que se incorporan al esquema conceptual aparecen en la tabla 58. Se registran por primera vez los verbos *redondear*, *aproximar* y, en especial, *tender* asociados la mayor parte de las veces al carácter potencial del proceso considerado, aunque los dos primeros pueden formar parte de posturas finitistas frente a procesos indefinidos. *Desaparecer* y *destruir* pueden representar, según la estructura de la frase, la finitud, “al final el segmento acabaría destruido”, o bien el carácter actual de infinito, “lo haces tan pequeño que desaparece”. El resto de categorías de verbos se consolida en este nivel.

Tabla 58

Verbos espaciales			Verbos cinético-temporales		
Finitud	**Infinitud**	**Otros**	**Finitud**	**Infinitud**	**Otros**
Alcanzar	Seguir	Medir	Alcanzar	Cansarse	Tardar
Llegar	Alargar	Contar	Llegar	No acabar	Durar
Terminar	Añadir	Comparar	Terminar	No parar	Saltar
Acabar	Aumentar	Saltar	Acabar	Seguir y seguir	Ir (+ gerundio)
Desaparecer	Continuar	Caber / Entrar	Parar	Seguir /ir (+ gerundio)	Costar
Destruir	Superar	No notar / Ver	Detenerse	Saltar	Empezar (antes que)
Redondear	Crecer	Reducir		Acercarse	Bajar
Aproximar	Extender	Contener		No detenerse	Subir
Abarcar	Prolongar	Abarcar		Pasarse (superar)	Venir
	Tender	Meter			

Por su parte, los adverbios de modo y los adjetivos se ven incrementados de forma paralela al enriquecimiento verbal de los sujetos; en este sentido el vocabulario matemático correspondiente al esquema conceptual de este nivel también recoge términos propios como los de *dimensión*, *periodicidad, progresión* y *sucesión* que se incorporan paulatinamente al lenguaje de la disciplina; la idea de periodicidad, por ejemplo, que en el nivel anterior aparecía como adverbio de modo se registra en esa ocasión como adjetivo que identifica al infinito potencial. Destaca así mismo la proliferación de atributos para representar lo infinitamente pequeño tales como *insignificante*, *mínimo, minúsculo*, así como los lapsos temporales como *duradero, eterno, periódico, progresivo*, etc. También es cada vez más frecuente el uso de expresiones del tipo *hasta donde queramos*, *tan grande como queramos*, *cada vez más pequeño, se va acercando*, etc. características del tipo de aprendizaje habitual presente en los textos y en las aulas y que va consolidando la perspectiva potencial de infinito como imagen mental dominante en el esquema conceptual.

Tabla 59

Adverbios	Adjetivos		Sustantivaciones, adverbializaciones y otros términos y expresiones
Aproximadamente			
Periódicamente	Inimaginable	Largo	Hasta / El más allá
Sucesivamente	Incontable	Grande	Me llevaría / tardaría toda la vida
Infinitamente	Incalculable	Mucho	Todo el rato / Todo el tiempo
Continuamente	Indefinido	Rápido	El más pequeño posible
Eternamente	Interminable	Lento	Llegar un momento en que... / Hasta que…
Sumamente (pequeño)	Inacabable	Inmenso	Todo / nada
Constantemente	Inagotable	Duradero	Prolongar hasta donde queramos
Prácticamente	Irreducible	Eterno	Todo el tiempo que quieras
Indefinidamente	Inalcanzable	Periódico	Cabrán tantos como quieras
Bastante	Insuperable	Progresivo	Tan grande como queramos
Mucho	Imposible	Remoto	Cada vez más pequeño / grande
Siempre	Ilimitado	Mínimo	Siempre hay otro más grande / pequeño
Nunca	Indeterminado	Minúsculo	Casi igual a / casi nula
Jamás	Insignificante	Numeroso	Infinidad
Cerca / Lejos	(No) representable	Demasiado	Eternidad
Casi		+	Dimensión
Poco a poco		Superlativos	Sucesión / progresión

En la tabla 60 podemos observar que cada vez es menos frecuente encontrar el término infinito desempeñando la función de sustantivo en favor de una función atributiva aplicada a conjuntos numéricos, duración de un proceso, medidas, etc. o bien adverbial acentuando el carácter potencial de un determinado proceso.

Tabla 60	Función gramatical del término "infinito"
Los números naturales son infinitos	Llegaremos a un número infinito
El resultado puede ser infinito	Se extiende / Sigue hasta el infinito
La cantidad de segmentos es infinita	Es una cantidad infinita de puntos
Hay / Tiene infinitos números decimales / ceros	Funcionará durante un tiempo infinito
Pueden caber infinitos puntos	Se multiplica el nueve infinitas veces
Uniendo segmentos se hace [medirá] infinito	Sería un valor infinito
	No se puede saber cuánto es el infinito

6.2.3.3. ELEMENTOS SIMBÓLICOS.

Como se puede observar en la tabla 61 se repite el tipo de imágenes recogidas en el nivel anterior relacionadas con aspectos operativos, si bien con mayor profusión y riqueza de matices. En primer lugar, vemos que se acepta sin mayor problema la repetición indefinida de cualquier operación elemental: "siempre se le seguirá sumando un número más por pequeño que sea", "todas las cantidades tienen mitades", etc. Esto implica que, con frecuencia, bajo esta perspectiva de proceso inacabado e inacabable no se admita el resultado de dichas operaciones: "no se puede sumar porque no sabes el último número que hay que sumar", "si sumamos todos los diámetros no se puede decir una cantidad exacta", "no se pueden multiplicar porque un número periódico no acaba nunca", etc. No obstante, también es posible encontrar en este ECN imágenes en sentido contrario, actual: "si unes todos los segmentos te termina dando 2 m., 0,999… x 0,999… = 0,999… = 1", "la suma de todos los diámetros será infinita", etc. Y, por último, como en los niveles anteriores pero más numerosas, hallamos toda una serie de afirmaciones que en el contexto del que se extraen adquieren la categoría de propiedades o axiomas, "el producto de dos números infinitos es infinito", "infinito por dos es infinito", "si le quitas un millón a algo infinito se queda como estaba", "si no se redondea no se pueden multiplicar dos números infinitos", etc. La amplia gama de resultados nos permite elaborar, en este caso, una "aritmética del infinito" bastante completa basada en los modelos intuitivos hallados en el capítulo 5, con sus propias incoherencias e inconsistencias tanto nivel individual como nivelar.

Tabla 61 Elementos simbólicos: operacionales
Si se le quita un millón a algo infinito se queda como estaba, infinito / Si les quitas un millón no se nota
No se puede calcular [0,999... x 0,999...] porque son periódicos y no se conocen todos sus términos
No se puede dividir un número infinito entre otro infinito
No pueden multiplicarse dos números infinitos
El producto de dos números infinitos es infinito
El 1 aparecería el doble de veces que el 3, pero infinito por dos es infinito
Ningún número decimal multiplicado por 9 te da uno, lo más próximo es $0,\widehat{9}$
La probabilidad sería 1/4 porque sería muy difícil sacar un 5 / Sería una probabilidad pequeña, 1/4
Para que un número que se multiplica por 0 tenga que dar 5 sólo puede ser un número sin límites, infinito
Se va dividiendo por números cada vez más grandes y, por tanto, el resultado sería cada vez más pequeño
Como puede haber infinitos círculos, la suma de sus diámetros sería infinita
Da infinito porque vas sumando la mitad y la mitad del segmento anterior y no puedes terminar nunca
Aunque vas sumando cantidades insignificantes, al final acabas no siendo capaz de medirlo
Crece sin llegar a ningún límite porque se le va sumando

Tabla 61 (cont.)	Elementos simbólicos: operacionales
Es infinito porque no hay un número determinado de segmentos y no podemos sumar sus longitudes No se puede sumar porque no sabes el último número que hay que sumar [1/10 + 2/100+ ···] Si sumamos todos los diámetros no se puede decir una cantidad exacta	
Será una cantidad infinita pero cercana a un número porque se van sumando cada vez números muy pequeños Si no se redondea no se pueden multiplicar dos números infinitos Habrá infinitos números decimales pero se puede deducir que la suma será algo así como 0,123456... Si sumas cualquier número a 1,999.... pasaría de 2	
Si unes todos los segmentos te termina dando 2 m 0,999.... x 0,999... = 0,999... = 1 Si expresas 1,999… en forma de fracción se obtiene 2 El resultado es infinito / infinito = 1 Se obtendrá 1/4 que es 0, luego el segmento no existirá	
Llegará un momento en que las partes sean tan pequeñas que no se podrán dividir más Cuando llegue a 0 ya no se puede dividir más / Alguna vez se llegará al cero y ya no se podrá seguir sumando Llega un momento en que no lo puedes dividir más porque te daría negativo	
Todas las cantidades tienen mitades / Nunca podrás parar de dividir el segmento por la mitad Sí se puede encontrar un número que multiplicado por 9 de 1, pero ese número es infinito Cada vez que lo divides entre 2 se hace más largo pero más pequeño	

Se repiten también en este ciclo las dos situaciones establecidas en los niveles anteriores. Por una parte, la naturaleza, sentido y existencia de valores extremos en procesos indefinidos: “nunca se alcanzará el resultado más pequeño porque no lo hay”, “el número más pequeño es el 2,000…1”, “2 es el siguiente a 1,999…”, etc. Y, por otra, las relaciones que se pueden establecer entre los cardinales de conjuntos infinitos: “los dos conjuntos son iguales porque tienen infinitos números”, “los dos son infinitos pero hay más unos que treses”, “en todos hay infinitos pero no se pueden contar ni ordenar”, “el primer conjunto es mayor porque no se salta ningún número”, “el primero es mayor porque también se meten los del otro conjunto”, etc. Al igual que en el caso anterior, los modelos intuitivos se constituyen en criterios que determinan la relación de orden correspondiente.

Tabla 62	Elementos simbólicos: relacionales
Siempre habrá un número más pequeño que el anterior Nunca alcanzará el resultado más pequeño porque no lo hay No existe el más pequeño porque hay infinitos números entre 2 y 3 El número más pequeño es el 2,000...1 porque puedes poner infinitos ceros y luego un uno El resultado más pequeño posible será 1: ∞ Se llegaría a un punto en que no se puede hacer más pequeño 2 es el siguiente a 1,999…	
Los dos conjuntos son iguales porque tienen infinitos números Los dos igual porque se le puede sumar todo lo que quieras Los dos son infinitos pero es verdad que hay más unos que treses [2,131131...] En todos hay infinitos, por eso no se sabe cuál es mayor / no se pueden contar ni ordenar El primer conjunto es mayor porque va progresivo / no se salta ninguno / porque empieza antes El primero es mayor porque también se meten los del otro conjunto Habrá infinitos puntos en los dos pero en el de 10 cm. habrá menos que en el de 30 cm. Todas tienen los mismos puntos porque hay 2 cm. de puntos Los dos tienen igual cantidad de números porque hay la misma distancia Las tres líneas tienen una cantidad de puntos infinita, pero la A debería contener más porque es la más larga	

6.2.3.4. ELEMENTOS FINITISTAS/INFINITISTAS.

El elemento finitista más destacable que se incorpora a este nivel es el que se refiere a los límites de un determinado recinto geométrico como cota del número de elementos que puede contener: “hay un número finito de puntos porque el cuadrado es una superficie limitada”, “la suma será finita porque la figura tiene fin y los círculos que contiene también”, “sólo se pueden añadir triángulos hasta que el espacio se acabe”, etc. Es preciso indicar que en determinados casos tales limitaciones constituyen un dato con el que el sujeto determina una suma infinita, “la suma de todas las áreas será finita porque dará como máximo el área del cuadrado”, pero para la mayor parte de los sujetos constituye un argumento especialmente sólido para garantizar la finitud no del resultado sino de la cantidad de elementos contenidos. La naturaleza finita de determinados procesos y objetos sigue formando parte del ECN: “se llegaría a un punto en que no se puede hacer más pequeño, al final queda una parte indivisible”, etc.

Tabla 63	Elementos finitistas
Se llegaría a un punto en que no se puede hacer más pequeño	
Si pudiéramos dividirlo hasta el máximo nos quedaríamos con una molécula de tinta	
Al final queda un punto [minúsculo] / una parte indivisible / una molécula / un átomo	
Al final se obtendrá el segmento más pequeño posible	
Llegará un momento en que las partes serán tan pequeñas que no se podrán dividir más	
El 1.999… es el último número que puede tener como parte entera el 1	
Es incalculable el número de puntos pero caben muchos	
Cabrán 1.000.000 de puntos porque son muy pequeños	
Como está limitado por todos sus lados, sólo tienes que contar cada punto que introduces en el cuadrado	
En un cuadrado hay un número finito de puntos porque es una superficie limitada [un sitio cerrado] y aunque tenemos millones no son infinitos	
La suma será finita porque la figura tiene fin y los círculos también	
Hay un límite que es el vértice y ya no se pueden dibujar más círculos	
Es finito ya que sólo se pueden añadir triángulos hasta que el espacio se acabe	
Llega un momento en que no caben más círculos	
El resultado será finito porque alguna vez se llegará al cero y no se podrá seguir sumando	
Es finito porque todo tiene fin	

Los elementos de transición presentan una gran semejanza con los hallados en el nivel anterior y suelen ser imágenes, como en aquella ocasión, que mezclan elementos finitistas y elementos infinitistas con no pocas incoherencias en muchos de los casos, “se obtendrá un átomo de segmento pero el átomo todavía se puede partir” o “aunque son infinitos, los números tienen algún límite por remoto que sea”.

Tabla 64	Elementos de transición finitista / infinitista
Llegará a cero aunque tardará mucho tiempo	
Si es que se detiene estará un tiempo infinito	
Se obtendrá un átomo de segmento pero el átomo todavía se puede partir	
Aunque son infinitos, los números tienen algún límite por remoto que sea	
Se obtiene un segmento infinitamente pequeño	
El más pequeño sería 2,00000….1	
Pueden ser muchísimos resultados dependiendo de los nueves que pongas	
Después de quitar un millón, siguen siendo millones porque los números no tienen límite	
Los dos conjuntos tienen la misma cantidad pero el segundo conjunto siempre le llevará ventaja al primero, por lo que si paramos a la vez, el segundo tendrá más números	
No sabemos hasta dónde puede llegar	

En cuanto a los elementos potenciales encontramos en este caso las tres categorías que hemos establecido en el nivel anterior con una gama mayor contextos construcciones debido al enriquecimiento verbal propio de estas edades y de las variaciones introducidas en los cuestionarios de este nivel; así registramos, como se puede ver en la tabla 65, expresiones afirmativas a partir del término *siempre* o equivalentes, “puedes añadir sin parar”, “puedes seguir dividiendo”, “se tendría que continuar”, etc., expresiones negativas que incluyen el término *nunca* o combinaciones de ambas que redundan en el carácter secuencial descrito y, por último, adverbializaciones del tipo “hasta que yo quiera”, “tantos como quiera”, “cada vez más pequeños”, “más y más pequeños”, etc. Además, en las dos primeras categorías, debemos constatar la presencia de expresiones del tipo “tiende a llegar a 0”, “será cercano a un número”, “se acerca continuamente a”, “dará como máximo”, etc.

Tabla 65	Elementos infinitistas potenciales

Caben infinitos porque siempre queda hueco para otro punto más
La suma será infinita porque siempre va a quedar un hueco entre el círculo y el vértice del triángulo
Siempre quedará algo por pequeño que sea
Los números naturales son infinitos porque siempre se puede sumar uno al anterior
No se sabe porque puedes añadir puntos sin parar
Cualquier número por pequeño que sea se puede seguir dividiendo entre 2
Cuando el segmento mida 0,000000002 aún se podrá partir en la mitad
Es Infinito porque tu puedes unir y seguir uniendo segmentos
Se acerca continuamente/indefinidamente a 4 pero se tendría que continuar la suma hasta el infinito
Hay infinitos porque los segmentos se siguen cortando aunque no los veamos
El resultado infinito tiende a llegar a 0

La máquina seguirá dividiendo hasta que yo quiera, nunca se detendrá
Nunca llegaremos al 1, siempre aparecerá un 9 / El 9 no se acaba, continúa siempre
No terminamos nunca porque siempre hay un segmento que sumar
Puedes hacer triangulitos hasta el fin de tu vida y nunca se acaba así que no tiene área fija
No habrá final porque se podrá dividir infinitas veces
Nunca podrás parar de dividir el segmento por la mitad
No eres capaz de obtener el resultado porque no puedes parar de sumar todo el rato
El resultado nunca llegará a 4
Nunca llegaría 0 porque ningún número entre 2 da 0
Estará funcionando sin parar porque nunca alcanzará el resultado más pequeño porque no existe
Los números naturales son infinitos y nunca llegaríamos al último / al final
El resultado es infinito porque sería 0,1234… y no se acabaría nunca
Es infinito porque si nunca acabas de poner lo que vas a sumar no te puede dar un resultado
No es posible averiguar el más pequeño entre 2 y 3 porque daría muchos números y nunca acabarías de escribirlos

Tendrías infinitos segmentos cada vez más pequeños / tan pequeños como quieras
Da infinito porque los triángulos pueden seguir haciéndose más y más pequeños incluso hasta dejar de verlos
Se haría cada vez más pequeño pero no llegaría a 0
Puedes poner todos los puntos que tu quieras

Por último, entre los elementos infinitistas actuales hay ciertas ideas que se van consolidando como tales o, al menos, que van fijando en el esquema conceptual una imagen que tiende a comprender ciertos procesos como objetos en sí y no como objetivos inalcanzables o inimaginables. Así, por una parte, encontramos respuestas del tipo “los dos conjuntos igual porque hay infinitos números naturales”, "una superficie está compuesta por infinitos puntos", “todas las líneas tienen una cantidad infinita de puntos”, etc. en las que al cardinal de estos conjuntos parece dotársele de una naturaleza numérica quedando, si acaso, oculta la indefinición explícita de otras respuestas. Por otra parte, también es posible hallar resultados de ciertos procesos u operaciones infinitos que presentan un carácter “alcanzable”, no en el sentido finitista ya considerado sino actual, bien como en “infinito/infinito = 1”, “la suma de todas las áreas ocupa un 25% de la superficie total”, “al unir todas las mitades te da dos metros”, etc. donde se afirma la existencia de tales resultados, o bien como en expresiones del tipo “tiene un límite que es 12 cm”., “al final el segmento desaparece porque se va haciendo más pequeño”, etc. donde junto a la imagen de proceso aparece la de límite del mismo. Por último, hemos de considerar la incorporación al esquema conceptual, por primera vez, de elementos que en su momento contribuirán al establecimiento de correspondencias uno a uno entre conjuntos facilitando la comprensión del infinito actual: “los dos conjuntos tienen los mismos elementos porque siguen la misma pauta de 1 en 1”, refiriéndose a la comparación entre N y N-1.000.000.

Tabla 66	Elementos infinitistas actuales
Los dos igual porque hay infinitos números naturales y es como si estuvieran todos	
Una superficie [un segmento] está compuesta por infinitos puntos	
Cabrían infinitos porque los puntos no tienen dimensión	
Son iguales porque todas las líneas tienen una cantidad infinita de puntos	
Todas tienen los mismos puntos porque empiezan y acaban en los mismos puntos	
Todas tienen los mismos puntos porque hay 2 cm. de puntos	
Si se le quita un millón a algo infinito se queda como estaba, infinito	
Es imposible saberlo pero tiene un límite que es 12 cm.	
Las dos probabilidades son 0, ya que es $1/\infty$ y $10.000.000/\infty$, que es lo mismo	
La suma de todas las áreas será infinita ya que la parte sombreada ocupa un 25% de la superficie total	
La suma será finita porque habrá un círculo cuyo diámetro acabará siendo 0	
Al unir todas la mitades te da dos metros	
Al final el segmento desaparece porque cada vez se va haciendo más pequeño	
$\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} - 1.000.000$ tienen los mismos porque siguen la misma pauta de 1 en 1	
Todas tienen los mismos puntos porque empiezan y acaban en los mismos puntos	

6.2.3.5. ELEMENTOS OBSTÁCULO Y MODELOS TÁCITOS.

Los elementos obstáculo epistemológicos, basados en los modelos tácitos correspondientes, incrementan el número de representaciones registradas en el nivel anterior en torno a imágenes y metáforas equivalentes.

Tabla 67	Elementos obstáculo tácitos epistemológicos
Infinito = infinito	Los dos igual porque hay infinitos números naturales No puedo contar infinitos números y tampoco $2 \cdot$ infinito, luego aparecerán las mismas veces, es decir, infinito Aparecerán los dos el mismo número de veces puesto que al ser infinito nunca se acabaría Las tres líneas [ambos cuadrados] contienen los mismos puntos porque en cada una de ellas caben infinitos Es 1 ya que infinito/infinito = 1
Inclusión	En los dos habrá infinitos, pero en el cuadrado de 10 cm. habrá menos que en el de 30 cm. Infinitas veces ambos, pero el 1 aparece el doble que el 3 El primer conjunto contiene más porque empieza desde 1 y el otro mucho más adelante El primero porque no se salta ninguno El primero es mayor porque tiene un millón de números más El primero porque también abarca al segundo hasta el infinito

Tabla 67 (contin.)	Elementos obstáculo tácitos epistemológicos
Punto = Marca	Caben los que quieras, depende de qué tamaño hagas los puntos El punto lo entenderíamos como una manchita de bolígrafo 100 puntos / 900 puntos Se obtendrá un punto aunque luego ese punto se puede dividir Si pudiéramos dividirlo hasta el máximo nos quedaríamos con una molécula de tinta

En cuanto a los didácticos se constata que la imagen de "el más pequeño" reduce notablemente su presencia en el esquema conceptual respecto del nivel anterior mientras que, por el contrario, el número de elementos que asocian la imagen de indefinición a infinito experimenta un considerable incremento. Esta indefinición puede referirse al cardinal de un conjunto, "no se puede saber cuántos hay", "hay infinitos porque no se pueden contar", "quedan infinitos menos un millón", "no se pueden comparar porque todos los conjuntos son infinitos", etc. o como resultado de cierto proceso u operación, "no se sabe lo que dará porque todos los números tienen mitad", "el resultado depende de los nueves que pongas", "como hay infinitos números nunca podríamos plantear la suma", etc. Pero en este caso, el carácter indefinido puede implicar diferentes conclusiones tales como que "nunca podríamos plantear la suma", "la suma dará cada vez un resultado distinto" o bien que *el* "resultado será infinito", lo que acentúa la identificación de infinito como una falta o ausencia de información. Y, por último, se consolida el obstáculo correspondiente al modelo tácito de *divergencia*, "la suma da infinito porque siempre se le puede sumar más".

Tabla 68	Elementos obstáculo: tácitos didácticos
El más grande / el más pequeño	Se obtendrá el segmento más pequeño posible No se puede llegar a $1/\infty$ que sería el más pequeño
Indefinición	No se puede saber cuántos hay porque puedes añadir puntos sin parar Quedan infinitos menos un millón porque no se sabe los números que hay No se sabe cuántos quedan porque los números son infinitos Hay infinitos porque no se pueden contar Todos los conjuntos son infinitos porque no sabemos cuántos hay de cada cosa No se pueden comparar [no se sabe cuál es mayor] porque todos los conjuntos son infinitos La probabilidad de 5 es indefinida ya que es imposible saber cuántos números existen No se sabe lo que dará porque todos los números tienen mitad El resultado depende de los nueves que pongas [0,999… x 0,999…] No se puede calcular porque $0,\widehat{9}$ es periódico y no se conocen todos sus términos No se puede calcular porque podríamos poner tantos decimales como quisiéramos y cada vez habría una respuesta No se puede calcular porque las sumas son infinitas y cada vez dará un resultado distinto No se puede calcular la suma pues no sabemos dónde acaba la serie No se puede hacer la resta [$\mathbb{N}$ - 1.000.000] porque no se sabe cuántos números hay Como hay infinitos números [no acabas de ponerlos y] nunca podríamos plantear la suma Es infinito porque no te dice cuántos números tiene la suma [la suma no termina nunca] Un segmento se puede dividir en muchas mitades de forma que no existe un número concreto, es decir, es infinito
Divergencia	Como vas sumando y sumando [aunque sumes poquísimo] siempre da un resultado mayor Es infinito porque si vas sumando la mitad y la mitad y la mitad de cada segmento no podrías terminar nunca Es infinito porque unes los fragmentos del segmento un número infinito de veces La suma da infinito porque siempre se le puede sumar más

Los elementos obstáculo materiales en este nivel inciden y proliferan en los mismos aspectos del nivel anterior tales como la atribución de dimensiones extras a elementos geométricos o la indivisibilidad de algunos de dichos elementos tales como los segmentos o determinados polígonos; por otra parte, como ya hemos visto al tratar los elementos finitistas e infinitistas, el hecho de que el conjunto considerado se halle contenido o no en un recinto limitado se manifiesta decisivo a la hora de responder sobre la naturaleza finita o infinita de dicho conjunto: “como el triángulo tiene un fin”, “llega a ese fin y no caben más círculos”, “hay más estrellas que puntos en un cuadrado porque el Universo no tiene límites”, “no se pueden meter todos los números naturales en un bombo”, etc. Así mismo, la idea de aproximación sigue siendo un procedimiento para acercarse a infinito mediante elementos finitistas.

Tabla 69	Elementos obstáculo: tácitos materiales
Limitaciones físicas	El punto no es algo que encuentres en la naturaleza, ya que un punto lo tengo que pintar y entonces puede tener diferentes tamaños según con qué lo pintes Al final el círculo ni se verá ni se podrá medir En realidad hay un tope de tamaño que no se puede continuar dividiendo (protones, etc.) Llegará un momento en que el segmento ya no se pueda dividir Al final las mitades serían microscópicas y para la vista humana sería como un punto Esta pregunta no se puede responder porque no sabemos si la materia tiene fin Numéricamente no tendría final pero físicamente sí Siempre lo podrás dividir, sólo habría que fabricar la herramienta adecuada para hacer divisiones pequeñísimas No se pueden meter todos los números naturales en el bombo Sólo se pueden añadir triángulos hasta que el espacio se acabe Hay muchas más estrellas que puntos en un cuadrado porque el Universo no tiene límites En un cuadrado hay un número finito de puntos porque es una superficie limitada Las estrellas, los granos de arena y los números naturales son infinitos pero los puntos en un cuadrado y las células del cuerpo tienen límite [fin = límite]
Aproximaciones	Me da 2 metros aproximadamente El número exacto no se sabe, pero sí podemos obtener uno aproximado No se consigue exactamente el 1, pero multiplicando 9 x 0,111… se consigue una aproximación muy grande Si le quitas un millón a los números naturales no se nota [porque son infinitos]

En esta ocasión los elementos contradictorios también presentan diferentes vertientes todas ellas desde la dicotomía finito/infinito. En primer lugar, la idea de dimensión frente a la de infinitud, “caben infinitos aunque pueden contener más o menos según la dimensión que le quieras poner a los puntos”; en segundo lugar, la contradicción como producto del carácter indefinido asociado a infinito, “el número de veces que aparece el 1 y el 3 es infinito, así que no se sabe, pero sí es verdad que el uno aparece más que el tres”, “no se sabe si estará funcionado mucho tiempo porque los números no se acaban nunca”; en tercer lugar, las contradicciones que se derivan de los límites de un recinto que debería contener un conjunto infinito de objetos, “la suma no es finita pero infinita tampoco porque llegará un momento en que no tengas espacio para hacer un círculo más pequeño”, “la suma será finita aunque al final acabaría saliéndose de triángulo porque aunque sea pequeño siempre ocupará un espacio”, etc.; y, por último, no es infrecuente hallar en las respuestas la necesidad sicológica de establecer un límite aunque dicho límite se ubique en el infinito, aunque son infinitos, “los números tienen algún límite por remoto que se”, “sí es posible averiguar el menor entre 2 y 3 pero el número sería infinito: 2,0000…1”, etc.

Tabla 70	Elementos obstáculo: contradictorios
1.	Cabrían infinitos puntos porque los puedes hacer más grandes o más pequeños [muy pequeños]
2.	Caben infinitos porque los puntos no tienen dimensión aunque pueden contener más o menos según la dimensión que le quieras poner a los puntos
3.	No se sabe cuántos quedan porque los números son infinitos y si se le quitas un millón a algo infinito se queda como estaba, infinito
4.	$\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ - 1.000.000 tienen igual porque es imposible saber hasta dónde llegan
5.	El número de veces que aparece el 1 y el 3 es infinito, *así que no se sabe*, pero sí es verdad que el uno aparece más que el tres
6.	La sucesión tiene final pero no se sabe porque es infinita
7.	No se sabe si estará funcionando mucho tiempo porque los números no se acaban nunca
8.	Serán infinitos hasta que te quedes sin espacio para rellenar
9.	La suma de los diámetros no es finita pero infinita tampoco porque llegará un momento en que no tengas espacio para hacer un círculo más pequeño
10.	La suma será finita porque cada vez sería un círculo más pequeño aunque al final acabaría saliéndose del triángulo porque aunque sea pequeño siempre ocupará un espacio
11.	Es infinito porque puedes seguir metiendo triángulos hasta que llegue un momento en el que ya no quepan más
12.	Acabará por darte 2 m aunque nunca acabarías de dividir los segmentos
13.	Si es que se detiene, estará un tiempo infinito ya que, por ejemplo, si tarda 1 segundo en hacer cada operación entonces 1·infinito = infinitos segundos
14.	Sí es posible averiguar el menor entre 2 y 3, pero el número sería infinito: 2,0000….1
15.	Aunque son infinitos, los números tienen algún límite por remoto que sea
16.	Los puntos no tienen dimensiones, pueden caber 1, 30, 100 ó infinitos

6.2.3.6. ENTREVISTAS.

La confirmación de ciertas ideas halladas en los cuestionarios y registradas en las entrevistas, tras eventuales tareas de conexión, incide en aspectos ya recogidos como elementos de ECN y, como podemos ver en la tabla 71, giran en torno a la relación entre dimensionalidad e infinitud, naturaleza del procesos indefinidos y viabilidad de ciertas operaciones que implican la manipulación de infinitos términos o cifras.

Tabla 71 — Entrevistas: ratificaciones
No se pueden introducir todos los números naturales en un bombo porque nunca acaban
El número de puntos depende del tamaño de los puntos y del cuadrado; yo creo que cabrán infinitos más o menos
En las tres líneas hay infinitos puntos, pero depende de la longitud de los puntos y de las líneas
$\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$-1.000.000 son ambos infinitos [iguales] porque los dos siguen [llegan] hasta el infinito
Las tres líneas tienen el mismo número de puntos porque si trazas líneas verticales que corten a las tres líneas vemos que hay los mismos puntos
Aunque en los dos cuadrados hay infinitos tiene que haber más puntos en el más grande
No se pueden ordenar todas esas cantidades porque son incalculables
Como siempre dividimos entre dos, el resultado se acercará a cero pero será infinito porque nunca acabarías de poner decimales
Los números siempre se pueden dividir pero el segmento no porque llega un momento en que ya no se puede ver
El número más pequeño entre 2 y 3 sería “dos coma, infinitos ceros y un uno al final”; no se puede escribir pero existe
Si vas dividiendo un segmento siempre te va a quedar otro segmento
2 es el siguiente a 1,999… porque si le sumas cualquier número por pequeño que sea pasa a 2
Si dividimos muchas veces entre dos nos acercaríamos mucho a cero pero nunca llegaríamos
Si redondeamos 0,999… nos dará uno, pero dejándolo así, normal, nunca daría uno; si no lo aproximamos son dos números distintos

Tabla 71 (cont.)	**Entrevistas: ratificaciones**
No se pueden sumar dos cantidades infinitas porque no alcanzas el final de esas cantidades	
La suma de todos los diámetros sería infinita porque aunque sean pequeñísimos siempre habrá más círculos	
La unión de todos los segmentos será infinita porque siempre se va a poder seguir dividiendo	
No se pueden poner infinitos círculos dentro del triángulo porque el triángulo está limitado	
La suma 2 + 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + · · · siempre crece y superará cualquier valor, por ejemplo 100, aunque tardará mucho	
No se puede saber el resultado de 0,999… x 0,999… porque no es lo mismo poner 0,9 que 0,999	

Tras las discusiones entre los dos sujetos de la entrevista y las tareas de conexión llevadas a cabo por el entrevistador, las rectificaciones más reseñables que se han recogido se presentan en la tabla 72. Estos cambios verbales no suponen necesariamente una modificación de los elementos correspondientes del esquema conceptual ya que sería preciso seguir incidiendo en la idea en cuestión bajo diferentes representaciones y, por otra parte, como se puede observar en algunas de las respuestas el cambio tampoco significa que la nueva posición sea conceptualmente correcta:

No se podrían sumar las áreas de todos los triángulos → la suma sería infinita porque hay infinitos triángulos

En efecto, en numerosas ocasiones tras una cierta reflexión, el individuo efectúa un cambio de modelo tácito bajo el que analiza la situación y si su esquema conceptual no alberga los modelos adecuados la conexión conducirá, tras el obstáculo correspondiente al nuevo modelo, a resultados inconsistentes o incoherentes. En el ejemplo anterior la respuesta inicial corresponde a un elemento de limitación material del que se traslada al modelo de divergencia. Estos cambios de modelo pueden conducir a elementos sofisticados de razonamiento próximos al estadio formal, lo que nos indica la posible existencia de elementos pre-formales en esquema conceptuales aún básicos:

Aunque los dos conjuntos son infinitos, en $\mathbb{N}$ hay más números que en los múltiplos de tres → Si lo miras de otra manera, será 3·1, 3·2, 3·3, … que son los números naturales multiplicados por 3 y, por lo tanto, serían iguales

Tabla 72		**Entrevistas: rectificaciones**
No se podría realizar el sorteo porque hay infinitos números naturales	→	La probabilidad de obtener un 5 sería poquísima
No se podrían sumar las áreas de todos los triángulos porque al ser tan pequeñas no se podrían medir	→	La suma sería infinita porque hay infinitos triángulos
La suma 2+1+ 1/2 + 1/4 + 1/8 + · · · decrece porque sería hasta el 1 dividido por infinito	→	La suma crecería pero muy poco a poco
Multiplicando 9 por 0,111… podemos obtener 0,999… pero no 1	→	Obtenemos 0,999… que es lo mismo que uno porque no podemos poner ningún número en medio
1/10 + 2/100 + 3/1000 + · · · sería infinito	→	Tendría muchas cifras, infinitas, pero no pasaría de uno
Hay infinitos unos e infinitos treses en el periodo pero hay el doble de unos que de treses	→	No se puede decir el número exacto pero siempre habrá más unos que treses
1/10 + 2/100 + 3/1000 + · · · no se puede calcular porque siempre hay más números que sumar	→	El resultado sería menor que 1, es un número finito pero no lo puedes averiguar

Tabla 72 (cont.)		Entrevistas: rectificaciones
Aunque los dos conjuntos son infinitos, en $\mathbb{N}$ hay más números que en los múltiplos de tres	→	Si lo miras de otra manera, será 3·1, 3·2, 3·3, … que son los números naturales multiplicados por 3 y, por lo tanto, serían iguales
Un punto sería un círculo	→	En realidad un punto no tiene medidas, no tiene dimensiones
La suma 2 + 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + · · · sería infinito	→	Es lo mismo que la unión de segmentos que no podía pasar de 2; en este caso no puede pasar de 4

En cuanto a las contradicciones podemos observar que muestran su sólida presencia en el esquema conceptual a pesar de las tareas de conexión que intentan evidenciarlas mostrando sus consecuencias más incoherentes mediante las imágenes o el lenguaje más próximos a elementos familiares.

Tabla 73 Entrevistas: contradicciones
La suma de las áreas de los triángulos sería finita porque si contamos con el tamaño, llegará un momento en que ya no podamos meter más triángulos dentro del cuadrado, pero si pudiéramos meterlos, daría infinito
El punto no tiene ni alto, ni ancho, ni largo; así según cómo hagas el punto cabrán los que tu quieras; si es muy pequeño puede haber infinitos puntos
El 1 y el 3 aparecen infinitas veces, pero el uno tendrá el doble… es una especie de contradicción porque supuestamente infinito tiene que ser para todos lo mismo, pero el uno es como si fueran dos infinitos
Los dos números aparecen infinitas veces, ninguno aparece más veces que el otro… no se puede saber cuál aparecería más veces
Los segmentos pasarían del extremo porque podemos seguir dividiendo [unión de segmentos]
En el caso del cuadrado no podemos poner más triángulos dentro porque se trata de un espacio cerrado pero en el caso de la unión de segmento está abierto y hay espacio para seguir poniendo segmentos
Quedan todos los números, como son infinitos, quitamos ese millón pero los demás siguen… pero habría menos que antes…

Por último, las definiciones obtenidas de las entrevistas se recogen en el cuadro siguiente, donde los estudiantes, como en niveles anteriores, también abundan en las nociones de punto y de conjunto infinito, así como en diversos intentos de describir el término infinito.

Tabla 74 Entrevistas: definiciones
Un punto es una marca negra, redonda / Un punto es un círculo que está relleno
Los puntos no se pueden ver, pero un punto tras otro van haciendo líneas
Infinito es que no vas a llegar nunca / Infinito significa que no sabemos dónde acaba
Infinito no es un número grande, es un número que nunca termina, que siempre tiene cifras y cifras
El infinito es como una escalera que nunca acaba
Infinito es algo impensable
Algunos de los conjuntos del enunciado son incontables y otros son infinitos; no es lo mismo, aunque todos los conjuntos infinitos son incontables

6.2.4. BACHILLERATO: 16-18 AÑOS

6.2.4.1. ELEMENTOS PROPIOS.

Comparación de conjuntos. En lo que se refiere a conjuntos discretos hay pequeñas variaciones respecto al nivel anterior; entre estas conviene destacar el incremento porcentual de aquellos sujetos que admiten explícitamente la infinitud de ambos conjuntos, al menos en el caso de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$-1.000.000, en perjuicio de la habitual respuesta “no se sabe los que quedan” o “queda un millón menos”, en particular para 2BTO, que responde al modelo de *indefinición*. Por su parte, se estabilizan los elementos *el primero contiene más*, con una ligera tendencia a la baja, basado en el modelo de *inclusión* y *los dos conjuntos son iguales*, con cierta tendencia al alza, basado en el modelo *infinito* = *infinito*. Estos resultados se ven afectados por el cambio a una representación probabilística dentro de un contexto numérico, como se puede observar en el último ítem de la tabla 74; el elemento correspondiente al modelo de *inclusión* reduce sus valores de manera significativa frente al modelo de *indefinición* que reaparece, mientras que la equivalencia entre conjuntos no presenta porcentajes reseñables.

El enunciado correspondiente a la comparación de conjuntos continuos y discretos varía respecto de los niveles anteriores y se puede apreciar su influencia en los porcentajes de la siguiente tabla. No obstante, podemos destacar que cerca del 60% aún intentan dar una ordenación mientras que uno de cada cinco individuos considera inviable tal ordenación principalmente por la equivalencia entre infinitos. Por otra parte, se ha reducido sustancialmente, a uno de cada cinco, el elemento que considera que el número de puntos en un cuadrado es el menor de los conjuntos propuestos, mientras que aproximadamente uno tercio de los estudiantes reconoce en $\mathbb{R}$ al mayor de los conjuntos dados.

Tabla 75	**Elementos propios: comparación de conjuntos (discretos)**	**1BTO**	**2BTO**
$\mathbb{N}$ – {1, 2, 3, …, 1.000.000}	Quedan infinitos Queda un millón menos, infinito menos un millón	53% 27%	58% 14%
$\mathbb{N}$ *vs.* $\mathbb{N}$ – {1, 2, 3, …, 1.000.000}	El primero contiene más o porque empieza antes Son iguales o porque los números son infinitos	42% 18% 31% 22%	40% 20% 36% 26%
$\mathbb{N}$ *vs.* {3, 6, 9, 12, …}	El primero contiene más o porque va de uno en uno Son iguales o porque los números son infinitos	43% 19% 28% 21%	44% 19% 31% 19%
a) Número de decimales de π *b)* Número de estrellas *c)* Número de granos de arena *d)* Números naturales, $\mathbb{N}$ *e)* Número de puntos en un cuadrado *f)* Números reales, $\mathbb{R}$	Dan una ordenación El menor es *e)* El menor es *a)* El menor es *c)* El mayor es *f)* No se pueden ordenar o porque son todos infinitos	57% 23% 17% ------- 36% 23% 18%	58% 18% 18% 18% 38% 22% 18%
Lanzamiento de un dado: unos, doses y múltiplos de dos	El conjunto de los múltiplos contiene más elementos Infinitos en los tres casos No se puede saber	22% 35% 22%	27% 36% 17%

Con respecto a la comparación de conjuntos continuos, y en lo que se refiere a los dos primeras cuestiones de las que tenemos valores de referencia en niveles anteriores, es destacable el incremento porcentual de aquellos sujetos que consideran infinito el número de puntos de un cuadrado así como la reducción entre aquellos otros que atribuyen a la línea A, “por ser la más larga”, la mayor cantidad de puntos. Otros elementos tales como *no se puede saber, depende del tamaño* o *en el cuadrado más grande hay más puntos* mantienen valores en el entorno de los registrados para niveles inferiores. No obstante, es preciso observar que en el caso de la comparación de las tres líneas cerca del 30% apunta la equivalencia entre el cardinal de todas ellas mientras que en el caso del cuadrado esta imagen no constituye un elemento propio. Si ahora analizamos el resto de ítems podemos detectar una sensibilidad muy fuerte al contexto para ciertos elementos; así, por ejemplo, el elemento correspondiente al modelo de *inclusión* varía desde el 20% al 43% según que el contexto sea geométrico, algebraico, numérico o funcional; también aquél otro que atribuye un cardinal infinito a todos los conjuntos considerados varía desde el 30% al 50%; y, por último, el elemento *ambos conjuntos son iguales* o *tienen el mismo número de elementos* va desde su ausencia como elemento propio hasta cerca del 50% en alguno de los casos. Por lo tanto, dentro de un mismo nivel, la comparación de conjuntos continuos presenta una serie de elementos propios muy sensibles al contexto.

Tabla 76	**Elementos propios: comparación de conjuntos (continuos)**	**1BTO**	**2BTO**
Puntos en un cuadrado	Hay infinitos	43%	49%
	No se puede saber	44%	42%
	o porque depende del tamaño	30%	26%
	Depende del tamaño	43%	32%
	En el de 30 cm. hay más puntos	27%	24%
Puntos contenidos en las líneas A, B y C	La línea A es la que más puntos tiene	43%	37%
	o porque es la más larga	27%	24%
	Las tres líneas tienen infinitos puntos	31%	35%
	Las tres líneas tienen los mismos puntos	26%	29%
Puntos en $y = (x\text{-}3)^2+1$ y en [2, 5]	Hay más puntos en la curva	28%	20%
	o porque tiene mayor longitud	21%	------
	Hay infinitos en ambos	30%	48%
	Hay los mismos en ambos	33%	48%
	o porque son infinitos	------	19%
	o porque hay una correspondencia entre ellos	------	14%
Números reales en el intervalo [0, 1] y en la semirrecta [0, ∞)	Hay los mismos en ambos	25%	22%
	o porque son infinitos	23%	20%
	Hay infinitos en ambos	43%	50%
	Hay más en [0, ∞)	43%	43%
	o porque va hasta el infinito	18%	------
Soluciones de $x + 2y - 3 = 0$ en $\mathbb{R}$ y en [3, 5]	Hay infinitas soluciones en $\mathbb{R}$	41%	53%
	Hay infinitas soluciones en [3, 5]	30%	43%
	Hay las mismas en ambos: infinitas	------	15%
	Hay más en $\mathbb{R}$	23%	33%
Dos circunferencia tienen la misma cantidad de puntos	No está de acuerdo con la afirmación	25%	20%
	Sí está de acuerdo con la afirmación	35%	44%
	o porque tienen infinitos puntos	30%	33%

Todo esto contrasta con los resultados de la siguiente cuestión que muestran que sólo para uno de cada cuatro estudiantes de este nivel existen diferentes tamaños de infinito, en su mayoría $+\infty$ y $-\infty$, mientras que el 70% se apoya en el modelo *infinito = infinito* para justificar la respuesta negativa. En consecuencia, cuando el ítem está desprovisto de contexto, dicho modelo presenta un reconocimiento claramente superior a cualquiera de los contextos matemáticos propuestos; este resultado pone de manifiesto que el conocimiento intuitivo al respecto está ligado a corporeizaciones primarias ajenas al conocimiento matemático, de ahí que cuando se introducen contenidos numéricos o geométricos la tarea de conexión quede bloqueada para un número importante de sujetos.

Tabla 77	Tamaños de infinito	1BTO	2BTO
¿Existen diferentes tamaños de infinito?	Si No	25% 70%	23% 69%

Divisibilidad indefinida. En esta ocasión el elemento que recoge la imagen de que *el proceso no acaba* experimenta un fuerte aumento respecto a todos los niveles anteriores estableciéndose en 2BTO cerca del 60%, ello en detrimento de la respuesta complementaria cuyo valor queda por debajo del 40%. Esto supone un claro proceso de abstracción producto de cierta liberación de las limitaciones materiales halladas en niveles inferiores. En esta línea, encontramos cifras superiores a la hora de considerar la posibilidad de rellenar un segmento con infinitos segmentos; no obstante, observamos cierta convergencia entre la versión potencial de esta cuestión en el ítem anterior y la presente que nos ofrece su contrapartida actual para unos porcentajes de estudiantes que oscila entre la mitad y los dos tercios aproximadamente. Sobre el mínimo del intervalo (2, 3) resulta especialmente revelador que casi un 40% de los sujetos considere válida su existencia y proponga como valor 2,000…1. En esta ocasión se convierte en actual un resultado que precisamente su potencialidad lo hace inexistente; probablemente la evidencia de una cota inferior dificulta que el sujeto reconozca esta situación. Por último, el elemento *no existe ningún número entre* $1,\overset{\frown}{9}$ *y* 2 alcanza valores superiores al 80%, si bien en la mayor parte de los casos aún no se reconoce la equivalencia entre ambos valores, como ya se ha indicado en el capítulo anterior, debido a la diferente naturaleza que se otorga a cada uno de estos números.

Tabla 78	Elementos propios: divisibilidad indefinida	1BTO	2BTO
División de un segmento por la mitad	El proceso “no acaba” o porque siempre hay una parte más pequeña El proceso “acaba” o Un punto	45% 33% 45% 22%	57% 31% 36% 23%
¿Puedes situar infinitos segmentos en el interior de un segmento AB de longitud *l*?	Sí No	54% 26%	67% 24%
El número más pequeño entre 2 y 3	Sí es posible averiguarlo o 2,000…1 No es posible averiguarlo o Porque hay infinitos ceros o decimales	44% 39% 45% 30%	43% 38% 43% 25%
¿Existe algún número entre $1,\overset{\frown}{9}$ y 2?	No existe ninguno o Porque 2 es el siguiente o Porque hay infinitos nueves o es periódico Sí existe	80% 22% 42% 19%	83% 19% 41% 17%

Sumas infinitas. En todos los casos de sumas infinitas considerados en la tabla 79 se observa que la tendencia creciente del elemento que adjudica a todas ellas un resultado infinito se invierte sólo a partir de 2BTO, donde comienza a ser dominante la imagen de un resultado finito bien desde una perspectiva potencial, *se acerca a un cierto valor*, bien actual, *da un cierto valor*. Sólo en el cuarto de los casos no se da esta inversión debido a que no es evidente asimilarlo a un modelo geométrico o gráfico concreto como ocurre en el último ítem de esta serie que presenta resultados en consonancia con los tres contextos geométricos propuestos. Lo que sí se conserva aún es el modelo de divergencia para justificar un resultado infinito.

Tabla 79	**Elementos propios: sumas infinitas**	**1BTO**	**2BTO**
Sumar segmentos cada uno la mitad del anterior	Resultado infinito	51%	30%
	o Porque nunca se acaba o siempre se suma	48%	25%
	Resultado finito	41%	64%
	o 2 metros	16%	32%
	o Se acercará a 2 metros	------	23%
Sumar los diámetros de todos los círculos inscritos en un triángulo	Resultado infinito	39%	31%
	o Porque se sigue sumando	15%	------
	o Porque hay infinitos círculos	16%	------
	Resultado finito	28%	36%
	No se puede calcular	23%	23%
Suma de áreas de triángulos en el interior de una cuadrado de lado 10 cm.	Resultado infinito	42%	34%
	o Porque siempre se suma	31%	20%
	Resultado finito	38%	42%
	No se puede calcular	15%	19%
$\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots$	Resultado infinito	58%	52%
	o Porque siempre se suma	41%	30%
	Resultado finito	------	14%
	No se puede calcular	27%	24%
$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$	Crece indefinidamente	44%	32%
	o Porque se añade	29%	18%
	Decrece indefinidamente	23%	------
	Resultado finito (se acerca a un número)	26%	54%
	o Porque cada vez sumas números más pequeños	------	20%
	o Se acerca a 4	------	29%

Por otra parte, conviene fijar la atención, de nuevo en la fuerte sensibilidad de los resultados a los contextos o representaciones utilizados en los diferentes ítems; en particular, dentro de los tres primeros, que constituyen tres representaciones distintas dentro de un contexto geométrico, e incluyendo los resultados del nivel anterior, podemos observar claramente dicha influencia que ya hemos analizado en el capítulo anterior.

Tabla 80	**Sumas infinitas: sensibilidad al cambio de representación**	**3ESO**	**4ESO**	**1BTO**	**2BTO**
Sumar segmentos cada uno la mitad del anterior	Resultado infinito	45%	48%	51%	30%
	Resultado finito	42%	43%	41%	64%
Sumar los diámetros de todos los círculos inscritos en un triángulo	Resultado infinito	27%	35%	39%	31%
	Resultado finito	23%	27%	28%	36%
Suma de áreas de triángulos en el interior de una cuadrado de lado 10 cm.	Resultado infinito	42%	40%	42%	34%
	Resultado finito	38%	37%	38%	42%

Operatividad e infinito. Los dos primeros ítems, comunes con el nivel anterior, presentan variaciones porcentuales pequeñas. Por el contrario, el tercero nos ofrece diferencias más significativas, en particular, respecto a la existencia del origen y del final de la sucesión dada que se incorporan al esquema conceptual con más facilidad, aunque es preciso observar que una buena parte de los sujetos sitúan el origen en el infinito y muchos menos, no reseñables, en cero. El nuevo ítem sobre la suma $\infty + 5$ nos ofrece unos resultados especialmente interesantes por poner de relieve, aún a estas edades, la contraposición entre los modelos matemáticos y sus equivalentes materiales; mientras que más del 60% acepta el resultado "aritmético", sólo el 30% lo admite en una situación aplicada donde el peso de la expresión "el hotel infinito está lleno" es determinante en la respuesta.

Tabla 81	Elementos propios: operatividad e infinito	1BTO	2BTO
Sobre el resultado de $0,\widehat{9} \times 0,\widehat{9}$	Resultado finito o 0,999…	61% 37%	60% 28%
Probabilidad de extraer un 5 entre los números naturales: P(5). Probabilidad de extraer un número entre 1 y 10.000.000: P(x)	P(5) = 1/∞ P(5) es muy pequeña P(x) = 10.000.000 / ∞ P(x) es muy pequeña P(x) > P(5)	35% 25% 22% 15% 16%	38% 33% 24% 18% 17%
¿Origen? $\cdots \frac{1}{35}, \frac{1}{34}, \frac{1}{33}, \frac{1}{32}, \cdots$ ¿Final?	No tiene origen o Porque hay infinitos números Sí tiene origen o Es infinito o Es 1/∞ No tiene final Sí tiene final o Es 1	54% 19% 43% 18% 17% 29% 58% 31%	45% 16% 45% 15% 15% 24% 67% 34%
¿Es correcta la expresión ∞ + 5 = ∞? Hotel infinito	Sí, la expresión es correcta No, la expresión no es correcta Sí se pueden alojar 5 personas más No se podrían alojar 5 personas más	62% 24% 32% 41%	65% 17% 28% 45%

Lenguaje del infinito. Las expresiones equivalentes a infinito se diversifican considerablemente y aquellas que permanecen como elementos propios mantienen unos valores muy próximos a los del nivel anterior. Por otra parte, la única función que sigue dando porcentajes significativos es la del adjetivo que se continúa utilizando como atributo de conjuntos infinitos.

Tabla 82	Elementos propios: lenguaje del infinito	1BTO	2BTO
Expresiones equivalentes a infinito	Interminable Referencias espaciales Sin fin Referencias numéricas	39% 26% 29% 21%	31% 20% 27% 20%
Funciones lingüísticas	Adjetivo	49%	49%

6.2.4.2. ELEMENTOS METAFÓRICOS.

Las referencias métrico-espaciales relacionadas con las limitaciones propias de nuestros sentidos e instrumentos de medida siguen poblando el esquema conceptual de este nivel de manera significativa como podemos observar en la tabla 83. Se sigue apelando a la frontera entre lo físico y lo inmaterial para justificar determinados resultados relativos, en su mayor parte, a la divisibilidad indefinida: "el tamaño es tan pequeño que no lo podríamos pintar", "no puede existir nada material que sea infinito", "llegará un momento en que sea imperceptible". La idea de medida también viene asociada frecuentemente con lo infinito y lo infinitesimal en un último intento de establecer vínculos entre el mundo finito y el infinito: "los números son infinitos y no se pueden medir ni comparar", "el punto no tiene medida", "hay círculos que ni se pueden medir". Tampoco falta en este esquema conceptual la relación entre el contenido y los límites del continente de un determinado conjunto sea numérico o geométrico, "al final el segmento termina llenándose", "con lo que el número de segmentos que caben es finito", donde el verbo "llenar" resume perfectamente la función metafórica de un conjunto como recipiente que contiene un determinado tipo de objetos. En este nivel se incide en mayor medida en la idea de "tendencia" mediante términos potenciales más propios del análisis, *el resultado rozará el uno*, mientras que comienzan a incorporarse nuevos elementos que apuntan hacia la biyección de dos conjuntos: "en los dos conjuntos igual porque van en paralelo", "los puntos de la curva AB son reflejos de los puntos del intervalo [2, 5]".

Tabla 83	**Elementos metafóricos básicos: métrico-espaciales**
Si es algo "físico" o material, el segmento más pequeño es el punto, la mínima unidad	
No importa el grosor de la línea, sino que el aparato con que medimos sea más preciso	
Aunque dejen de ser visibles a los ojos humanos, se podrán seguir haciendo segmentos	
Se obtendría un segmento [un punto] con medidas pequeñísimas, ni tan siquiera visibles para el ojo humano	
Llegará un momento en que sea tan imperceptible que no se podrá medir	
Obtendremos la parte más pequeña que es capaz de medir el instrumento de medida que utilicemos	
Un punto es algo simbólico ya que el tamaño es tan pequeño que no lo podríamos pintar	
No puede existir nada material que sea infinito	
Lo haces tan pequeño que desaparece	
Queda un átomo de segmento	
Los números son infinitos y no se pueden medir ni comparar	
Los puntos son representaciones que no incluyen ni masa ni volumen	
También podríamos poner x puntos en la circunferencia pequeña pero van a estar más juntos	
Los puntos son redondos y quedarían espacios en blanco entre ellos	
No se puede medir la cantidad de puntos porque el punto no tiene medida / Nadie sabe cuánto mide un punto	
La longitud es tan grande que no se puede medir, por tanto será infinita o indeterminada	
Los dos tendrán igual porque el infinito no se puede medir [no tiene medida]	
Mientras se pueda medir el diámetro de los círculos podrá existir la suma	
No se puede realizar la suma porque hay círculos que ni se pueden medir	
El infinito no tiene medida, por eso no hay diferentes tamaños de infinito	
Siempre podemos seguir alargando la sucesión	
Crece pero cada vez con menor medida y será muy difícil sobrepasar el 4	
El triángulo es finito y no se puede sacar algo infinito de algo finito	
Al final el segmento terminaría llenándose, con lo cual el número de puntos sería finito	
Hasta que no quede más espacio para dibujar círculos	
Cabrían infinitos puntos en el cuadrado limitados por su área que es 100 cm^2	
Siempre queda un sitio para otro punto más	
Depende de hasta dónde llegues sumando	
Dentro de un segmento no hay infinitos puntos pero dentro de una recta sí	
En el segundo conjunto sólo entran los números pares y en el primero todos	
Quedará una fracción lo más cercana posible a 0	
El resultado rozará el uno	
Todas llegarían a tocar al eje X	
1,999... está en el límite entre el 1 y el 2 / 1,999... es infinito y después de él iría el 2	
En los dos igual porque van en paralelo	
Los puntos de la curva AB son reflejos de los puntos del intervalo [2, 5]	

Por su parte, los elementos cinético-temporales correspondientes al esquema conceptual de este nivel presentan de nuevo en su vertiente temporal el isomorfismo con la noción espacial de recta, “el primer conjunto parte de un número mayor”, “llegará un momento en que el número sea infinito”, “aunque empiece más tarde que el otro [conjunto]”, “no se sabe cuándo llega”, etc. En cuanto al aspecto puramente cinético, se repiten la mayor parte de las imágenes registradas en el nivel anterior, “el valor va creciendo”, “se va hacia el infinito”, “va creciendo al principio muy rápido”, “si la serie se detuviese en algún punto”, etc., pero junto a ellas encontramos un nuevo tipo de expresiones que se hacen eco del lenguaje propio asociado al concepto de límite tales como “se va acercando a 4 lentamente”, “los dos tienden siempre a más”, “se acerca mucho al eje X”, “nunca llegan a tocarlo”, etc.

Tabla 84	Elementos metafóricos básicos: cinético-temporales
Hay cosas que son infinitas y tardaríamos en contarlas muchos años	
Nos llevaría toda la vida y ni con eso lo conseguiríamos	
Llegará un momento en que el número sea infinito / Llega un momento en el que no caben más puntos	
El bombo se llenará en algún momento	
Aunque empiece un conjunto más tarde que el otro, al ser infinito, daría lo mismo	
El primer conjunto parte de un número mayor	
No se puede calcular ya que se va hacia el infinito y no sabes cuándo llega	
El valor va creciendo al principio muy rápido pero al final va muy despacio	
Crece [porque no pararías de sumar] aunque cada vez más lentamente	
Aunque sea de forma más lenta la sucesión continúa	
Los dos igual porque son infinitos, nunca puedes parar de contar	
El primer conjunto hará el recorrido de 1 hasta 1.000.000 y luego seguirá	
El primero llegaría al siguiente conjunto y seguiría hasta el infinito	
El segundo va saltando números	
Si la serie se detuviese en algún punto, el primer conjunto tendría más números	
Según cuándo pares de dividir el segmento, obtendrás uno más pequeño que el anterior pero nunca indivisible	
El infinito se usa para decir que un número o algo se va demasiado lejos o es demasiado alto	
A y C se acercan mucho al eje X pero nunca llegan a tocarlo / Se acerca a 4 pero nunca llega a conseguirlo	
Se va acercando a 4 lentamente porque las fracciones son cada vez más pequeñas, pero no llegará nunca	
Los dos tienden siempre a más	

Los elementos vinculatorios siguen sin experimentar un crecimiento porcentual significativo pero sí hemos de recoger el establecimiento de vínculos cualitativamente diferentes a los que han aparecido en los niveles anteriores asociando contextos diferentes al numérico y geométrico; así,

Tabla 85	Elementos metafóricos vinculatorios
No habrá final porque los números son infinitos y el segmento se podrá dividir infinitas veces	
Esta división de segmentos es como el cociente 1/n, cuanto más grande es n, más pequeño es el cociente	
Al dividir el segmento siempre se obtendrá un número, por pequeño que sea, porque siempre que divides un número entre otro, te sigue quedando otro	
Sí se puede continuar dividiendo cada segmento, a lo mejor a simple vista no pero quizás imaginando que lo pones matemáticamente, cualquier número se puede dividir por la mitad siempre	
Cuando divides el segmento sucesivamente quedará una fracción lo más cercana posible a 0, ya que tenemos 1/2, 1/4, 1/8, ... 1/4 y no se puede determinar	
Si en una ecuación nos da como resultado 5/0 significa que en la gráfica hay una asíntota vertical	
La distancia entre 1,999... y 2 es tan pequeña que se desprecia	
En la semirrecta porque la distancia es mayor que en [0, 1]	
El primero es mayor porque el conjunto empieza más a la izquierda en la recta	
Nunca se llega a llenar el triángulo hasta el vértice; lo que pasa es parecido a los números decimales periódicos	

tenemos, "si en una ecuación nos da como resultado 5/0 significa que en la gráfica hay una asíntota vertical", en un contexto funcional, "la distancia entre 1,999… y 2 es tan pequeña que se desprecia", *en* un contexto de medida, o "quedará una fracción lo más cercana posible a 0" en un contexto analítico.

Los verbos alusivos a la relación entre conjuntos tales como *recoger*, *caber*, *abarcar*, *meter*, *incluir*, *englobar*, *comparar*, *corresponder*, *proyectar*, etc. han sufrido un incremento notable como también lo han hecho los sinónimos de *aumentar*: *prolongar*, *estirarse*, *sobrepasar*, *acumular*, *prolongar*, etc.; el resto de categorías tanto espaciales como cinético-temporales se mantiene invariante y se consolidan como verbos habituales a la hora de referirse a infinito o a procesos infinitos.

Tabla 86

Verbos espaciales			Verbos cinético-temporales		
Finitud	**Infinitud**	**Otros**	**Finitud**	**Infinitud**	**Otros**
Alcanzar	Seguir	Medir	Alcanzar	Cansarse	Tardar
Llegar	Alargar	Contar	Llegar	No acabar	Durar
Terminar	Añadir	Comparar	Terminar	No parar	Saltar
Acabar	Aumentar	Caber / Entrar	Acabar	Seguir y seguir	Ir (+ gerundio)
Desaparecer	Continuar	No notar / Ver	Parar	Seguir (+ gerundio)	Empezar (antes que)
Redondear	Superar	Reducir	Detenerse	Saltar	Bajar
Aproximar	Crecer	Contener	Desaparecer	Acercarse	Subir
Conseguir	Extender	Abarcar	Finalizar	No detenerse	Venir
Limitar	Prolongar	Meter		Pasarse (superar)	Partir (comenzar)
Delimitar	Estirarse	Empezar		Avanzar	Llenar
Lograr	Sobrepasar	Recoger		Tender	Recorrer
Despreciar	Acumular	Comparar			
	Prolongar	Incluir			
	Decrecer	Corresponder			
	Repetir	Proyectar			
		Englobar			

Por último, también se observa la conservación de las categorías de adverbios y adjetivos utilizados si bien se ha incrementado el vocabulario respectivo. Respecto a éste, es de destacar la incorporación de términos inexistentes o infrecuentes en niveles anteriores: *proyección*, *indeterminación*, *secuencia*, *sucesión*, *dimensión*, *asíntota*, *progresión*, etc. que, como ya hemos indicado, reflejan la asunción de los términos más frecuentes en la instrucción matemática de este nivel. De hecho, si fijamos nuestra atención en el uso de adjetivos podemos apreciar cómo aquellos que se utilizan para representar "lo grande" no han variado mientras que las acepciones que se refieren "lo pequeño" han experimentado un apreciable incremento. De la misma manera, hallamos términos tales como *cercano*, *convergente* o *muy próximo* vinculados estrechamente a la noción de límite en torno a la que gira buena parte del currículo de bachillerato.

Tabla 87			
Adverbios	**Adjetivos**		**Sustantivaciones, adverbializaciones y otros términos y expresiones**
Aproximadamente	Inimaginable	Remoto	Hasta [El más allá] [el infinito]
Sucesivamente	Inconcebible	Mínimo	Me llevaría / tardaría toda la vida
Infinitamente	Inapreciable	Insignificante	Llegar un momento en que... / Hasta que…
Continuamente	Imperceptible	Despreciable	Todo, nada
Eternamente	(No) representable	Etéreo	Prolongar [continuar]hasta donde queramos
Prácticamente	Imposible	Infinitesimal	Cabrán tantos como quieras
Indefinidamente	Irrealizable	Diminuto	Tan grande [pequeño] como queramos
Sumamente [pequeño]	Incontable	Ínfimo	Cada vez más pequeño / grande
Constantemente	Incalculable		Siempre hay otro más grande / más pequeño
Realmente [grande]	Indefinido	Cercano	Lo más cercano posible a...
Suficientemente [próximo]	Interminable	Convergente	Cada vez se acerca más
Progresivamente	Inacabable	Muy próximo	Infinidad
Bastante	Inagotable	Rápido	Casi igual a / casi nula
Mucho	Irreducible	Lento	Dimensión
Siempre	Indivisible	Eterno	Sucesión / Progresión
Nunca	Inalcanzable	Periódico	Proyección
Jamás	Insuperable	Progresivo	Aproximación / Redondeo
Cerca / Lejos	Ilimitado	Consecutivo	Indeterminación
Casi	Indeterminado		Asíntota
Poco a poco	Largo	+	
	Grande		
	Mucho	Superlativos	
	Numeroso		
	Demasiado		

Finalmente, respecto a la función que desempeña el término infinito en las expresiones registradas, podemos apreciar que la mayor parte de ellas son invariantes respecto a los niveles anteriores, acentuándose, si cabe, su adverbialización, *sigue hasta el infinito, llega hasta el infinito, tiende a infinito,* etc.

Tabla 88	**Función gramatical del término “infinito”**
Los números naturales son infinitos	Se extiende / Sigue hasta el infinito
El resultado puede ser infinito	Es una cantidad infinita de puntos
La cantidad de segmentos es infinita	Sería un valor infinito
Hay / Tiene infinitos números decimales	No se puede saber cuánto es el infinito
Pueden caber infinitos puntos	Los dos conjuntos llegan hasta el infinito
Uniendo segmentos se hace [medirá] infinito	Ambas progresiones tienen límite infinito
El primer conjunto va de 1.000.001 al infinito	El número de puntos tiende a infinito
Llegaremos a un número infinito	Su límite en el infinito sería 0

6.2.4.3. ELEMENTOS SIMBÓLICOS.

En los elementos simbólicos operacionales se observan ciertas novedades respectos de los niveles anteriores debido a las posibilidades ofrecidas por los nuevos enunciados que inducen, directa o indirectamente, a realizar operaciones no sólo con infinitas cantidades sino también con cantidades infinitas generando una verdadera aritmética del infinito. En este sentido hallamos numerosas afirmaciones sobre la posibilidad de realizar tales operaciones o sobre sus posibles resultados: “infinito menos cualquier número es una indeterminación”, “si despejamos los infinitos en $\infty + 5 = \infty$ nos queda $5 = 0$ y esto no existe”, “si a infinito sumas un número seguirá siendo infinito", etc. Otra incorporación al esquema conceptual como elemento simbólico operacional se refiere a la idea de aproximación o tendencia: "no va a llegar a 4 porque los números que sumamos son cada vez menores", "obtendremos el número más próximo a 2", "el número multiplicado roza el uno", etc. No obstante, existe una pequeña proporción de estudiantes que entiende como factibles operaciones de este tipo y considera que "si nos ponemos a sumar llegamos a 1", "la suma de todos los diámetros es la altura del triángulo", etc. Por su parte, la suma como prototipo de crecimiento indefinido y/o indeterminado continúa representando un elevado número de respuestas: "la suma de algo infinito siempre es algo infinito", "como hay infinitos triángulos, la suma de sus áreas será infinita"," da infinito porque no se especifica cuándo termina la suma", etc. Y, por último, respuestas del tipo "el producto iría variando dependiendo del número de decimales que tuviera cada número" nos indican que el sujeto no entiende un número con infinitos decimales como un único objeto sino como una sucesión de números decimales, en consonancia con los resultados de diversos autores ya referidos en el capítulo 3.

Tabla 89	Elementos simbólicos: operacionales
Quedan infinitos ya que un millón es una cantidad insignificante [un número finito]	
Infinito menos cualquier número es una indeterminación ya que puede dar cualquier número	
Si a un número le sumas algo, no puede dar como resultado el mismo número, por lo tanto 4 + 5 = 4 no es correcto	
Siempre se puede sumar 5 a algo que es abierto, que no tiene límites	
Como infinito no tiene un valor determinado si le sumas 5 pues da infinito	
A infinito no se le puede sumar 5 porque nunca acaba	
Si a infinito le sumas un número seguirá siendo infinito	
Es incalculable porque no se pueden realizar operaciones con el infinito	
Al multiplicar un número periódico por otro igual, el resultado seguirá siendo infinito	
No se puede multiplicar [0,999... x 0,999...] porque son números infinitos	
Como hay infinitos triángulos, la suma de sus áreas será infinita	
Da infinito porque se suman infinitas mitades	
La suma sería infinita porque no se acabaría de contar los diámetros	
Da infinito porque no se especifica cuándo termina la suma / porque siempre se suma algo	
Si sumas muchos números pequeños al final siempre te da un número muy grande	
Aunque se sumen pequeñas cantidades [1/4] siempre crecerá [lentamente] y será infinito el resultado	
No se puede calcular con exactitud ya que a partir de 3/1000 es una suma casi despreciable pero se sigue sumando	
No se puede saber el resultado porque cada vez que sumamos va aumentando sin ningún orden	
No va a llegar a 4 porque los números que sumamos son cada vez menores	
Se acerca a 4 ya que 1/4 = 0, con lo cual terminaremos sumando cero	
Se acerca a 4 porque se le va sumando la mitad del número anterior y entonces no sobrepasa el 4	
Sumándole a 2 un número positivo que tienda a 0 obtendremos el número más próximo a 2	
Puesto que el número multiplicado roza el uno, el resultado también rozará el uno	
En cuanto le sumemos un número más a 1,999.... se transformaría en 2	
Tendríamos $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ y si nos ponemos a sumar llegamos a 1	
La suma de todos los diámetros es la altura del triángulo	
En realidad se está dividiendo un metro en muchas partes, hasta el infinito, y cuando sumes todo dará 1 metro	
La suma de todos los triángulos será 25 cm^2 ya que el primero tiene 12.5 cm^2 y los demás suman todos un área igual	
Como 0,999... = 1 entonces el producto [0,999... x 0,999...] es 1	
El producto iría variando dependiendo del número de decimales que tuviera cada número	
Teóricamente se puede dividir por infinito pero llegará un momento en que el segmento ya no se pueda dividir más	
No hay nada que al multiplicarlo por 0 de 5 [5/0]	

En lo que se refiere a los elementos relacionales resultan de especial interés aquellos que aportan una imagen de la equipotencialidad de dos conjuntos: “$\mathbb{N}$ y $\dot{3}$ tendrán los mismos ya que es la misma progresión pero multiplicada por 3 cada uno de sus números”, “tienen los mismos porque los puntos de la curva AB son reflejos de los puntos [2, 5]”, etc. Frente a este tipo de respuestas aún continúan siendo más numerosas aquellas otras en las que los modelos de *inclusión* e *infinito = infinito* son predominantes a la hora de establecer una relación de orden entre conjuntos. Y, por último, también presenta una frecuencia significativa los elementos correspondientes al modelo de *indefinición* de infinito que para muchos sujetos impide establecer ordenación alguna entre conjuntos infinitos.

Tabla 90 — **Elementos simbólicos: relacionales**
1,999... es infinito y después de él iría el 2
No hay un número más pequeño
4 + 5 es mayor que 4, pero matemáticamente 5 unidades es una diferencia inapreciable
El número más pequeño es el 2,000...1
Habrá los mismos puntos en el tramo de curva que en el intervalo [2, 5], es decir, infinitos
Los dos conjuntos tienen los mismos porque acaban en infinito / porque son infinitos
Como el infinito no se puede medir, los dos tendrán igual
No hay distintos tamaños de infinito porque si a infinito le sumas uno sigue siendo infinito
El infinito es tan grande que no somos capaces de ver la diferencia entre uno y otro
No existen diferentes tamaños de infinito porque qué más da 4 que 3 · 4, ninguno de los dos acaba nunca
Hay los mismos puntos en AB que en [2, 5] ya que la distancia entre sus extremos es la misma
Todas tienen el mismo número de puntos porque todas las líneas ocupan el mismo espacio
Las dos circunferencias tienen los mismos porque las líneas contienen infinitos puntos sin tener en cuenta su longitud
Tendrán los mismos ya que es la misma progresión pero multiplicada por 3 cada uno de sus números [$\mathbb{N}$ y $\dot{3}$]
Tienen los mismos porque los puntos de la curva AB son reflejos de los puntos [2, 5]
En AB hay más puntos que en [2, 5] porque es más largo
En la semirrecta hay más puntos porque contiene al intervalo [0, 1]
En la semirrecta hay más porque no tiene fin y, en cambio, el intervalo está limitado por dos valores
Aunque los dos conjuntos son infinitos, el primero es mayor porque contiene al segundo
El primer conjunto sería mayor porque llegaría al segundo conjunto y seguiría hasta el infinito
En AB hay más puntos porque su recorrido es mayor que el del intervalo [2, 5]
En un cuadrado de 30 cm. cabría tres veces más que en uno de 10 cm.
El primero es mayor porque va de uno en uno y el otro va de tres en tres
El primer conjunto es mayor porque aunque los dos son infinitos empieza un millón de números antes
$\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ son infinitos pero hay más $\mathbb{R}$, luego hay distintos tamaños de infinito
No se pueden ordenar porque todos son / llegan / tienden a infinito
Es difícil ordenarlos porque no tienen un número determinado, tienen infinitos números
Son conjuntos que no se pueden ordenar porque en algunos casos son incontables y en otros son infinito
Una cosa no puede ser más infinita que otra, excepto los números reales y los naturales, ya que los números reales van de $-\infty$ a $+\infty$

6.2.4.4. ELEMENTOS PRE-FORMALES.

Incluimos por primera vez en un ECN los elementos simbólicos pre-formales que, como ya se ha indicado al comienzo de este capítulo, se hacen eco de propiedades del infinito que suponen cierto grado de abstracción prácticamente ausente en los niveles anteriores; no implican su demostración sino el conocimiento, en su mayor parte, o la intuición de su veracidad. En realidad podemos hallar tras estos enunciados las huellas nítidas del proceso de enseñanza, “en un cuadrado hay infinitos puntos porque el punto no tiene dimensión”, “5/0 significa que en la gráfica hay una asíntota vertical", "un infinito puede ser el de $\mathbb{N}$ y otro el de $\mathbb{R}$", "se trata de una función en cuyo dominio de definición no estaría incluido el número 0", "los puntos de la curva AB son proyecciones del intervalo [2, 5]", etc., si bien también se observa una asimilación razonada y razonable de los mismos, "para demostrar que las dos circunferencias tienen la misma cantidad de puntos trazaría rectas que corten a ambas circunferencias", "los dos conjuntos tendrán el mismo número de elemento ya que es la misma progresión pero multiplicada por 3 cada uno de sus números", etc. A la vista de este cambio cuantitativo pero especialmente cualitativo, observamos que el proceso de aprendizaje ha provocado un punto de inflexión en los elementos hallados hasta ahora, introduciendo nuevos términos e imágenes asociadas; esto no significa que el ECN resultante sea adecuado para conformar una noción integral de infinito pero sí nos permite conjeturar que una revisión de tales elementos podría contribuir a mejorar dicho esquema.

Tabla 91	Elementos simbólicos: pre-formales
Cualquier segmento tiene infinitos puntos Entre dos números cualesquiera siempre hay infinitos números En un cuadrado hay infinitos puntos porque el punto no tiene dimensión	
Es como el cociente 1/n, cuando más grande es n, más pequeño es el cociente 5/0 significa que en la gráfica hay una asíntota vertical Si 5/0 fuera un límite significaría infinito, pero si se trata de una fracción no tendría ningún significado Se trata de una función en cuyo dominio de definición no estaría incluido el número 0 ya que las fracciones cuyo denominador es cero no existen	
No se puede dividir entre 0, pero sí se puede calcular un valor aproximado mediante límite $\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x} = \infty$	
Las tres líneas tienen el mismo número de puntos ya que tienen el mismo origen y final y aunque varíe la posición relativa de los puntos, la cantidad de los mismos no cambiará Los puntos de la curva AB son proyecciones del intervalo [2, 5] La ecuación tendrá infinitas soluciones porque una incógnita va a estar en función de la otra Hay los mismos puntos en el tramo AB que en [2, 5] porque a cada x le corresponde una y Hay los mismos porque a cada punto de AB le corresponde una proyección ortogonal sobre el intervalo [2, 5] Para demostrar que las dos circunferencias tienen la misma cantidad de puntos trazaría rectas que corten a ambas circunferencias Tiene infinitas soluciones ya que dando un valor a x hallarás un valor y con lo que podrás representar una recta Tienen los mismos puntos porque la circunferencia grande es la misma que la pequeña pero proyectada Tendrán los mismos elementos ya que es la misma progresión pero multiplicada por 3 cada uno de sus números	
Sería una progresión geométrica con razón mayor que -1 y menor que 1 y, por lo tanto, se puede calcular S_∞	

6.2.4.5. ELEMENTOS FINITISTAS/INFINITISTAS.

Nos encontramos en este caso que aunque se reduce notablemente el porcentaje de respuestas finitistas aún forman parte del ECN, en particular en lo que se refiere a la división indefinida, "hasta que el segmento se quede en un punto", y a las limitaciones impuestas por el perímetro o extremos de recintos geométricos, "al final el segmento terminaría llenándose", "llega un momento en que no caben más puntos", "el triángulo tiene fin y llegará un momento en que dejará de haber círculos", "no se puede sacar algo infinito de algo finito", etc. Esta última situación, que recoge la implicación "si existe un contorno cerrado entonces sólo puede albergar una cantidad finita de objetos", se encuentra muy arraigada aún en el ECN y estrechamente ligada a la relación de proporcionalidad entre recintos de diferente tamaño que establecen numerosos sujetos.

Tabla 92	Elementos finitistas
Hasta que el segmento se quede en un punto [átomo]	
Llegará un momento en que ya no se pueda dividir	
En la práctica esto es imposible ya que no se puede dividir tantas veces un segmento	
Por muy pequeño que sea, llegaremos a un triángulo del que ya no se pueda hacer otro más pequeño	
Hasta que el diámetro sea de 1 mm. porque si fuera más pequeño ya no sería un círculo, sería un punto	
Se llegaría a un extremo en el que no se podrían seguir añadiendo segmentos	
Al final el segmento terminaría llenándose, con lo cual el número de segmentos que cabría sería finito	
No se pueden situar infinitos segmentos dentro de un segmento porque un segmento es de longitud finita [ya que tiene principio y fin]	
Se podría situar un número de segmentos bastante grande pero no infinitos porque llega un momento en que no caben más	
Llega un momento en que no caben más puntos	
El triángulo tiene fin y llegará un momento en que dejará de haber círculos	
El triángulo es finito y no se puede sacar algo infinito de algo finito	
Todas las gráficas llegarían a tocar al eje X	
No hay hoteles con habitaciones infinitas	
2,1 es el siguiente a 2	

Los elementos de transición, por su parte, giran en torno a ideas semejantes a los hallados en niveles anteriores, es decir en ellos convive la contradicción entre el sentimiento de finitud de los procesos planteados y el reconocimiento de su carácter indefinido o inacabado: una parte mínima susceptible de seguir dividiéndola, una cantidad muy grande o muy lejana que puede continuar creciendo o alejándose, un punto o un momento en el que se alcanza el infinito, etc. Así, pues, la similitud entre los diferentes niveles pone de manifiesto que estos elementos, lejos de ser efímeros, mantienen su presencia en el ECN durante bastante tiempo a pesar del proceso de aprendizaje

Tabla 93	Elementos de transición finitista / infinitista
Se obtendrá una parte mínima infinita ya que siempre podría seguir dividiendo el segmento por la mitad	
Ambos tienen igual debido a que los dos conjuntos "finalizan" en el infinito	
Si la serie se detuviese en algún punto, el primero tendría más números	
El primer conjunto es mayor porque llegando al mismo punto del infinito los dos, habrá acumulado más números	
Un número de segmentos bastante grande sí, pero infinitos no; se aproximaría a infinito pero nunca llegaría a serlo	
El infinito se usa para decir que un número o algo va demasiado lejos	
Dependiendo del tamaño de los puntos puede caber un número limitado de puntos o un número infinito	
Una recta tiene infinitos puntos, pero como éstas tres están delimitadas tendrá más la A por ser la mas larga	
En el intervalo [0, 1] también encontramos casi infinitos números	
Hasta que llegue un momento en el infinito [que no se sabe] que pongas un 1	
No se sabe hasta dónde puede llegar	
El más pequeño sería 2,00000….1	
La probabilidad es enormemente pequeña porque es un número entre infinitos números	

En cuanto a los elementos potenciales podemos constatar cierta estabilidad pero con un incremento significativo en expresiones que indican tendencia o potencialidad y que conjugan la vertiente afirmativa y negativa con el fin de acentuar el aspecto potencial del proceso descrito: "se acercan irremediablemente a y = 0 pero nunca llegan", "son convergentes a 0 pero nunca lo tocan", etc. Las expresiones *se acerca a 0* o *son convergentes a 0* tienen un significado matemático bastante preciso pero la mayor parte de los sujetos no lo entiende aún así y necesita redundar en el carácter asintótico de la sucesión o la serie correspondiente.

Tabla 94	Elementos infinitistas potenciales
Siempre se obtendrá un número por pequeño que sea	
Siempre habrá más círculos que dibujar, pero la suma no llegará a infinito	
A 1,999... siempre se le podrá añadir un 9 más	
Por mucho que dividas siempre te queda algo, no te puedes quedar sin segmento	
Hay infinitos números tanto en [0,1] como en [0, ∞) porque siempre se puede dividir	
El segmento se puede dividir todas las veces que desees	
Siempre aumentará el número de veces que salga el uno, el dos o los múltiplos de 2 al lanzar el dado	
El área sigue creciendo haciéndose infinita	
Al dividir 5 entre números que se acercan a cero, el resultado es cada vez mayor	
Para recorrer una distancia primero tienes que llegar a la mitad y luego a la mitad de la mitad y así infinitas veces	
Como se suman números positivos el resultado irá creciendo	
Es una sucesión de polígonos regulares cada vez con más lados	
Puedes unir y seguir uniendo porque no hay límites	
Nunca llegaríamos al vértice	
No hay un punto último	
Da infinito porque nunca pararías de sumar segmentos	
Hay infinitos elementos porque no se puede parar de contar	
Tenderá a 0, pero nunca llegará a 0 / Son convergentes a 0 pero nunca lo tocan	
Se acercan irremediablemente a y=0, pero nunca llegarán	
No se podrían multiplicar ya que los dos son periódicos y nunca terminarían los decimales [0,999… x 0,999…]	
Quedará una fracción lo más cercana posible a 0, ya que tenemos 1/2, 1/4, 1/8, … 1/∞ y no se puede determinar	
Se acerca cada vez más a 4 pero no va a llegar porque los números que sumamos son cada vez menores	
En realidad nunca podríamos dejar de poner puntos si fueran de dimensiones infinitamente pequeñas	
Se iría reduciendo pero nunca llegaría a desaparecer	
No llegaría a dos metros porque cada segmento es la mitad del anterior	
Como los triángulos se extienden infinitamente no podemos hacer su suma concreta por no tener un límite	
Infinito significa algo que nunca [acaba] llega a su fin	

Lo más reseñable que encontramos entre los elementos actuales del presente nivel es la irrupción definitiva de la imagen de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos: “a cada valor de x en [2, 5] le corresponde un punto en la curva AB”. El hecho de que las nociones de correspondencia, aplicación, biyección, etc. hayan reducido su presencia considerablemente en el currículo de Educación Secundaria ha dado lugar a una amplia diversificación en el uso de términos equivalentes que no por imprecisos o metafóricos le restan riqueza al lenguaje utilizado por los estudiantes: “los puntos de la curva AB son reflejos del intervalo [2, 5]”, “sin los puntos del intervalo [2, 5] no se podrían dar los de la curva AB”, “los dos conjuntos son iguales porque van en paralelo”, “es la misma progresión pero multiplicada por 3”, “una incógnita va a estar en función de la otra”, etc. Desgraciadamente este vocabulario no lleva asociada, en el esquema conceptual individual, una definición conceptual más o menos precisa sino sólo una imagen intuitiva en la mayor parte de los casos; esto impide a un mismo sujeto enfrentarse a situaciones equivalentes bajo contextos o representaciones diferentes.

Tabla 95	Elementos infinitistas actuales
Infinitos porque cualquier segmento tiene infinitos puntos	
Entre dos números siempre hay infinitos números	
El conjunto de los números naturales es infinito	
Hay infinitos puntos en el interior de cualquier cuadrado tenga la medida que tenga	
Podemos situar infinitos segmentos dentro de un segmento dado dividiendo el segmento a la mitad, luego esas mitades otra vez a la mitad, etc	
Las tres igual ya que cualquier línea tiene infinitos puntos	

Tabla 95 (cont.)	Elementos infinitistas actuales
Tendríamos 1/2+1/4+1/8+1/16+··· y si nos ponemos a sumar llegamos a 1 metro Aplicando la fórmula de una progresión geométrica se obtiene $S_\infty = a_n / (1 - r) = 1/1/2 = 2$ Al sumar todos los segmentos se llegaría a dos metros Como 0,999… = 1 entonces 0,999… x 0,999… = 1·1 = 1 Se obtiene un círculo ya que rotas las rectas infinitas veces El final de la sucesión será 1/∞ = 0 No hay ninguna probabilidad [es cero] ya que los números naturales son infinitos La suma de todos los triángulos es 25 cm^2 Me quedo sin el segmento porque lo voy dividiendo cada vez más / Al final desaparecería el segmento La suma de todos los diámetros sería una cantidad finita: la altura del triángulo Hay los mismos porque los puntos de la curva AB son reflejos del intervalo [2, 5] Hay el mismo número de puntos, lo que sucede es que se encuentran a una altura diferente unos de otros La ecuación $x + 2y = 3$ tendría infinitas soluciones ya que a x le puedes dar cualquier valor y hallar la y o al revés Hay infinitas soluciones porque una incógnita va a estar en función de la otra A cada punto de una circunferencia le corresponde una proyección sobre la otra circunferencia La circunferencia grande es la misma que la pequeña pero proyectada Con rectas que corten a las dos circunferencia se puede comprobar que ambas tienen la misma cantidad de puntos Los dos conjuntos contienen los mismos porque van en paralelo: 5 va con 1.000.005, 6 va con 1.000.006, etc. Tendrán los mismos ya que es la misma progresión pero multiplicada por 3 cada uno de sus números Hay el mismo número porque sin los puntos del intervalo [2, 5] no se podrían dar los puntos de la curva AB Hay los mismos porque a cada valor de x en [2, 5] le corresponde un punto en la curva AB	

6.2.4.6. ELEMENTOS OBSTÁCULO Y MODELOS INTUITIVOS.

Los elementos epistemológicos correspondientes a la inclusión experimentan un incremento apreciable en cuanto a la diversidad con que se expresa la implicación $A \subset B \rightarrow \mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$, mientras que los demás se mantienen en la línea de niveles inferiores, si bien con variaciones porcentuales significativas como se puede apreciar al observar la evolución de los elementos propios.

Tabla 96	Elementos obstáculo: tácitos epistemológicos
Infinito = infinito	Los dos tendrán igual porque son infinitos [acaban en el infinito] En ambos casos caben infinitos puntos e infinito = infinito No hay varios tamaños de infinito porque el infinito no se puede hallar Un infinito sería $\mathbb{R}$ y en él entraría también $\mathbb{N}$ que también son infinitos, pero no se podría decir que uno es mayor que otro porque a ninguno se le acaban los números No puede haber distintos tamaños de infinito porque en una hipotética operación $\infty^2 + 2\cdot\infty + \infty$, por ejemplo, el resultado se reduce a infinito Qué más da ∞ que 3 · ∞
Inclusión	El primero es mayor porque contiene al segundo; aún así los dos son infinitos El primero es mayor porque el segundo, $\dot{3}$, pierde números que el primero, $\mathbb{N}$, tiene El primero es mayor porque va de uno en uno y el otro va de tres en tres La semirrecta tiene más porque contiene a [0, 1] / porque va hasta el infinito El primer conjunto tiene más números porque $a_n = n$ y $a_n = 3n$ Es imposible que contengan la misma cantidad de puntos ya que una es el doble de la otra El primero es mayor porque tiene un millón de números más El primer conjunto es mayor porque empieza más a la izquierda En la curva AB hay más puntos ya que si la estiramos es más larga que el intervalo [2, 5]

Tabla 96 (cont.)	Elementos obstáculo: tácitos epistemológicos
Inclusión	Una circunferencia es más pequeña que otra por lo que habrá más puntos en una que en otra Cabrían infinitos puntos en ambos cuadrados; sin embargo en el segundo, al ser mayor el área, el número de puntos sería mayor Hay infinitos puntos en ambos cuadrados pero en el de 30 cm. hay nueve veces más Es mucho más probable sacar un 5 ya que es 1 entre ∞ y la otra es 10.000.000 entre ∞
Punto = Marca	Los dos contienen infinitos puntos muy pequeños Tendría una cantidad finita pero no se podría saber sin saber cuánto mide un punto Nadie sabe cuánto mide un punto Dependiendo del tamaño de los puntos puede caber un número limitado de puntos o un número infinito / Según el diámetro de los puntos cabrán más o menos En las tres líneas cabrían infinitos porque los puntos podrían ser muy pequeños, aunque depende del tamaño de los puntos El primer cuadrado contiene 100 puntos y el segundo 900 puntos

Por el contrario, los elementos obstáculo didácticos incorporan una serie de imágenes propias de los nuevos conceptos introducidos a lo largo del bachillerato, como se puede apreciar en la tabla 97. En primer lugar, conviene observar que expresiones tales como “el número más grande” que hasta ahora se referían a un número no definido se identifican en los niveles superiores con el término “infinito”, desde una perspectiva finitista. Por su parte, los elementos correspondientes a la indefinición de infinito continúan siendo los más frecuentes y diversos; recordemos que bajo esta denominación se recogen diferentes interpretaciones tales como imposibilidad, “es imposible calcular 0,999… x 0,999…” o “jamás podríamos contar todos los diámetros”, falta de información, “para saber la probabilidad de extraer un 5 tendría que saber las bolas que hay en el bombo” o “no sabes cuánto es infinito”, indeterminación, “no daría un resultado exacto” o la propia indefinición, “no sabemos el número de segmentos que surgirán”. La imposibilidad y la indeterminación van asociadas al hecho de considerar inabordable la realización de una tarea infinita tal como sumar o dividir reiteradamente pero ambas actitudes implican un resultado indefinido en esencia. Por último, hemos de destacar la introducción de un nuevo tipo de elementos que apuntan su origen hacia el proceso de aprendizaje; la peculiaridad de este tipo de elemento es la de atribuir a infinito un carácter abstracto y puramente descriptivo: “utilizamos el término “infinito” para hablar de esta cifra imaginada”, “infinito no es más que una palabra”, “es una manera de expresar algo que no somos capaces de entender”, “es un concepto para algo extremadamente grande”, etc.

Tabla 97	Elementos obstáculo: tácitos didácticos
El más grande / el más pequeño	Si infinito es el número más grande y pensamos en sumarle algo cómo vamos a obtener un número más grande que el más grande que es el infinito Sería $2,\widehat{0}1$; este número no existe pero representa al número más pequeño entre 2 y 3 No hay distintos tamaños de infinito porque el infinito es la expresión de un máximo

Tabla 97 (cont.)	Elementos obstáculo: tácitos didácticos
Indefinición	Infinito es un concepto para algo extremadamente grande y si hablamos de infinito es porque no podemos dar [hallar] un número exacto [concreto] de algo No se puede determinar porque el infinito de los número naturales no tiene medida Como hay infinitos números naturales nunca se le podría quitar un millón Es difícil ordenarlos porque no tienen un número determinado, tienen infinitos números Será infinito porque no sabemos el número de segmentos que surgirán Es imposible calcular 0,999... x 0,999… porque hay infinitos decimales No daría un resultado exacto ya que habría que coger infinitos nueves para multiplicar Tendrías que poner 9 infinitamente hasta que tu creas y empezases a multiplicar Infinitos en ambos casos, es decir, nunca se podría saber en cuál de ellos hay más puntos La suma de todos los segmentos no se podrá medir, será infinita Para saber la probabilidad de extraer un 5 tendría que saber las bolas que hay Si no hubiera puntos suspensivos la suma sería finita pero como hay puntos suspensivos la suma no se puede calcular y sería infinita Si algo es infinito no podemos determinar su tamaño No puedes sumar $\infty + 5$ porque no sabes cuánto es infinito Si es un hotel con infinitas habitaciones nunca sabrás cuántas hay y nunca estará lleno ya que entonces sabrías las que hay El término infinito se utiliza cuando algo (número, figura, etc.) no se conoce a ciencia cierta
Divergencia	La suma es infinita porque caben infinitos círculos [aunque no se puedan ver] La suma sería una cantidad infinita porque se suman infinitos triángulos Sumamos infinitos números y la suma de algo infinito siempre es infinito Como no acabamos nunca de sumar el resultado tendería a infinito El resultado sería un número infinito que además no se puede calcular ya que las fracciones que se suman no llegarían a terminar Los diámetros se harán cada vez más pequeños pero seguirán ahí por lo que su suma tenderá a infinito Da la sensación de que se acerca a 5, pero si seguimos sumando número seguirá aumentando
Infinito como representación: Símbolo/Objeto	El infinito es un número inventando para designar una cifra que desconocemos; como desconocemos el número mayor que existe, utilizamos el término “infinito” para hablar de esta cifra imaginada El infinito no es un tamaño; no es más que una palabra que indica el no fin de los números El infinito es un número que no se podrá nunca plasmar en el papel, sólo se puede obtener mediante un procedimiento de abstracción del concepto, sólo lo tenemos como idea o concepto en nuestra mente El infinito es una manera de expresar algo que no somos capaces de entender ni comprobar Infinito es un concepto para algo extremadamente grande y si hablamos de infinito es porque no podemos dar un número exacto de algo

Las limitaciones materiales que los estudiantes siguen atribuyendo a infinito se remiten a la incapacidad de nuestros sentidos o instrumentos de medida y, en buena parte de los casos, se establece explícitamente la frontera entre lo material, lo físico, la práctica, la realidad y lo matemático, la teoría, etc. Y, en cuanto al elemento que asocia el resultado de un proceso infinito con la aproximación a un cierto valor, podemos ver que se incrementa sensiblemente respecto a niveles anteriores; los términos *casi, aproximación, prácticamente, despreciable, inapreciable,* etc. son los que contribuyen a establecer las metáforas representativas de este tipo de obstáculos que impiden la comprensión de infinito como un objeto actual.

Tabla 98	Elementos obstáculo: tácitos materiales
Limitaciones físicas	Si es algo "físico" o material, el segmento más pequeño es el punto, la unidad mínima Al dividirse tantas veces llegará un momento en que sea tan imperceptible La expresión [∞ + 5] no se si es correcta pero no existe nada material [hotel] infinito En la práctica no se puede dividir tantas veces un segmento La parte más pequeña que sea capaz de medir el instrumento de medida que utilicemos Hasta que el segmento se quede en un átomo / Al final se obtendrá una parte indivisible Hasta que el diámetro de un círculo sea de 1 mm. porque si fuera más pequeño ya no sería un círculo, sería un punto Sería imposible anotar infinitos lanzamientos No hay hoteles con infinitas habitaciones y, de todas formas, no hay infinitas personas Llega un momento en que ya no caben más círculos en el triángulo porque llegamos al vértice En la realidad sería un número muy alto pero en la imaginación serían infinitos puntos para los dos cuadrados No se pueden sumar porque jamás podríamos contar todos los diámetros
Aproximaciones	Si sumamos los cuatro primeros segmentos obtenemos un valor casi igual a dos y la suma de los siguientes decimales es casi despreciable debido a que son muy pequeños y no aportan gran cambio a la suma total No se puede calcular, sólo hacer aproximaciones [suma de triángulos] ∞ + 5 = ∞ quiere decir que 5 es muy pequeño comparado con infinito ∞ + 5 es mayor que ∞ pero, matemáticamente, 5 unidades es una diferencia inapreciable, por ello se considera igual Un millón no representaría nada prácticamente frente a los números naturales Calcularías la altura con el teorema de Pitágoras y obtendrías un valor aproximado La probabilidad es prácticamente cero / prácticamente imposible El resultado no sería exacto sino una aproximación [0,999... x 0,999…] Sería casi como multiplicar 1 x 1 que siempre es 1 [0,999... x 0,999…] Puesto que los números multiplicados rozan el uno, el resultado también rozaría el uno Da aproximadamente 1

Finalmente, los elementos contradictorios continúan poniendo de manifiesto la característica primordial de infinito enfrentando en un mismo argumento elementos finitistas e infinitistas, así como su carácter abstracto de difícil accesibilidad y las limitaciones propias del entorno cotidiano. También la naturaleza del resultado de un proceso infinito provoca incoherencias que conviven en un mismo esquema conceptual: "no queda nada ya que poco a poco te vas quedando sin segmento".

Tabla 99	Elementos obstáculo: contradictorios
1.	Teóricamente sería mayor el número de puntos en AB que en [2, 5], pero ambos se consideran infinitos
2.	Seguramente A contenga más puntos porque es más larga pero el punto no tiene medida
3.	Se pueden tener infinitos puntos de diámetro x
4.	Infinitos puntos porque no sabemos el tamaño exacto de los puntos y como suelen ser muy pequeños no podemos contarlos todos y decimos que hay infinitos
5.	Tienen los mismos, pero el segundo tiene un millón menos ya que son incontables
6.	Quedarían los mismos porque los números son infinitos, así que no se puede saber cuántos quedarían
7.	En realidad tienen igual pero si tomamos diferentes tamaños de infinito, el primero tiene más que el segundo
8.	Lo único que puede decirse es que para un mismo infinito, el primer conjunto tendría más números
9.	En los tres casos hay las mismas posibilidades de que salga el 1, el 2 ó los múltiplos de dos, pero es más posible que salgan los múltiplos de 2 ya que hay más opciones
10.	No queda nada ya que poco a poco te vas quedando sin segmento
11.	Al final obtendré un segmento [casi no visible] que ya no podré dividir después de haber dividido en infinitas

Tabla 99 (cont.)	**Elementos obstáculo: contradictorios**
	ocasiones el segmento
12.	Al final, por pequeño que sea, haremos un triángulo del que no se pueda hacer otro más pequeño
13.	Se acerca a 4 ya que 1/∞ = 0, con lo cual terminaremos sumando cero
14.	Infinito es el número más grande pero no está determinado porque siempre habrá un número mayor
15.	∞ + 5 seguiría siendo infinito porque no sabemos cuánto es ∞
16.	No se puede averiguar esta probabilidad [extraer un 5 de ℕ] debido a que entre infinitos números es imposible
17.	Las dos sucesiones terminan en el infinito, es decir, no acaban

6.2.4.7. ENTREVISTAS.

Entre las imágenes sobre las que se afirman los sujetos entrevistados tras la discusión entre ellos y el entrevistador, hallamos los tópicos correspondientes a los modelos que han ido apareciendo a lo largo de los apartados anteriores sobre los diferentes tipos de elementos, como se puede observar en la tabla 99. Es conveniente observar que expresiones del tipo “puedes hacer todos los puntos que quieras” no siempre suponen una interpretación indefinida, o bien potencial, de infinito sino arbitraria como en el caso “cabrían infinitos puntos porque se pueden hacer todos los puntos que quieras”.

Tabla 100 **Entrevistas: ratificaciones**
Cabrían infinitos puntos porque se pueden hacer todos los puntos que quieras, cada vez más pequeños
Depende del tamaño de los puntos porque hay unos puntos más gruesos que otros que pueden tener más puntos
Habría infinitos puntos en la curva AB y en el intervalo [2, 5] ya que los puntos serían minúsculos, casi nulos
Habría una cantidad finita de puntos en el cuadrado, aunque no sepamos cuántos, porque tiene límites o contorno
No sabemos cuántos números quedan después de quitar un millón ya que son infinitos
No se pueden comparar cantidades infinitas porque son todas iguales; todos los infinitos son del mismo tamaño
El infinito no se puede comparar porque no se pueden comparar una cosa que no sabes lo que es
Si no puedes contar algo no lo puedes clasificar y si no lo puedes clasificar es que es infinito
Los números reales contienen a los naturales, que son infinitos, por lo tanto los números reales tendrán una dimensión más grande
Se trata de dos infinitos de distinto tamaño porque uno de los intervalos contiene al otro
No acabaremos nunca de dividir el segmento
Esto de dividir los segmentos es como calcular un límite, pero al límite no se llega
Yo no pensé en segmentos sino que lo pasé a números y por eso dije que no acabaría nunca la división
Matemáticamente sí se puede dividir cualquier número, pero si tienes un segmento llegará un momento en que tendrá un tamaño tan reducido que ya no podrás continuar
1,999… y 2 son distintos pero por poca diferencia
Si sumas a 1,999… cualquier número por pequeño que sea te daría 2
El número más pequeño entre 2 y 3 es un dos coma periodo de 0 y un 1 al final; en la realidad no podemos decir que una cosa tenga ese valor pero en nuestra cabeza sí podemos formar ese número, entonces sí que existe
Si sumas todos los diámetros va a ser infinito porque siempre va a haber un número que sumar por pequeño que sea
La unión de todos los segmentos no puede medir 2 metros, es imposible porque las mitades nunca se acaban
Siempre queda espacio para otro círculo, luego caben infinitos círculos y, por lo tanto, hay infinitos diámetros; así que la suma será una cantidad infinita
Si los granos de arena fueran infinitos ocuparían un volumen infinito y la Tierra, en cambio, es finita; otra cosa es que no se puedan contar
Yo pondría que ∞ + 5 es infinito porque despreciaría el 5 frente a infinito, pero en realidad sería infinito más cinco aunque supieras que va a ser muy próximo a infinito
Los números tienen un fin y ese fin es el infinito
Un número periódico es infinito porque tiene infinitos decimales

Frente a las ratificaciones anteriores, en la tabla siguiente podemos observar que hay una serie de individuos con una cierta flexibilidad en su esquema conceptual como para aceptar determinadas modificaciones de sus elementos y aliviar la dependencia de algunos modelos tácitos sólidamente arraigados hasta ese momento. Es necesario observar que la bondad de la discusión, de la tarea de conexión, no está necesariamente en una reorientación adecuada frente al obstáculo, como podemos observar en algunas de las respuestas, sino en favorecer la mencionada flexibilidad que permita al alumno un cambio de perspectiva.

Tabla 101		**Entrevistas: rectificaciones**
No se puede calcular la suma ya que hay muchos triángulos, cada vez más pequeños	→	En realidad se parece al de la suma de segmentos, o sea que el resultado no pasaría de cierto número
La suma de todas las áreas será infinita	→	No, no, no puede pasar de 100 cm^2, el área del cuadrado
La suma de todos los diámetros es infinita	→	Será finita porque cuando los círculos lleguen al vértice ya no tendríamos más
La suma de 1/10+2/100+3/1000+ ⋯ será infinita	→	El resultado sería 0,1234… que es un número muy pequeño, no llegaría ni a 1… pensé que como los decimales son infinitos, el resultado sería infinito
En [0, ∞) hay más números que en [0, 1]	→	A simple vista parece que [0, ∞) es mayor pero en realidad no se pueden comparar porque en [0, 1] también hay infinitos
En [0, ∞) hay más números que en [0, 1]	→	Yo pensé que de 0 a 1 es un intervalo con límites y que de 0 a ∞ no está limitado, pero pensaba en números enteros…
$\mathbb{N}$ y $\dot{3}$ no pueden contener los mismos elementos aunque sean infinitos	→	Si vamos cogiendo un múltiplo de 3 por cada número natural sí hay los mismos
Los dos conjuntos son iguales porque son infinitos	→	No es que sean iguales, es que no podemos establecer una diferencia entre ellos porque no sabemos dónde acaban
Si sigues dividiendo el segmento llegarás a cero	→	Si fuéramos robots que no se cansan seguiría dividiendo siempre
Al final quedará un punto	→	En realidad quedará un segmento porque siempre se puede dividir, nunca termina este proceso
Depende de la forma y el tamaño de los puntos	→	Los puntos no tienen forman, no se pueden dibujar porque si tuvieran forma tendrían tamaño
La ecuación tendrá pocas soluciones	→	Tendría infinitas porque si le das un valor a x puedes calcular la y
La probabilidad de sacar un 5 sería menor que la de sacar un número entre 1 y 10.000.000	→	La probabilidad sería prácticamente la misma
La probabilidad de 5 sería menor	→	La probabilidad sería la misma, 1 entre infinito, bueno, 10.000.000 entre infinito, pero que sería lo mismo, casi cero, por no decir cero porque sería imposible

Los diálogos no han resuelto siempre las contradicciones; en realidad, en no pocas ocasiones han generado contradicciones que lejos de suponer un inconveniente han provocado la reflexión del sujeto en cuyo esquema conceptual permanecían ancladas imágenes que le impedían modificar sus puntos de vista a la hora de abordar este tipo de cuestiones. En algunos casos tal reflexión condujo al cambio de actitud, habitualmente finitista, mientras que en otros alimentó la duda y el contraste entre el conocimiento antiguo y el nuevo. Por ejemplo, en el caso de "en el intervalo

[0, 1] habría infinitos números… pero puntos… puntos habría un número limitado porque tienen tamaño" se evidencia nítidamente la disociación entre *punto* y *número*, aunque en las dudas del estudiante se puede apreciar cierta consciencia de la contradicción que genera dicha separación.

Tabla 102	**Entrevistas: contradicciones**
Es un poco raro que la calculadora, al hacer 0,999 x 0,999…, de el mismo resultado pero yo creo que la calculadora lo hace pensando que es 1	
$\mathbb{N}$ y el conjunto de los números pares son iguales en el sentido de que no se puede calcular el número que hay de cada uno de ellos, pero el tamaño de esos infinitos es distinto	
Por lógica parece que el conjunto de los múltiplos de 2 habrá salido más veces, pero es que no se pueden comparar porque son infinitos, no se…	
Por una parte pienso que acabaremos en un punto, pero por otra creo que siempre se puede dividir el segmento porque siempre habrá algo más pequeño	
Por una parte creo que la suma de los diámetros llegará a infinito pero por otra parece que no puede salir del triángulo	
En el intervalo [0, 1] habría infinitos números… pero puntos… puntos habría un número limitado porque tienen tamaño	
No se puede saber, porque geométricamente llegará un momento en que ya no puedas dibujar más aunque matemáticamente sí puedes hallar un diámetro más pequeño	
Infinito es lo máximo y aunque quiten un millón te queda infinito e infinito es igual a infinito; pero si lo analizamos lógicamente quedarán menos en el segundo conjunto porque le has quitado una mínima parte	
La probabilidad sería 1 entre infinito pero eso según nos han dicho en matemáticas es cero… aunque yo creo que existe una mínima probabilidad de ganar… porque tienes el 5 y puede salir en el sorteo	
Si al 1.000.001 le asociamos el 1, al 1.000.002 le asociamos el 2, y así… podemos numerar infinitos números… habría los mismos; pero, por otro lado, si quitamos una parte parece que el todo es mayor que una de las partes, no se…	
El proceso de dividir el segmento no tiene fin… bueno, si lo haces infinitas veces quizás te quede un punto… esto suena un poco raro porque si es un proceso infinito no puede tener fin… no se…	
Aunque 0,999… y 1 son números diferentes no hay otros números entre ellos, pero por otra parte debería de haberlos	

Las definiciones recogidas en este nivel no difieren demasiado de las halladas en niveles inferiores e inciden especialmente en la naturaleza de un punto, si posee o no dimensiones, y en la de infinito, si es un número o si es "algo" con características intangibles: una expresión, un concepto, algo incontable, etc.

Tabla 103	**Entrevistas: definiciones**
Un punto es un ente de dimensión cero / Un punto es un lugar en el espacio	
Un punto es lo que marca un bolígrafo en una hoja	
Un punto es una parte de una recta, la proyección de una recta	
Un punto es algo simbólico ya que el tamaño es tan pequeño que no lo podríamos pintar	
Los puntos son representaciones que no incluyen ni masa ni volumen	
Infinito es una cantidad muy grande de algo que no tiene fin	
El infinito es una expresión de lo máximo, de lo absoluto	
Infinito es algo abstracto, algo muy grande que no puedes comparar con nada	
El infinito no se puede ver… bueno, si te subes a una montaña y miras a lo lejos… no se	
Yo entiendo por infinito algo que no se puede contar	
Infinito es algo incontable, algo que no va a acabar [como muy para la derecha…]	
Infinito es un número tan grande que no se puede saber, que nadie lo puede saber	
Infinito es un concepto que tenemos para algo que no tenemos muy claro lo que es	

6.2.5. PRIMER CURSO UNIVERSITARIO: 18-19 AÑOS

6.3.5.1. ELEMENTOS PROPIOS.

Comparación de conjuntos. Los elementos propios correspondientes al caso de conjuntos discretos han ido reduciendo sus categorías mostrando una tendencia hacia cierta homogeneidad; así, experimentan variaciones porcentuales significativas las imágenes relativas al modelo de *inclusión, el primer conjunto contiene más*, que disminuyen aunque se mantiene entre una quinta y una cuarta parte del alumnado, y al modelo *infinito = infinito*, "ambos conjuntos son iguales", que aumentan y marcan las diferencias entre el caso de disminuir $\mathbb{N}$ en un subconjunto finito o infinito; por su parte, el resto de categorías presentes en niveles inferiores desaparecen como elementos propios.

Tabla 104	Elementos propios: comparación de conjuntos (discretos)	
$\mathbb{N}$ - {1, 2, 3, ..., 1.000.000}	Quedan infinitos	82%
$\mathbb{N}$ *vs.* $\mathbb{N}$ - {1, 2, 3, ..., 1.000.000}	El primero contiene más Son iguales ◦ porque los números son infinitos	21% 53% 38%
$\mathbb{N}$ *vs.* {3, 6, 9, ...}	El primero contiene más Son iguales ◦ porque los números son infinitos	24% 42% 25%
Lanzamiento de un dado: unos, doses y múltiplos de dos	Infinitos en los tres casos	46%

La comparación de conjuntos infinitos de diferente cardinal ha permitido observar la resistencia de ciertos modelos tácitos como la extensión de la inclusión de conjuntos finitos a infinitos. Así, aunque sólo uno de cada cinco estudiantes alude a la inclusión como argumento para justificar su respuesta, la mayor parte de los resultados que se recogen en la tabla adjunta pone en evidencia que se han comparado los intervalos de definición sin reparar en la naturaleza del conjunto numérico dado. Por ejemplo, cuando se mantiene que B < E se está expresando que [1, 10] está contenido en [1, ∞); o cuando se responde que E es el mayor de los conjuntos, se quiere decir que [1, ∞) contiene al resto de los intervalos. No obstante, la relaciones A < B o B < C sí obligan al sujeto a discriminar entre la naturaleza de los conjuntos en cuestión.

Tabla 105	Elementos propios: comparación de conjuntos	
$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 10\}$ $B = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq 10\}$ $C = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 10\}$ $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 100\}$ $E = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq \infty\}$	El menor es A El mayor es E El mayor es D A < B < C < D < E B < E Dan una ordenación Aluden a la inclusión	71% 40% 22% 31% 55% 84% 20%

Si ahora consideramos la comparación de conjuntos continuos exclusivamente, destaca en primer lugar la disminución porcentual de las respuestas típicamente finitistas, si bien en el caso de los puntos que contiene un cuadrado aún hay aproximadamente entre un 20% y un 25% de sujetos que mantiene la dependencia del tamaño del punto. En general, sigue siendo una mayoría la que establece la equivalencia entre conjuntos infinitos a partir del modelo *infinito = infinito*, como se evidencia en la cuestión *¿existen diferentes tamaños de infinito?*, salvo en contextos claramente favorecedores de una correspondencia uno a uno como ocurre en el caso de una relación funcional; en cambio, sólo uno de cada tres estudiantes de este nivel considera que existen diferentes "tamaños" de infinito.

Tabla 106	Elementos propios: comparación de conjuntos (continuos)	
Puntos en un cuadrado	Hay infinitos No se puede saber o porque depende del tamaño Depende del tamaño En el de 30 cm. hay más puntos	70% 25% 16% 27% 16%
Dados cuatro cuadrados de diferentes tamaños	Depende del tamaño de los puntos Todos tienen infinitos puntos	20% 65%
Puntos contenidos en las líneas A, B y C	La línea A es la que más puntos tiene Las tres líneas tienen infinitos puntos Las tres líneas tienen los mismos puntos	20% 59% 29%
Puntos en $y = (x-3)^2+1$ y en [2, 5]	Hay infinitos en ambos Hay los mismos en ambos o porque son infinitos o porque hay una correspondencia entre ellos	59% 60% 23% 33%
Números reales en el intervalo [0, 1] y en la semirrecta [0, ∞)	Hay los mismos en ambos o porque son infinitos Hay infinitos en ambos Hay más en [0, ∞)	26% 20% 65% 19%
Soluciones de $x + 2y - 3 = 0$ en $\mathbb{R}$ y en [3, 5]	Hay infinitas soluciones en $\mathbb{R}$ Hay infinitas soluciones en [3, 5] Hay las mismas en ambos: infinitas Hay más en $\mathbb{R}$	74% 54% 20% 39%
Dos circunferencia tienen la misma cantidad de puntos	Acepta la afirmación del enunciado o porque tienen infinitos puntos	53% 29%
¿Cómo demostrarías que hay el mismo número de puntos en los intervalos [0, 1] y [2, 5] de $\mathbb{R}$?	Acepta la afirmación del enunciado o porque ambos tienen infinitos puntos	57% 39%
Conjunto de Cantor	Quedan infinitos o porque ambos tienen infinitos puntos Se han borrado infinitos Quedan más que los que se han borrado	68% 40% 47% 21%

Es conveniente observar que cuando la relación funcional no es explícita disminuyen sensiblemente los resultados que afirman la equivalencia de los conjuntos comparados; resulta de especial interés observar la sólida implantación del argumento de inclusión en el caso de [3, 5] $\subset \mathbb{R}$; si en este caso los porcentajes son tan elevados debemos suponer que a dicho modelo tácito se ha sumado aquél que mantiene que *Card (conjunto acotado) < Card (conjunto no acotado).* Cuando esta acotación no se da en ninguno de los conjuntos simplemente desaparece como elemento propio la consideración de dicha equivalencia; así ocurre en el caso de la cuestión referente al conjunto de Cantor. En consecuencia, la tabla 105 es una referencia importante para la apreciación de la fuerte sensibilidad de las actitudes finitistas e infinitistas bajo variaciones de contexto o representación.

Tabla 107	Tamaños de infinito	
¿Existen diferentes tamaños de infinito?	Si No	33% 59%

Divisibilidad indefinida. En lo que respecta a los elementos propios asociados al proceso de divisibilidad indefinida nos encontramos en esta ocasión con que casi el 70% de los sujetos alberga la imagen de que tal proceso “no acaba” como reflejo de una actitud potencial; lo que apenas era un elemento propio en 6PRI, unos siete años después se ha convertido en una imagen característica del ECN tras un lento proceso de interiorización como se puede observar en los patrones de evolución del capítulo 5. Por el contrario, tres de cada cuatro estudiantes considera factible el proceso inverso, esto es, situar infinitos segmentos sobre un segmento AB, lo que corresponde a una perspectiva actual de infinito, aunque una parte de ellos lo considera indefinido. Por otra parte, el carácter inagotable asociado a infinito se pone en evidencia a la hora de localizar $\sqrt{2}$ mediante aproximaciones racionales sucesivas; uno de cada tres individuos lo considera posible y del 50% que mantiene lo contrario, la mayor parte lo atribuye a la infinitud el proceso.

Tabla 108	Elementos propios: divisibilidad indefinida	
División de un segmento por la mitad	El proceso “no acaba” o porque siempre hay una parte más pequeña El proceso “acaba”	67% 47% 28%
¿Puedes situar infinitos segmentos en el interior de un segmento AB de longitud *l*?	Sí o Dividiendo por la mitad y así sucesivamente o Con segmentos infinitamente pequeños No	76% 19% 26% 15%
¿Existe algún número entre $1,\widehat{9}$ y 2?	No existe ninguno o Porque 2 es el siguiente o Porque hay infinitos nueves o es periódico	88% 20% 40%
Si dividimos el intervalo [1, 2] sucesivamente, ¿se alcanza $\sqrt{2}$?	Sí o En el infinito No o Porque habría que llegar al infinito o Porque es un número irracional	33% 15% 52% 34% 15%

Sumas infinitas. Una vez más comprobamos que el tópico de las sumas infinitas es el que mejor recoge la influencia de las variaciones de contexto en las respuestas de los estudiantes. Así, observamos en la tabla siguiente que el elemento “resultado finito” oscila entre el 28% y el 73%; estas variaciones tan importantes ocurren incluso dentro de un mismo contexto, sea geométrico o aritmético. Por ejemplo, la unión de segmentos, aún bajo una representación que no sugiere la acotación del resultado, da un porcentaje muy superior al obtenido para la suma de diámetros de círculos contenidos en un triángulo o de las áreas de triángulos incluidas en un cuadrado que, por el contrario, deberían obligar a pensar en las limitaciones del resultado. Algo análogo ocurre con las series numéricas donde, por ejemplo, la serie $1/10 + 2/100 + 3/1000 + \cdots$ que converge mucho más rápidamente que la serie $2 + 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ sólo sugiere un resultado finito a un 30% de los sujetos frente a un 65% de la segunda. Probablemente la facilidad para establecer un vínculo entre esta segunda serie y su equivalente geométrico y la dificultad inherente que presenta este vínculo en la primera ha favorecido los valores indicados; es más, si nos detenemos en la respuesta del tipo “se acercará a…” vemos que sólo arroja valores significativos en el primer ítem y en los dos últimos de la tabla 109 cuya equivalencia ya hemos mencionado, estando ausente como elemento propio en el resto. Esto nos induce a pensar que los elementos vinculatorios tienen una presencia en el ECN mayor de la que se recoge en las respuestas de los estudiantes y que tales elementos funcionan a nivel tácito.

Tabla 109	Elementos propios: sumas infinitas	
Sumar segmentos cada uno la mitad del anterior	Resultado infinito Resultado finito o Se acercará a 2 metros	23% 73% 62%
Sumar los diámetros de todos los círculos inscritos en un triángulo	Resultado infinito o Porque hay infinitos círculos Resultado finito	29% 16% 45%
Suma de áreas de triángulos en el interior de una cuadrado de lado 10 cm.	Resultado infinito o Porque siempre se suma Resultado finito	34% 20% 48%
$\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots$	Resultado infinito o Porque siempre se suma Resultado finito No se puede calcular	46% 25% 28% 18%
$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$	Crece indefinidamente o Porque se añade Resultado finito (se acerca a un número) o Porque cada vez sumas números más pequeños o Se acerca a 4	24% 15% 65% 25% 29%
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$	Resultado infinito Da 2 Se acerca a 2	14% 22% 51%

Operatividad e infinito. La situación contradictoria que provoca el ítem del “hotel infinito” entre el resultado matemático y la aplicación se resuelve con elementos semejantes a los del nivel anterior, pero destaca en este caso la incorporación de la idea de aproximación para justificar una igualdad ciertamente incómoda en la estructura del ECN; por otra parte, también destaca la reducción, casi a la mitad respecto del nivel anterior, que experimenta el porcentaje de sujetos que considera que *no se podrían alojar 5 personas más*, lo que representa un claro indicio de evolución hacia la abstracción hasta ahora sometida a la corporeización de infinito a través del pensamiento metafórico ya considerado. La división por infinito se presenta bajo dos contextos muy diferentes, probabilístico y aritmético, y en ambos se obtienen resultados prácticamente idénticos, superiores al 30%, para el elemento *es muy pequeño, próximo a cero* o *cero*. No obstante, sólo en el presente nivel se incorpora como elemento propio la identidad entre P(x) y P(5). En lo que respecta al significado de los números periódicos del tipo $0,\overset{\frown}{9}$ aún encontramos como elemento propio *no se puede hallar un número que multiplicado por 9 de 1* en la cuarta parte de los estudiantes, muy inferior al registrado para (3+4) ESO pero significativo, o bien “$0,\overset{\frown}{9} \times 0,\overset{\frown}{9} = 0,\overset{\frown}{9}$” con valores semejantes a (1+2) BTO. Por último, la expresión $0 \times \infty$ nos muestra la existencia en el ECN de algunos elementos de interés; así, por ejemplo, la pauta finitista *cualquier número multiplicado por cero da cero* se halla explícitamente en uno de cada cuatro sujetos, mientras que casi la mitad de los estudiantes apunta hacia la idea de “indeterminación”, sin matiz o aclaración alguna, como si la denominación de una situación fuese la solución al problema planteado; sólo un 15% establece algún vínculo entre la relación dada y la noción de límite con el fin de dar una interpretación de la misma. Por lo tanto, la notación supone un obstáculo no trivial en la interpretación de expresiones características de contextos analíticos.

Tabla 110	Elementos propios: operatividad e infinito	
Sobre el resultado de $0,\widehat{9} \times 0,\widehat{9}$	Resultado finito o 0,999… o 1 o Un número muy próximo a 1	68% 23% 20% 21%
Probabilidad de extraer un 5 entre los números naturales: P(5). Probabilidad de extraer un número entre 1 y 10.000.000: P(x)	P(5) = 1/∞ P(5) es muy pequeña P(x) = 10.000.000 / ∞ P(x) es muy pequeña P(5) = P(x) = 0 ó "es imposible" P(x) = P(5)	36% 33% 26% 21% 15% 21%
¿Origen? $\cdots \frac{1}{35}, \frac{1}{34}, \frac{1}{33}, \frac{1}{32}, \cdots$ ¿Final?	No tiene origen o Se acerca a 0 Sí tiene origen o Es 0 No tiene final Sí tiene final o 1 o 1/0	45% 19% 47% 17% 20% 75% 40% 16%
¿Es correcta la expresión ∞ + 5 = ∞? Hotel infinito	Sí, la expresión es correcta Es un resultado aproximado Sí se pueden alojar 5 personas más en el hotel No se podrían alojar 5 personas más	63% 15% 33% 24%
Hallar un número que multiplicado por 9 de 1	No se puede o Sólo te puedes aproximar a 1 Sí se puede o 1/9 ó 0,111…	23% 16% 59% 55%
¿Tiene significado la expresión 0 x ∞?	Sí tiene significado o Es 0 No tiene significado o Porque es una indeterminación (A) Es una indeterminación (B) Lo relaciona con los límites A + B	35% 24% 38% 28% 16% 15% 44%

Lenguaje del infinito. Los elementos propios relativos a los términos equivalentes a infinito o a la función gramatical desempeñada arrojan unos resultados análogos a los del nivel anterior, si bien desaparecen de esta categoría las referencias numéricas y se incorporan las temporales características de un estadio de abstracción más avanzado.

Tabla 111	Elementos propios: lenguaje del infinito	
Expresiones equivalentes a infinito	Interminable Referencias espaciales Sin fin Referencias temporales	19% 20% 20% 19%
Funciones lingüísticas	Adjetivo	44%

6.2.5.2. ELEMENTOS METAFÓRICOS.

Los elementos metafóricos métrico-espaciales de este nivel aún inciden de manera significativa sobre las limitaciones físicas, no ya tanto desde el punto de vista porcentual sino en cuanto a la diversidad registrada; por el contrario, el elemento que asocia el contenido de un conjunto con los límites del mismo, habitual hasta el nivel anterior, se ha reducido considerablemente como imagen del ECN. Por otra parte, el concepto de medida, o bien el de tamaño o distancia utilizados como sinónimo, aún sigue estrechamente vinculado con los de infinito e infinitésimo, "los puntos son tan pequeños…", "infinito no se puede medir", "el punto tiene un área insignificante", etc .Y, por último, conviene destacar el incremento de elementos que vinculan la imagen de conjunto con la de "contenedor": "ambos albergan la misma cantidad", "[0, 1] forma parte de la semirrecta", "$\mathbb{R}$ engloba a todos los demás conjuntos", etc.

Tabla 112	Elementos metafóricos básicos: métrico-espaciales
Físicamente la línea A es la que tiene más puntos porque es la de mayor longitud	
Infinito es algo que perdemos de vista	
Al final se obtendrá la mínima parte visible	
En realidad a infinito no se llega de una forma material	
Al hacer un número infinito de divisiones, el instrumento de medida nunca llegaría al punto C = $\sqrt{2}$	
A simple vista no es en realidad un círculo, es un polígono regular de "n" lados infinitamente pequeños	
El efecto visual nos hace pensar que sí pero si se amplía seguirá habiendo espacio para más rectas	
El ojo no puede captar esas variaciones / Cabrán infinitos puntos aunque a ojo no se puede apreciar	
Llega un momento en que físicamente no es posible colocar más círculos dado el grosor de la línea	
Si un punto es algo físico, con medidas, cabrían 3 veces más en el cuadrado de 30 cm.	
No sería infinito pues cada punto tendría un radio R	
Sí se obtiene un círculo, ya que con el dibujo queda demostrado	
Si no queremos dejar "huecos" en el cuadrado al ampliarlo todo lo que queramos, necesitamos infinitos puntos	
No podemos asimilar la idea de un espacio físico infinito en el que alojar personas	
El infinito define una cantidad tan grande que es imposible medirlo	
Los puntos no se pueden medir	
Consideraremos que el punto tiene un área insignificante	
Caben infinitos ya que un punto no ocupa espacio	
Los puntos son tan pequeños que todas las líneas tienen infinitos puntos	
Infinito no se puede medir y por eso no podemos saber si un infinito es mayor, menor o igual que otro infinito	
Es imposible rellenar una superficie (dos dimensiones) con otra de dimensión nula (el punto)	
Caben infinitos porque los puntos son adimensionales y no importa el espacio a rellenar	
Hay más puntos en el tramo de la curva ya que la podemos medir y es más grande que la línea recta [2, 5], aunque en ambos casos hay infinitos	
Los dos conjuntos son infinitos y la distancia entre ellos no es significativa	
Por pequeño que sea el círculo, siempre medirá algo	
Como la figura exterior tiene límites finitos sólo se puede inscribir un número finito de círculos	
A medida que el cuadrado es más grande caben más puntos, pero no serían infinitos	
Ambos albergan la misma cantidad de elementos porque pueden llegar hasta el infinito	
$\mathbb{R}$ engloba a todos los demás conjuntos	
Los impares están dentro de los enteros	
Lo demostraría emparejando todos los números naturales con los impares	
Es algo que está muy lejos / un número que no se puede alcanzar o al que es imposible llegar	
Infinito es el lugar más alejado del origen de los números reales	
Se podría alargar el conjunto tanto como quisiéramos	
Al ser $\mathbb{N}$ de longitud infinita, le quites los que le quites siguen siendo infinitos	
El valor se encuentra en las cercanías de 2	
1,999... será el número anterior a 2 / es el número más próximo a 2 / es el siguiente de 1,999...	

En cuanto a los elementos cinético-temporales, podemos observar en la tabla 112 que experimentan un notable crecimiento consolidando la imagen potencial de infinito a través de verbos, adjetivos y adverbios que inciden una y otra vez en su carácter dinámico, como paradigma de proceso indefinido; la utilización de verbos tales como *avanzar*, *crecer*, *ir*, *aproximarse* o *acercarse*, *tender*, *continuar* y *seguir* establecen dicho carácter, mientras que términos tales como *velocidad*, *rápido* o *deprisa*, *lento* o *despacio* que se utilizan indistintamente para conjuntos, sucesiones o series con el fin de referirse explícita o implícitamente a un cierto grado de convergencia o divergencia según el caso, constituyen un elemento complementario de aquellos que contribuyen a la corporeización del concepto mediante el lenguaje metafórico métrico-espacial. Por el contrario, las referencias temporales que aluden a la duración del proceso mantienen cierta estabilidad mediante el uso de *siempre*, *nunca* o la expresión *un tiempo infinito*.

Tabla 113	**Elementos metafóricos básicos: cinético-temporales**
Tendría que tener un tiempo infinito para situar / unir todos los segmentos Me puedo tirar toda la vida rellenando el cuadrado con puntos Llegará un momento en que te encuentres con un extremo El momento, si llega, será en el infinito	
Siempre lo puedes seguir dividiendo Siempre va a haber un segmento más pequeño que el anterior Siempre se podrán seguir inscribiendo / añadiendo / sumando Nunca pasará de un cierto valor, aunque podrá seguir aumentando siempre Nunca se acaba / Nunca terminaremos de poner segmentos Nunca llegaría a 2 / a las 12:00 h No puedes parar de sumar [porque no hay un límite para parar] A un número infinito no se puede llegar	
Para valores muy próximos a 0 nos iríamos a +∞ Mientras el primer conjunto avanza [va] de unidad en unidad, el segundo avanza tres unidades A medida que avanza la suma, los nuevos números son despreciables Se acerca a cero pero nunca va a ser 0 / Se acerca a un número entero que va creciendo con muchos decimales El resultado va subiendo pero cada vez sube menos y tiende al límite que es 2 Se puede calcular hacia dónde se aproxima la suma Se va aproximando a cero pero nunca llega a tocarlo / Nos vamos aproximando a un extremo del segmento La suma daría infinito porque los triángulos sombreados continúan La suma tenderá a un número infinito, pero llegará “en el infinito” Los dos conjuntos seguirían creciendo infinitamente	
Hay diferentes “velocidades” de tender hacia infinito / Se acerca cada vez con menos velocidad a 2 No podemos calcular su valor pero si la rapidez con la que va aumentando Crece tan rápido que no podríamos verlo Se puede llegar más rápido o más despacio Cada vez crece más deprisa / Cada vez aumenta mucho más despacio Es una sucesión en la que las fracciones crecerían muy despacio y no llegaría a infinito La suma irá creciendo lentamente, pero nunca parará de hacerlo El número de tiradas que son múltiplos de 2 crece más rápido que el las otras dos En ambos casos el valor es infinito pero aumenta más rápidamente el número de trozos que desaparecen La suma va aumentando aunque es un incremento amortiguado ya que se aproxima a un cierto número	
Llegar a las 12 en punto significaría llegar al infinito Si llegas hasta infinito, ambos conjuntos tendrían infinitos números Aunque ambos llegan hasta el infinito en igualdad de condiciones, el primer conjunto comienza antes	

Los elementos vinculatorios, por su parte, nos muestran una sofisticación creciente, especialmente en la licenciatura de matemáticas, debido a la incorporación de nuevos contextos tales como el funcional y sus aplicaciones analíticas que permiten a los estudiantes establecer un mayor número de conexiones.

Tabla 114	Elementos metafóricos vinculatorios
Al ser $\mathbb{N}$ de longitud infinita, le quites los que le quites siguen quedando infinitos	
En ambos casos cabrán infinitos puntos ya que hay infinitos números reales entre 0 y 10 ó entre 0 y 30	
Si A = 3 y B = 4 son los extremos del segmento, tendremos que entre 3 y 3,5 tenemos un segmento, entre 3,1 y 3,2 tenemos otro segmento, entre 3,01 y 3,02 otro, etc. porque entre dos números hay infinitos números	
Los segmentos serán 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ... y tienden cada vez más a 0	
Puedo dividir el segmento todo lo que quiera, sería un número decimal infinito	
Se obtiene un número cada vez menor ya que cualquier segmento por pequeño que sea siempre se puede dividir	
Se obtendrá una división [de segmentos] infinitamente pequeña que se podría expresar con el cociente k / 4 = 0	
Dibuja un cuadrado y lo divide por la mitad, luego una de las mitades la vuelve a dividir por la mitad y así sucesivamente y lo iguala a 1 [Sumar 2+1+1/2+1/8+···]	
Esta suma [2+1+1/2+1/8+···] es análoga a la de la pregunta 3 donde uníamos segmentos	
Es como si al mar le coges un litro de agua, no ves bajar su nivel / Es como si a un millón le quitamos un céntimo	
5/0 = ∞ porque hay 5 unidades que se pueden repartir entre 0 y da infinito	
No podemos repartir 5 manzanas entre 0 niños ya que no hay a quién repartir	
x+2y-3=0 representa una recta que tiene infinitos valores [puntos]	
Todos los puntos que pertenecen a la recta satisfacen la ecuación	
Establecería una relación entre [0, 1] y [2, 5] con x convertido en $2+3x$ que es una biyección	
Al tratarse de dos intervalos de números reales, no puede decirse que uno tenga más puntos que el otro	
Si los puntos del cuadrado corresponden a coordenadas reales, tendríamos infinitos puntos	
0 x ∞ tiene significado si se relaciona con el concepto de límite	
[La unión de todos los segmentos] Es una serie geométrica que converge a 2	
Si L es la longitud inicial del segmento te queda un segmento de longitud finita: $l = L\left(\frac{1}{2^n}\right)$	
La unión de todos los segmentos será $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \approx 2$	

Las dos categorías de verbos que se amplían significativamente son aquellas que abundan en la idea de “tendencia” de una colección o suma de números, *aproximarse*, *converger*, *divergir*, etc. y en la de inclusión o correspondencia de conjuntos, *albergar*, *encerrar*, *asignar*, *asociar*, *emparejar*, *relacionar*, etc. El resto, presente en los niveles anteriores, se mantiene con un grado elevado de estabilidad.

Tabla 115

Verbos espaciales			Verbos cinético-temporales		
Finitud	**Infinitud**	**Otros**	**Finitud**	**Infinitud**	**Otros**
Alcanzar	Seguir	Medir	Alcanzar	No acabar	Tardar
Llegar	Alargar	Contar	Llegar	No parar	Durar
Terminar	Añadir	Comparar	Terminar	Seguir [+ gerundio]	Saltar
Acabar	Aumentar	Caber / Entrar	Acabar	Saltar/se	Ir/se [+ gerundio]
Desaparecer	Continuar	No notar / Ver	Parar	Acercarse	Empezar (antes que)
Redondear	Superar	Reducir	Detenerse	No detenerse	Bajar
Aproximar	Crecer	Contener	Desaparecer	Pasarse (superar)	Subir
Conseguir	Extenderse	Abarcar	Finalizar	Avanzar	Venir
Limitar	Prolongar	Meter		Tender	
Delimitar	Estirarse	Empezar		Recorrer	
Lograr	Sobrepasar	Comparar		Alejarse	
Despreciar	Acumular	Incluir		Dirigirse a	
Acotar	Prolongar	Corresponder			
Completar	Decrecer	Proyectar			
Apreciar	Repetir	Englobar			
	Aproximarse	Albergar			
	(No) Conseguir	Encerrar			
	(No) Tocar	Estar en/dentro de			
	Converger	Incorporar			
	Desaparecer	Asignar			
	Divergir	Asociar			
	(No) Acotar	Emparejar			
		Relacionar			

El vocabulario genuinamente matemático se incrementa de manera notable, *epsilón, biyección, cardinal, aplicación, equivalencia, correspondencia, inducción*, etc., junto con el lenguaje matemático corporeizado, *límite, dimensión, aproximación, densidad, entorno, partición, relación, asignación*, etc., mientras que se conservan prácticamente el resto de elementos metafóricos adquiridos a edades inferiores.

Tabla 116

Adverbios	**Adjetivos**		**Sustantivaciones, adverbializaciones y otros términos y expresiones**
Aproximadamente	Inimaginable	Remoto	Hasta [El más allá] [el infinito]
Sucesivamente	Inconcebible	Mínimo	Me llevaría / tardaría toda la vida
Infinitamente	Inapreciable	Insignificante	Llegar un momento en que... / Hasta que…
Continuamente	Imperceptible	Despreciable	Todo, nada
Eternamente	(No) representable	Etéreo	Prolongar [continuar]hasta donde queramos
Constantemente	Imposible	Infinitesimal	Cabrán tantos como quieras
Prácticamente	Irrealizable	Diminuto	Tan grande [pequeño] como queramos
Indefinidamente	Incontable	Ínfimo	Cada vez más pequeño / grande
Realmente [grande]	Incalculable	Cercano	Siempre hay otro más grande / más pequeño
Progresivamente	Indefinido	Convergente	Lo más cercano posible a...
Lentamente	Interminable	Muy próximo	Cada vez se acerca más
Finalmente	Inacabable		Infinidad
Consecutivamente	Inagotable	Rápido	Casi igual a / casi nula
Extremadamente	Irreducible	Lento	Dimensión
Bastante	Indivisible	Eterno	Sucesión / Progresión
Mucho	Inalcanzable	Periódico	Proyección

Tabla 116 (cont.)

Adverbios	Adjetivos		Sustantivaciones, adverbializaciones y otros términos y expresiones
Siempre Nunca Jamás Cerca / Lejos Casi Poco a poco	Insuperable Impredecible Innumerable Inconmensurable Ilimitado Indeterminado Largo Grande / Pequeño Inmenso Mucho Numeroso Demasiado	Progresivo Consecutivo Acotado Impreciso Tendente (No) Numerable Adimensional + Superlativos	Aproximación / Redondeo Indeterminación Asíntota Establecer una relación / aplicación Biyección [Aplicación biyectiva] Correspondencia [biunívoca, uno a uno] Épsilon Equivalencia Límite Cardinal Densidad Inducción Entorno Partición Representación mental

Y, por último, la función desempeñada por el término “infinito” en el contexto de las expresiones escritas no ofrece variaciones respecto a lo indicado en el apartado anterior respecto al nivel anterior; así, la función más frecuente es la atributiva, seguida de expresiones adverbializadas que contienen dicho término y, en mucha menor medida, también es posible hallarlo como sustantivo al que se le dota de cierto carácter actual.

6.2.5.3. ELEMENTOS SIMBÓLICOS.

Los elementos simbólicos operacionales presentan un espectro muy semejante al del nivel anterior, desde la imposibilidad, indeterminación o falta de sentido de ciertas operaciones hasta el redundante tópico de *la suma de infinitos diámetros da* [o *se acerca*] *a infinito*, pasando por la aproximación de ciertos resultados *finitos pero inalcanzables*. Como ya hemos comentado anteriormente, las respuestas a la gama de operaciones propuestas responden a alguno de los modelos tácitos ya recogidos; así, por ejemplo, infinito se mantiene invariante bajo la suma o resta de una cantidad finita respondiendo a un cierto “principio de conservación” sugerido por Falk y mencionado en los capítulos 3 y 5; también se axiomatiza sobre la suma, finita en todos los casos propuestos, de infinitas cantidades: o bien el resultado es infinito o bien se acerca indefinidamente a un valor finito. El resultado de $0 \times \infty$ cae sistemáticamente bajo las proposiciones *cualquier número multiplicado por cero es cero* o bien *es una indeterminación*, salvo excepciones que vinculan el sentido de dicha expresión a la noción de límite como ocurre también con el cociente 5/0. Por el contrario, la expresión $1/\infty$ entraña menos dificultades a la hora de proponer un resultado, una aproximación o su relación con el concepto de límite.

Tabla 117 **Elementos simbólicos: operacionales**

Si le quitas unos pocos siguen quedando infinitos
∞ - 1.000.000 = ∞
Quitar un millón a un número muy grande es insignificante / equivale a nada / no se nota la resta
A infinito no se le puede sumar 5
Al sumar 5 unidades a un número enorme, el resultado es prácticamente el mismo

Al ser una suma infinita se acerca a infinito
No paras de sumar pero ya son números muy pequeños que no aportan ningún cambio significativo
La suma tenderá a un número finito pero llegará "en el infinito"

La suma de todos los segmentos será infinito aunque cada vez sean más pequeños; es decir, $\sum_{1}^{\infty} = \infty$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 4$ y la serie que consideramos aquí [2+1+1/2+1/4+1/8+⋯] es como la anterior a la que se le han quitado términos pero nos queda infinito por lo que la suma será la misma
La suma iría creciendo lentamente pero nunca pararía de hacerlo
No se puede saber porque es una suma infinita de números positivos
Si hay una cantidad infinita de diámetros no puedo sumarlos
Como puedes inscribir infinitos círculos, la suma de todos los diámetros será infinita
Añadiendo triángulos, cada vez nos dará una suma un poco mayor / la suma será infinita
Nunca llegaremos a conocer cuándo llegamos a las 12 de la noche, puesto que siempre se sumarán segundos
Aunque hay infinitos sumandos el resultado es finito, ya que siempre será menor que el área total del cuadrado

Aún sumándole infinitos elementos de la sucesión no llegaría a 4
Como los diámetros tienden a cero, la suma tiende a un número, pero nunca llega a él
La suma de todas las áreas sería un valor muy próximo a 25 cm^2
En cuanto sumes un pequeño incremento a 1,999... ya estarías en 2 ó más
Se puede calcular hacia dónde se aproxima la suma, el límite de la suma, pero no se puede hacer una suma infinita

Aunque hay inscritas infinitas circunferencias, la suma de sus diámetros será la altura h de ese triángulo
La suma de todos los segmentos será 2 m
Como 0,999… = 1 entonces 0,999… x 0,999… = 1

Es infinito porque un número multiplicado por infinito da infinito
0 x ∞ es una expresión bastante complicada porque cualquier número multiplicado por cero es cero y cualquier número multiplicado por infinito es infinito; lo más lógico sería que el resultado fuese 0 ya que si sumamos infinitas veces nada seguiremos teniendo nada
En mi opinión si no tienes nada por mucho que lo multipliques por algo muy "grande" seguirás teniendo "nada"
El resultado de 0 x ∞ es impredecible porque se trata de una sucesión que se aproxima a 0 y otra a ∞
Su resultado [0 x ∞] puede ser 0, ∞ u otro valor, es una indeterminación
La repuesta es indeterminada pero intuitivamente podría ser cero ya que cualquier número, por grande que sea, multiplicado por cero es cero

Ningún número multiplicado por 9 dará 1
No es posible, aunque 0,111... x 9 es prácticamente 1
$0,\overset{\frown}{9}$ x $0,\overset{\frown}{9}$ es muy cercano al $0,\overset{\frown}{9}$ [a 1]
El resultado será periódico, pero en la práctica no se pueden multiplicar
Se trata de multiplicar dos cantidades infinitas, luego no se podría dar un resultado exacto, salvo decir que será otra cantidad infinita

Como el denominador sería un número infinitamente grande quedaría un número infinitamente próximo a 0
No existe la división entre cero
Si divides un número entre cero el resultado no está definido
5/0 es infinito; necesitamos sumar muchísimas veces el cero para que alcance cantidades mayores
1/4 es matemáticamente una indeterminación
Es una división infinitesimalmente pequeña, prácticamente despreciable cuyo valor tenderá a cero
El resultado del cociente 1/∞ sería un número cada vez más pequeño y la forma de representarlo es 0

Tabla 117 (cont.)	Elementos simbólicos: operacionales
Casi 0% de probabilidad ya que los números son infinitos / P(5) = 1/∞ = 0	
Al ir dividiendo el segmento entre 2, tiende a cero sin llegar completamente a ese valor	
La división nunca daría como resultado un segmento cero	
Si divides infinitas veces el resultado final será 0	
Los números son tendentes a infinito y esto crea una indeterminación ∞/∞ [1/10+2/100+···]	
Algo dividido entre 0 no tiene sentido [es una indeterminación]	
Si tuviese algún valor entonces 5/0 = x y despejando 5 = 0 · x, pero 5 es distinto de cero, luego no tiene sentido	
Se dice que 5/0 es infinito ya que si tomamos un valor muy cercano al cero el resultado sería muy, muy grande	

En la tabla 118 podemos apreciar el incremento de respuestas que incorporan alguna referencia a las dos relaciones conjuntistas por excelencia: la inclusión y la correspondencia biunívoca; a través de distintos elementos del lenguaje se abunda en estas nociones frente a la necesidad de comparar el "tamaño" de dos o más conjuntos. Junto a esto también se registra la comparación no sólo de cardinales sino de de cantidades infinitas o infinitesimales; en cualquiera de los casos se halla una tercera posibilidad, *no son comparables porque son infinitos,* que responde al modelo de *indefinición*.

Tabla 118	Elementos simbólicos: relacionales
El siguiente de 1,999... es 2 / 1,999... es justamente el anterior a 2	
Infinito es la cantidad mayor que somos capaces de acumular	
Infinito es un concepto único pero podemos definir diferentes órdenes de infinito, es decir $k^{\infty}, \infty^{k}, \infty^{\infty}$	
Tenemos infinitos numerables y no numerables y también tenemos casos del tipo $\lim_{x\to\infty} x$ o bien $\lim_{x\to\infty} x^2$	
Teóricamente ∞^{∞} es mayor que ∞	
Imaginemos que tenemos dos funciones, x^2 y $\sqrt{x}$, y que las dos tienden a infinito; su resultado será el mismo, infinito, pero si comparamos las dos expresiones, el resultado infinito de la primera es mayor que el de la segunda	
No tiene sentido comparar infinitos porque el infinito no tiene valor numérico [un valor concreto]	
Sí hay diferentes tamaños de infinito porque siempre se puede hacer algo más grande	
No hay distintos tamaños de infinito ya que algo infinito no se puede medir y no podemos saber si un infinito es mayor, menor o igual que otro / no son comparables	
Todos los conjuntos son iguales porque contienen infinitos números / porque pueden llegar hasta infinito	
Los dos conjuntos son infinitos y tendrían el mismo número ya que 3·4 = 4	
Ambos tienen infinitos ya que se pueden alargar tanto como queramos [los dos seguirían creciendo infinitamente]	
Hay infinitas soluciones en [3, 5] y también en todo $\mathbb{R}$; diría que hay las mismas, pero estoy empezando a dudar	
Hay los mismos puntos en ambos porque la distancia es la misma	
Quedan los mismos porque podemos establecer una biyección entre los dos conjuntos, n y 3n	
Ambos igual porque siempre hay un múltiplo de 3 para cada número natural	
Emparejando todos los naturales con los impares se ve que hay la misma cantidad	
Los dos contienen el mismo número de elementos, pero uno empieza en 1 y el otro en 1.000.000	
Los mismos puntos ya que a cada punto de una de las tres líneas le corresponde en la vertical un punto de las otras	
Tienen los mismos, son conjuntos infinitos y se puede establecer una correspondencia "uno a uno" entre cada punto	
$\mathbb{N}$ tiene más elementos porque el segundo conjunto está dentro de $\mathbb{N}$ [sólo contiene a los múltiplos de 3]	
La cantidad de números reales es mucho más grande que la de números racionales; no se muy bien "cuánto" de grande pero desde luego más del doble	
Es preferible apostar por los racionales que por los naturales ya que éstos son un subconjunto de aquellos	
Aunque haya la mitad de impares ambos serán infinitos	
El primero contienen más elementos porque incluye al segundo, aunque los dos sean infinitos	
El primer conjunto tiene más porque el segundo se salta dos entre elemento y elemento	
El primero contiene más porque, aunque ambos llegan a infinito, comienza antes	

Tabla 118 (cont.) — Elementos simbólicos: relacionales
Como B y C están contenidos en la longitud de A, A tiene más puntos
No tendrían la misma cantidad de puntos ya que la longitud de la circunferencia de radio 4 es mayor que la de radio 2
En la semirrecta hay más números, ya que [0, 1] forma parte de ella, aunque en ambos hay infinitos
El conjunto de segmentos que quedan es el doble de los segmentos que hemos borrado [conjunto de Cantor]
Aunque en ambos casos hay infinitas soluciones, podría decirse que hay más en $\mathbb{R}$ que en [3, 5]
C < D porque D tiene los elementos de C y muchos más
E < B < C < D porque unos “incluyen” a otros
En el de 30 cm. cabrían 900/100 = 9 veces más puntos
Los números racionales constituyen [muchos] menos de la mitad de los reales
El infinito en $\mathbb{N}$ no es el mismo que en $\mathbb{R}$ / $\mathbb{R}$ tiene más números que $\mathbb{N}$, su infinito es mas grande
En ambos hay infinitos, pero el infinito del primer intervalo está contenido en el del segundo
En ambos cabrán infinitos puntos ya que hay infinitos números reales entre 0 y 10 ó entre 0 y 3
Los dos conjuntos son infinitos porque el infinito es muy grande y se desprecia la diferencia entre ellos
Hay infinitos en ambos ya que podemos asociar a cada x una y
C < D < E; aunque parezca que hay más en E que en D y en D que en C, se puede decir que en los tres hay infinitos
No podemos saber qué infinito es más grande, pero sí vemos que el segundo infinito está contenido en el primero

6.2.5.4. ELEMENTOS PRE-FORMALES.

Por último, los elementos pre-formales se consolidan respecto al nivel anterior incorporando, a través de la nueva terminología adquirida, imágenes que amplían el ECN. Lo más reseñable es la riqueza de expresiones utilizadas para referirse a la correspondencia biyectiva entre dos conjuntos, si bien, como ya hemos mencionado, tal diversidad viene favorecida por determinados contextos que convendría aprender a vincular con otros que presentan una dificultad intrínseca. Es preciso advertir que existen elementos comunes entre los simbólicos relacionales y los pre-formales, pero en ambos casos recogen facetas diferentes del ECN; así, tal división nos permite apreciar la evolución que han seguido aspectos concretos como el establecimiento de relaciones entre conjuntos infinitos por una parte, y la precisión con la que se concretan tales relaciones por otra. No obstante, se ha decidido elegir diferentes expresiones para una y otra categorías con el fin de presentar una mayor gama de elementos que contribuya a precisar aún más este ECN.

Tabla 119 — Elementos simbólicos: pre-formales
En todo segmento hay infinitos puntos
Entre dos números cualesquiera siempre hay infinitos números
Se obtiene una serie de divisiones del segmento cuyo límite tiende a 0, ya que en 1/2, 1/4, 1/8, ... el denominador va creciendo y el valor se acerca a 0
No hay más números entre 1,999… y 2 ya que si consideramos la serie cuya progresión geométrica es $1,\widehat{9} = 1 + [10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-n}] = 1 + 1 = 2$
La sucesión ...., 1/35, 1/34, 1/33, ... está acotada por el cero y el uno, es decir (0, 1]
Recordemos que m/n = r implica que n · r = m, o sea que 5 = 0 · r es imposible, por lo que 5/0 no tiene ningún sentido
La suma tiende a acercarse a 4 ya que 2 + 1 = 3 y 1/2 + 1/4 + 1/8 + · · · al ir sumando mitades el resultado acabaría siendo 1 [dibuja un cuadrado y lo divide sucesivamente por la mitad]
No tiene valor gráfico en x=0 ya que 0 está fuera del dominio
Si el bombo contiene todos los números naturales, contiene infinitos números, con lo que P(5) = 1/4 = 0
No se alcanzará $\sqrt{2}$ porque los extremos de los intervalos sucesivos pertenecen a $\mathbb{Q}$
En x = 0, 1/x no existe y, por tanto, sólo se puede describir su comportamiento en sus proximidades mediante límites
El área vale 25 cm^2, puesto que si recolocamos los triángulos acaban ocupando 1/4 del total del cuadrado

Tabla 119 (cont.) **Elementos simbólicos: pre-formales**
Usaría el método de inducción para probar esa propiedad, probándolo para n = 1 y si n lo verifica, entonces n + 1 también
$\sum \frac{n}{10^n}$ es una serie mayorada por $\sum \frac{1}{n^2}$ que es convergente
Podemos establecer una biyección entre los dos conjuntos que podría ser n y 1.000.000 + n con n0$\mathbb{N}$
Siempre hay un múltiplo de tres para cada número natural: para el 1 el 3, para el 2 el 6,...
Las tres líneas contienen los mismos porque en la vertical de cada punto de cualquiera de ellas le corresponde otro de las restantes y sólo uno
Hay los mismos porque podemos establecer una biyección entre [0, 1] y [0, 4) [dibuja una curva creciente en [0, 1) con una asíntota vertical en x=1]
Los cardinales de C = [1, 10] y D = [1, 100] son iguales porque cualquier intervalo de números reales es no numerable y no se puede decir que en uno haya más que en el otro
Sí hay varios tamaños de infinito, el infinito de los naturales es distinto del infinito de los reales: $*\mathbb{N}*= \aleph_0 < *\mathbb{R}* = c$
Hay los mismos puntos porque todo punto del tramo AB se asocia [corresponde] con un punto del intervalo [2, 5]
Los puntos de la curva AB se reflejan en el eje X que tiene infinitos puntos entre 2 y 5
Al ser una función continua, para cada punto de [2, 5] en el eje X hay un punto [imagen] f(x), hay los mismos
Usando la noción de cardinal de un conjunto para hablar del “número de puntos” hay el mismo número pues nos dan una aplicación biyectiva entre ambos conjuntos
$x = 3 - 2y$, luego las soluciones son $(3\text{-}2y, y)$ y como y0$\mathbb{R}$, hay los mismos en [3, 5] que $card(\mathbb{R})$
Hay un infinito no numerable de soluciones ya que puedo establecer una correspondencia biyectiva entre $\mathbb{R}$ y el segmento [3, 5] [soluciones de $x + 2y - 3 = 0$]
Se puede establecer una biyección entre los puntos de la circunferencia pequeña y los de la grande
La longitud de la circunferencia es 2Br por lo que se pueden asemejar a dos segmentos de distinta longitud y podemos concluir que las dos contienen infinitos puntos
Sí hay diferentes tamaños de infinito porque no existe ninguna biyección entre $\mathbb{N}$, cuyo cardinal es $\aleph_0$,y el conjunto de las partes de $\mathbb{N}$ que es $2^{\aleph_0}$
Cada uno de los números impares puede emparejarse [asociar, asignar] con uno de los naturales
Si se establece la relación $2 + 3x$ entre [0, 1] y [2, 5] se encuentra una biyección y, por lo tanto, habrá el mismo número de puntos en ambos intervalos

6.2.5.5. ELEMENTOS FINITISTAS/INFINITISTAS.

Al igual que ocurría en el nivel anterior las imágenes finitistas van reduciendo sus porcentajes pero no su presencia en el ECN. Y, de nuevo, nos encontramos con las limitaciones de la divisibilidad indefinida, “hasta llegar a una parte indivisible”, y del perímetro de un recinto, “el número de puntos en un cuadrado no será infinito ya que tenemos un límite”. La expresión *llegará un momento en que…*, que en determinados sujetos supone el reconocimiento del infinito actual normalmente como un límite, en el caso finitista no representa más que la finalización de un proceso en un número de pasos finito como se puede observar en algunos de los ejemplos de la tabla 120.

Tabla 120	Elementos finitistas
Si algo lo divides te tiene que quedar algo, muy pequeño, pero algo [la parte mínima visible]	
El resultado sería un átomo/un punto del segmento, una parte indivisible de este que será el límite de la sucesión	
Hasta llegar a un segmento tan pequeño que pueda llegar a ser despreciable	
Un segmento está acotado, es finito y, por lo tanto, si lo divides llegará un momento en que no te quede nada	
No se puede rellenar un segmento con infinitos segmentos porque llegará un momento en que te encuentres con un extremo / Llegará un momento en que el segmento AB quede completo	
Cuanto más pequeño sea el punto más cabrían, pero no serían infinitos ya que tenemos el límite del cuadrado	
En ambos casos cabría un número muy grande de puntos, pero al fin y al cabo cuantificable, ya que se trata de una superficie cerrada y delimitada	
Llegará un momento en el que físicamente no sea posible colocar más círculos dado el grosor de la línea con que se dibujan los círculos	
Llegará un momento en que por pequeños que sean los círculos la longitud de la figura termine y no quepan más	
Como la figura exterior tiene límites finitos, sólo se pueden inscribir un número finito de círculos	
En la circunferencia grande los puntos se encuentran separados una distancia doble que en la pequeña	
Cuando hablamos de un hotel con infinitas habitaciones en realidad nos referimos a un número finito de habitaciones	

A medida que se reducen los elementos finitistas, se reducen los de transición que, como en los casos anteriores, constituyen fragmentos de conocimiento en los que conviven ambas actitudes bajo una contraposición entre la vieja actitud finitista y la infinitista emergente a través de expresiones más o menos explícitas, sin llegar necesariamente a la contradicción evidente.

Tabla 121	Elementos de transición finitista / infinitista
Infinito es un término que se emplea para indicar el último elemento de una serie interminable	
Al ser un segmento de longitud *l*, sólo entraría una cierta cantidad de segmentos infinitesimalmente pequeños	
Sólo se tiene un polígono de muchos lados, pero si se repitiese más el proceso sí podríamos llegar a tener el círculo	
Se va acercando a un cierto número hasta no poder sumar más porque la sucesión se hace cada vez más pequeña	
Aunque el proceso es infinito, el segmento no lo es y llegará un punto en que se haga de longitud 0	
Si realizamos esta operación sucesivamente habría un momento en el que una de las divisiones coincidiría con $\sqrt{2}$, ese momento es el infinito	
No seríamos capaces de contar los puntos al haber demasiados	
Es el número más grande que podría existir si alguien consiguiera contar desde que nace hasta que muere	
El radio de los puntos puede ser tan pequeño como se quiera	

Los elementos potenciales continúan siendo la imagen paradigmática de infinito en el ECN también en este nivel. Incluso el término “límite” se entiende no como un objeto sino como parte del proceso, como una tendencia: “se obtiene una serie de divisiones cuyo límite tiende a 0”. Por lo demás, expresiones del tipo *siempre se puede…, nunca parará o llegará…, se acerca pero no llega, tan pequeño como quieras*, etc. reflejan de manera semejante a todos los niveles anteriores el dinamismo propio del infinito potencial que permite, en general, realizar en un instante arbitrario cualquier proceso matemático como contar, sumar, dividir, etc. de manera indefinida. Esto implica, en numerosos casos, la superación de dos obstáculos importantes; en primer lugar, la identificación de un proceso indefinido con resultado necesariamente infinito y, en segundo lugar, la imposibilidad de acceder al límite de un proceso, si existe, como un objeto matemático con propiedades genuinas o comunes a otros objetos.

Tabla 122	Elementos infinitistas potenciales
Hay infinitos puntos, porque por muy juntos que se pudiesen poner, siempre cabría un punto en medio	
Siempre se podrá dividir el segmento infinitamente	
Siempre se le puede sumar 1, con lo que nunca acabaría	
Siempre existe la certeza de que podré encontrar el siguiente a cada elemento de dicho conjunto	
Por muy pequeño que sea el círculo siempre medirá algo para sumarlo al total	
Crecerá, ya que siempre le sumas algo, cada vez más pequeño pero le sumas	
Tener infinitas habitaciones significa que siempre tendrá habitaciones disponibles, nunca se acaban	
Se obtendrá un segmento infinitesimal que se podría seguir dividiendo hasta el infinito	
El sumatorio $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ se iría acercando a la unidad sin llegar a ella	
Hay infinitos puntos porque cada punto puede ser tan pequeño como queramos	
Ambos tendrían infinitos números ya que podría alargarse/crecer el conjunto tanto como quisiésemos	
Aunque no lo veamos, se pueden seguir formando triángulos cada vez más pequeños	
Va aumentando su valor muy poco a poco, por lo que se va acercando cada vez con menos velocidad a 2	
Infinito significa algo a lo que nunca se llega	
El infinito es simplemente un término para decir que no hay límite	
Será un número finito porque nunca llegará a ser más de 0,1235, pero siempre se podrá dar con más precisión	
Es una tendencia a algo, pero que nunca se alcanza porque siempre puede aumentar	
El límite de esta suma tenderá a 2 pero no lo conseguirá	
Como nunca terminaremos de poner segmentos, nunca llegaremos a los 2 metros, siempre faltará un trocito	
Nunca dejaríamos de introducir números en el bombo	
Por mucho que le quitemos siempre habrá infinitos números; nunca parará de haber números	
No se puede, ya que al ser infinitos nunca pararías de poner segmentos dentro de AB	
Si consideramos el 9 infinitas veces, podríamos concluir que 1,999... se aproxima al número 2 pero no llegaría a él	
Dos cosas interminables no se pueden comparar ni establecer su tamaño	
El límite sería 12 cm. aunque nunca llegarían a sumar 12 exactamente porque cabrían infinitos círculos	
No hay un límite que me indique que ya no hay más operaciones que realizar	
Queda un segmento cada vez más pequeño, pero nunca llegarás a un punto, siempre se puede dividir por la mitad	
Nunca llegaría a las 12, pues primero faltaría 1/4 de minuto, luego 1/8, luego 1/16,… pero nunca llegaría a faltar 0 s.	
Posiblemente no llegue a coincidir pero sí que puede quedar infinitamente próximo	
Para llegar a $\sqrt{2}$ sería necesario hacer dicho proceso infinitas veces, lo cual es imposible	
Al final la suma de intervalos de tiempo estará muy próxima a 12, pero no en las 12 en punto	
Se obtendrá una serie de divisiones 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … cuyo límite tiende a 0	
Se puede calcular hacia dónde se aproxima la suma, el límite de la suma, pero no se puede hacer una suma infinita	

Por último, los elementos actuales experimentan, como ya hemos señalado anteriormente, una evolución clara en el sentido de incorporar la idea de correspondencia entre elementos de dos conjuntos abriendo la posibilidad al concepto de cardinal, de equivalencia de cardinales y, por lo tanto, de infinito actual; así se ha recogido en los elementos pre-formales y también aparece en la siguiente tabla de manera más sintetizada. No obstante, el modelo *infinito = infinito* continúa siendo aún una de las imágenes más representativas del ECN de este nivel. Por otra parte, encontramos un importante número de elementos en los que se dota de cierta realidad al límite de un proceso, integrándolo en el mismo pero a mitad de camino entre un carácter potencial y su auténtico carácter actual: “tiende a 2 pero sólo llegará en el infinito”, “el círculo se completaría con una serie de rotaciones infinitas”, “$1,\overset{\frown}{9}$ es 2 en el infinito”, etc.

Tabla 123	Elementos infinitistas actuales
La suma de todos los valores tiende [converge] a 2, pero sólo llegará "en el infinito"	
La suma da 2 metros [dibuja un rectángulo 2x1 que divide en un cuadrado de área 1, otro de área 1/2, etc]	
$1,\widehat{9}$ es 2 en el infinito	
0,111… x 9 ≈ 1, pero en el infinito será igual a 1	
Si lo divides infinitas veces, el resultado final será 0 [te quedas sin segmento]	
El círculo se completaría con una serie de rotaciones infinitas	
Si el bombo contiene todos los números naturales, contiene infinitos números y entonces P(5) = 1/∞ = 0 y también P(x) = 10.000.000 / ∞ = 0	
En un segmento, curva o volumen siempre existen infinitos puntos	
Una recta encierra infinitos puntos; en las dos rectas [0, 1] y [2, 5] hay infinitos valores, luego, hay los mismos	
La suma de todos los diámetros es un número finito porque la altura del triángulo es finita	
El área vale 25 cm^2 puesto que si recolocamos todos los triángulos acaban ocupando 1/4 del total	
ℕ y ℕ-1.000.000 albergan la misma cantidad de elementos ya que pueden llegar hasta el infinito	
En ambos casos caben infinitos puntos ya que hay infinitos números reales entre 0 y 10 o entre 0 y 30	
A cada número natural le asigno el $2n - 1$ que es impar, creando así una aplicación biyectiva	
Hay la misma cantidad porque hay infinitos números naturales e infinitos números impares	
Tenemos infinitos numerables y no numerables	
Hay igual porque podemos establecer una biyección entre los dos conjuntos: ser n y 1.000.000 + n con n0ℕ	
Hay los mismos porque podemos establecer una biyección entre [0, 1] y [0, 4)	
Los cardinales de C = [1, 10] y D = [1, 100] son iguales porque cualquier intervalo de números reales es no numerable y no se puede decir que en uno haya más que en el otro	
Hay los mismos puntos porque todo punto del tramo AB se asocia [corresponde] con un punto del intervalo [2, 5]	
$x = 3 - 2y$, luego las soluciones son $(3-2y, y)$ y como y 0 ℝ, hay los mismos en [3, 5] que *card*(ú)	
Hay un infinito no numerable de soluciones para $x + 2y – 3 = 0$ ya que puedo establecer una correspondencia biyectiva [uno a uno] entre ℝ y el segmento [3, 5]	
Las dos circunferencias contienen infinitos puntos porque si se traza una línea que salga desde el centro corta a cada circunferencia en un punto, y así con infinitas rectas, luego tienen un infinito de puntos de "igual orden"	
Emparejando un número natural con uno impar se ve que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de números	
Si se establece la relación $2 + 3x$ entre [0, 1] y [2, 5] se encuentra una biyección y, por lo tanto, habrá el mismo número de puntos en ambos intervalos	

6.3.5.6. ELEMENTOS OBSTÁCULO Y MODELOS TÁCITOS.

No se han registrado variaciones significativas respecto al nivel anterior en lo que a elementos obstáculo epistemológicos se refiere, salvo las diferencias porcentuales recogidas en el capítulo anterior. No obstante, es conveniente destacar la resistencia de los modelos de *inclusión* e *infinito = infinito* como obstáculo para acceder a la perspectiva actual de infinito.

Tabla 124	Elementos obstáculo: tácitos epistemológicos
Infinito = infinito	Ambos tendrían los mismos, infinitos, porque los números seguirán creciendo infinitamente Ninguno de los dos contiene más porque los dos se extienden hasta el infinito Los conjuntos B, C, D y E tienen infinitos elementos por lo que ninguno es mayor que el otro Los dos intervalos tiene el mismo número de puntos porque en ambos las cantidades de números reales son infinitas En ambos casos hay infinitos ya que podemos hacer infinitas divisiones del intervalo Los dos son infinitos y tendrían el mismo número de elementos, infinitos, ya que 3 · ∞ = ∞ No apostaría por ninguno de ellos porque hay infinitos naturales, racionales e irracionales [0, 1] tiene infinitos puntos y [2, 5] = [2, 3] ∪ [3, 4] ∪ [4, 5] que es ∞ + ∞ + ∞ = ∞ puntos

Tabla 124 (cont.)	**Elementos obstáculo: tácitos epistemológicos**
Inclusión	El orden que yo le daría sería E<B<C<D porque unos se “incluyen en otros” Hay el doble de números naturales que de impares porque $\mathbb{N}$ tiene los pares y los impares Los dos conjuntos tienen infinitos elementos pero el primero tiene más porque empieza antes Los naturales están en los racionales así que hay un mayor número de estos El infinito de [0, 1] es menor que el de [2, 5] Como el segundo está contenido en el [está dentro del] primero, éste tiene más elementos Cabrían nueve veces más en el cuadrado de 30 cm. Como B y C están contenidos dentro de la longitud de A, decimos que A tiene más puntos En la semirrecta [0, ∞) hay más porque en ella está contenido ya el intervalo [0, 1] Lo tres habrán salido infinitas veces, sólo que el infinito de los doses está contenido en el de los múltiplos de 2
Punto = Marca	Si el tamaño de los puntos es finito, el número de puntos por cuadrado también lo es Los puntos pueden ser tan grandes como el cuadrado o microscópicos Cuanto más pequeños sean los puntos, más cabrán en cada cuadrado, pero no serían infinitos Suponemos que los puntos son tan pequeños que todas las líneas tienen infinitos puntos Hay infinitos; es como el caso de las partículas subatómicas; todo es divisible, así el punto puede ser más pequeño / Podemos hacer los puntos todo lo pequeños que queramos El radio de los puntos puede ser tan pequeño como se quiera Si definimos un punto como una circunferencia de 1 cm., cabrían 100 y 900 puntos respectivamente

En cuanto a los elementos obstáculo didácticos podemos ver que aún se recurre a la imagen indefinida de infinito con una notable profusión y variedad de expresiones; en numerosos casos tal indefinición no es sino una declaración de imposibilidad material de realizar un número de acciones demasiado grande, “no se puede decir un resultado ya que son infinitas sumas de números positivos”, de ahí que la mayor parte de este tipo de elementos se incluyan en la siguiente categoría a pesar de su ambigüedad. Por otra parte, los intentos de dar una definición de infinito se multiplican de manera considerable poniendo de manifiesto las diferencias en la naturaleza atribuida a este concepto; desde un número a un mero símbolo pasando por ideas abstractas no definidas, representaciones mentales, conceptos imaginarios, lugares geométricos, etc. y todo un glosario de acepciones que en su mayor parte pretenden crear una imagen más bien intangible de infinito pero que finalmente es asociada a números, operaciones o procesos en general, con un gran nivel de concreción: “es una manera de que comprendamos y nos podamos hacer a la idea de números muy grandes”, “es algo abstracto que aplicamos cuando algo diverge”, “es un concepto imaginario que acota la recta real”, “es un lugar geométrico alejado del origen”, “es la continuación de algo que no tiene fin”, etc. No obstante, es posible encontrar respuestas de un grado de madurez tal como la expresada por un alumno de la licenciatura de matemáticas: “no se si el infinito debería entenderse como un “objeto” (por ejemplo, como un conjunto, un número, etc.) o más bien como una “característica” de los objetos; prefiero lo segundo: así, no decimos qué es el infinito, sino qué es un conjunto infinito; un conjunto infinito es aquél en el que podemos establecer una biyección con alguno de sus subconjuntos distintos de sí mismo”, etc.

Tabla 125	Elementos obstáculo: tácitos didácticos
El más grande / el más pequeño	Infinito es el mayor [más grande, máximo] número natural [número] que existe Es el número mayor que tu sensibilidad matemática sea capaz de percibir Es el número más grande que podría existir si alguien consiguiera contar desde que nace hasta que muere durante ese número de vidas El tamaño del infinito es mayor que cualquier cifra que podamos escribir
Indefinición	Cabrían Infinitos porque no se especifica cómo son los puntos Los dos son infinitos y no se puede decir cuál va a tener mayor número de elementos No se puede calcular porque no sabemos dónde acaba El resultado que sale no está definido porque es infinito Infinito es un valor muy grande pero nunca está definido El infinito es una forma de denotar a cierto número indefinido No se puede decir un resultado ya que son infinitas sumas de números positivos No se puede calcular la suma porque no sabemos el número exacto de triángulos que hay No podemos indicar el número de puntos que caben en cada uno de los cuadrados puesto que entre un punto y otro existiría otro punto y así indefinidamente El infinito no se puede medir y no podemos saber si es mayor, menor o igual que otro infinito Queda un millón menos porque de los infinitos números naturales no contamos un millón Los números tienden a infinito y esto crea una indeterminación [1/10+2/100+3/1000+···] P(5) es indeterminada puesto que el conjunto de los números naturales no tiene fin Hay infinitas soluciones [$x + 2y – 3 = 0$] porque hay un número indeterminado de valores que satisface dicha ecuación Los dos contendrían un número no cuantificable de elementos ya que se extienden hasta el infinito 5/0 significa que tiende a infinito donde no sabemos manejarlo 0,999… x 0,999 es imposible de predecir porque no se puede expresar ese número; lo único seguro es que estará cerca de 1 Podemos coger infinitos pares de números que satisfacen la ecuación [x + 2y – 3 = 0], es decir, la ecuación no se puede resolver No podemos saber qué infinito es más grande pero sí vemos que el segundo infinito está contenido en el primero
Divergencia	El resultado será infinito, porque estamos sumando infinitos segmentos que aunque cada vez son más pequeños, no dejan de ser un número infinito El resultado será infinito, porque la longitud de la cuerda nunca va a ser cero Dará infinito por ser un número infinito de áreas Al ser una suma infinita su resultado nunca puede ser finito
Infinito como representación: Símbolo/Objeto	Infinito es una cosa abstracta para números no para cosas materiales Se trata de un concepto abstracto que define una sucesión de términos infinitos Es algo abstracto, una idea que aplicamos cuando por incapacidad o interés nos encontramos con algo que diverge Infinito es un concepto imaginario que “acota” la recta real Infinito no es una cantidad concreta, es un concepto para indicar que la cosa no acaba nunca Infinito no es algo concreto, sino una manera de que comprendamos y nos podamos “hacer a la idea” de números muy grandes Infinito es una representación mental para poder resolver cuestiones como k/0 Infinito no es un objeto tratable como 2 ó 3 Es un símbolo que determina que un concepto matemático no tiene una longitud finita Infinito es un número simbólico sin un valor determinado Sólo se trata de una idea de tendencia; no es un numero, es sólo un símbolo matemático que expresa que algo se aleja o acerca tanto como queramos Infinito es un término empleado para determinar algo que realmente no conocemos Infinito es simplemente un término para decir que no hay límite El infinito es una forma de denotar a cierto número indefinido Infinito es un “número” que utilizamos para representar algo que no podemos escribir ni comprender

Tabla 125 (cont.)	Elementos obstáculo: tácitos didácticos
Infinito como representación: Símbolo/Objeto	El infinito es un lugar en el espacio Infinito es un lugar geométrico alejado del origen y que no pertenece a $\mathbb{R}$ Infinito es un sitio inalcanzable que está muy lejos y tiene un valor muy grande Infinito es algo que está muy lejos Infinito significa algo a lo que nunca se llega El infinito es la continuación de algo que no tiene fin El infinito es algo inalcanzable y único Infinito es una cifra tan grande que no se puede usar normalmente en los cálculos Es un término que define una cantidad tan grande que llega a ser imposible medirla En realidad el infinito “encubre o maquilla” un valor muy grande Infinito es una magnitud que expresa un número que posee un valor superior a todos los demás y que no se puede obtener Infinito es un número que no se podrá definir nunca Algo infinito es algo incalculable, por lo que no tiene un valor exacto

Como ya hemos señalado en páginas anteriores, las limitaciones físicas propias de nuestros instrumentos de medida y de nuestros sentidos obstaculizan el acceso a un grado de abstracción suficiente para pensar y manipular el concepto de infinito, impidiendo interiorizarlo adecuadamente a un número no pequeño de sujetos, manteniendo una presencia significativa en el ECN de todas las edades consideradas. Por otra parte, la idea de “aproximación hacia un objetivo” genera, a su vez, todo un vocabulario para su representación; llegado a este punto, el sujeto decide entre un final efectivo del proceso o la prolongación indefinida del mismo. El conocimiento del valor final contribuirá a tomar tal decisión; si se sabe –por intuición o cálculo- que el límite o la suma es 2 ó 4 se tenderá a pensar que, en efecto, se alcanzará dicho valor; por el contrario, si el estudiante no dispone del resultado o no es capaz de averiguarlo y la infinitud del proceso supondrá un obstáculo real para su determinación.

Tabla 126	Elementos obstáculo: tácitos materiales
Limitaciones físicas	Si hay una cantidad infinita de diámetros no puedo sumarlos Llegará un momento en que ya no cabrán más triángulos Habrá un momento en que el cuadrado sea todo negro y no quepan más puntos El círculo que se aprecia a simple vista no es en realidad un círculo, es un polígono regular de “n” lados infinitamente pequeños Se obtiene un segmento cada vez más pequeño hasta que no pueda dividirse más Tras dividirlo muchas veces, el resultado sería un punto [átomo] indivisible del segmento Al final queda la parte mínima visible Si los puntos son visibles, A tiene más puntos No los puedes situar físicamente porque es imposible contar el infinito Como la figura tiene límites finitos, sólo se pueden inscribir un número finito de círculos Llegará un momento en que por muy pequeños que sean los círculos, la longitud de la figura termine y no quepan más Un dado no se puede lanzar infinitas veces No me puedo imaginar que exista un bombo con todos los números naturales En la realidad a infinito no se llega de una forma material Si existiese un hotel tan grande sería posible, pero esto es imposible Matemáticamente podemos despreciar una cantidad pequeña frente a una muy grande pero físicamente no podemos hacerlo [hotel infinito] Al hacer un número infinito de divisiones, el instrumento de medida nunca llegaría $\sqrt{2}$, siempre se aproximaría pero siempre quedaría la mitad

Tabla 126 (cont.)	**Elementos obstáculo: tácitos materiales**
Aproximaciones	Un millón de números es insignificante frente a un número muy grande Quitarle al infinito un millón de números es algo "despreciable" Quedan infinitos porque no se nota la resta El 5 es insignificante respecto al infinito Si trabajas con unidades del orden de 10^{-6}, 1 se puede considerar infinito 5 personas ó $2^{1000000}$ no es nada comparado con infinito Llegaría un momento en el que la suma de cierto número de diámetros sería inapreciable A medida que avanza la suma los nuevos números serán despreciables Por aproximación podemos llegar a $\sqrt{2}$, pero si consideramos infinitos valores, no llegaremos nunca a un valor concreto La suma de todos los términos da aproximadamente 2 Los dos son infinitos porque infinito es muy grande y se desprecia la diferencia entre ellos Cada vez vas haciendo más pequeño el segmento hasta llegar a uno tan pequeño que puede llegar a ser despreciable $0,\overset{\frown}{9}$ es el número mayor inmediatamente menor que 1, y la diferencia entre ambos tiene un margen de error mínimo 0,999… x 0,999… = 1 porque en algún decimal superaremos la precisión de la calculadora u ordenador y nos lo aproximará a 1 Se obtienen infinitos segmentos de longitud despreciable "*dl*"

Finalmente, los elementos contradictorios se revelan de nuevo como una de las imágenes inherentes al ECN de infinito. Junto a contradicciones comunes a niveles anteriores, el acceso a un nivel definitivo de pensamiento matemático avanzado no hace sino crear nuevos focos de contradicción entre elementos propios de un pensamiento matemático elemental y las nuevas y más abstractas nociones recién incorporadas.

Tabla 127	**Elementos obstáculo: contradictorios**
1.	Cabrán infinitos porque depende del tamaño de los puntos
2.	Cabrían infinitos ya que no seríamos capaces de contar con precisión los puntos al haber demasiados
3.	Restemos la cantidad de números que sea siempre nos quedan infinitos números, puesto que no sabemos qué tamaño tiene el infinito
4.	Los dos contendrán el mismo número de elementos, infinitos, ya que no podemos describir con un número el infinito
5.	El primer conjunto tendría más porque empieza antes, pero como son conjuntos infinitos no son comparables
6.	Los dos iguales, los dos tienen infinitos, pero ¿qué infinito es mayor?, por "lógica" podríamos decir que el primero porque empieza antes, pero no se, esto se contradice, …
7.	Al ser infinitos no se pueden cuantificar pero podemos establecer una medida y nos daría que los múltiplos de 2 es el mayor
8.	Hay infinitos números naturales e impares, aunque debería haber infinitos naturales e infinito/2 impares son infinitos ambos, así que inexplicablemente hay la misma cantidad
9.	En las dos circunferencia hay una cantidad no numerable de puntos, ninguna contiene más que la otra; no los podemos contar, aunque la intuición nos diga lo contrario
10.	Sabemos que por cada segmento que borramos nos quedan dos, por lo que es mayor el conjunto de segmentos que no se borran, pero no podemos definir un número ya que sólo tenemos valores infinitos
11.	El número de los segmentos que quedan será mayor y no sería comparable, aunque ambos tienden a infinito
12.	Con cada fracción vamos sumando decimales pero llega un momento en que el denominador es tan grande que el resultado tiende a cero por lo que la suma total no aumenta más
13.	Cabe una cantidad infinita de puntos pero sin sobrepasar los límites del cuadrado
14.	La probabilidad sería "nula" porque como son infinitos números no se puede calcular la probabilidad exacta ya que al tender a infinito, la probabilidad tiende a "0"

Tabla 127	Elementos obstáculo: contradictorios
15.	La probabilidad es 0, porque los números naturales son infinitos, pero nunca dejaríamos de meter los números en el bombo
16.	El resultado será un número periódico pero en la práctica no se puede multiplicar 0,999… x 0,999…
17.	El infinito es un concepto único, aunque con matices podemos definir diferentes órdenes de infinito, es decir, $k^{\infty}, \infty^{k}, \infty^{\infty}$
18.	Infinito no tiene tamaño pero sí se puede acotar
19.	El resultado es indeterminado pero intuitivamente podría ser cero, ya que cualquier número por muy grande que sea multiplicado por cero es cero
20.	Se obtiene un segmento cada vez más pequeño hasta que sea tan pequeño que no pueda dividirse más
21.	La suma de diámetros no es un número infinito ni tampoco una cantidad finita porque no para de aumentar

6.3. RESUMEN.

A lo largo de este capítulo se ha llevado a cabo la elaboración y descripción del ECN de infinito para cada uno de los cinco niveles educativos definidos: sexto curso de educación primaria, primer y segundo curso de educación secundaria, tercer y cuarto curso de educación secundaria, primer y segundo curso de bachillerato y primer curso universitario.

A partir de los datos registrados en el capítulo 5, se han establecido los elementos propios de cada nivel, que constituyen el núcleo básico de su esquema conceptual por el valor significativo de sus frecuencias. Y, a continuación, se ha procedido a la catalogación de respuestas según la estructura del ECN diseñada a partir de una serie de componentes carácterísticos con la particularidad de presentar elementos comunes tanto transversal como longitudinalmente. Esta catalogación no sólo ha incluido a los elementos propios, como los más representativos, sino que también contiene todos aquellos puntos de vista que por su singularidad aportan rasgos definitorios del ECN correspondiente; se trata pues de una composición cualitativa que sumada a los resultados cuantitativos del capítulo anterior nos ofrezce la perspectiva más amplia posible de este concepto en cada nivel educativo. Así, encontramos muestras de pensamiento metafórico, simbólico, e incluso pre-formal en alguno de los niveles, en yuxtaposición con elementos finitistas e infinitistas, obstaculizadores y contradictorios.

A partir del análisis realizado podemos extraer algunas conclusiones que conviene destacar. En primer lugar, se puede apreciar que los elementos metafóricos, los cuales constituyen uno de los pilares básicos de la corporeización de infinito, experimentan un incremento notable en cuanto a la diversidad de acepciones que se van incorporando en cada nivel, aún a pesar de la presencia cada vez más numerosa de elementos simbólicos y pre-formales; este aumento es especialmente significativo en lo que a elementos métrico-espaciales se refiere, ya que la incorporación de elementos metafóricos vinculatorios parece ir asociada a un mayor nivel de instrucción. La incidencia de los elementos metafóricos es aún más evidente si aislamos los diferentes elementos gramaticales utilizados así como su función contextual; esto nos permite observar, entre otros hechos, que el número de verbos empleados para expresar la infinitud es apreciablemente mayor que el que se asocia a lo finito y que el número de adjetivos o adjetivaciones también supera al de otras funciones lingüísticas, lo que parece indicar que a infinito se le dota de una naturaleza más atributiva, respecto del proceso u objeto que se trate, que adverbial o sustantiva.

En segundo lugar, hemos de constantar que la evolución de los elementos simbólicos presenta variaciones aún más pronunciadas que las de los elementos metafóricos; este hecho tiene una evidente relación con los procesos de aprendizaje; la lengua materna, tanto sus estructuras como su vocabulario, tiene una implantación, tanto genética en aquellas como instructiva en éste, superior a la que presenta el pensamiento matemático en ambos aspectos. De hecho, mientras el acceso al lenguaje se realiza mediante un proceso paulatino el correspondiente a la terminología matemática experimenta una discontinuidad apreciable en torno a los doce o trece años. Teniendo en cuenta la inercia propia de la asimilación de nuevos conceptos podemos explicar el comportamiento observado en este tipo de elementos a partir del segundo ciclo de educación secundaria, así como la aparición de los primeros elementos preformales hacia el final del bachillerato.

En cuanto a los elementos finitistas e infinitistas, cabe señalar ante todo la invariancia de los primeros, no cuantitativa pero sí cualitativa, a lo largo de las edades comprendidas en este estudio. Son imágenes que perduran incluso tras la formación de la mayor parte de los sujetos y cuyo seguimiento merecería ser objeto de investigación con el fin de contrastar ámbitos aparentemente disjuntos como son el escolar y el no escolar. Los elementos de transición, por su parte, presentan un comportamiento semejante y suelen contener con frecuencia elementos contradictorios evidentes aunque el sujeto no se muestre consciente de los mismos durante una entrevista. Los elemento infinitistas potenciales, ya presentes en los primeros niveles, son reforzados de manera positiva gracias al tipo de contenidos del currículo vigente que favorece, casi con exclusividad, la interpretación de infinito como la meta inalcanzable de un proceso indefinido. En consecuencia, la dificultad para acceder a una perspectiva actual de infinito queda reflejada en el tipo y número de expresiones registradas a lo largo de este capítulo; sólo en bachillerato y, especialmente, en el nivel universitario se puede apreciar claramente la integración de este tipo de elementos en la estructura del ECN.

Por último, hemos de referirnos a los elementos obstaculizadores y contradictorios cuya ausencia singularizada en el ECN, aún a pesar de hallarse en buena parte contenidos en las categorias anteriores, nos impediría obtener una visión completa del mismo. El examen de los resultados tabulados nos permite deducir una relación causal entre los modelos intuitivos detectados en el capítulo 5 y la mayoría de los elementos obstaculizadores clasificados en las páginas anteriores, sean epistemológicos, didácticos o materiales. Por su parte, los elementos contradictorios no son sino el resultado del conflicto cognitivo entre dos o más de dichos modelos, lo que da lugar a respuestas incoherentes que en los niveles inferiores no siempre son aceptadas tras una discusión y en los superiores comienzan a alcanzar la consciencia del individuo y a provocar estados de indecisión.

Conclusiones

− Sin infinito no tendríamos matemáticas –dice Wheatley-. Pero eso no quiere decir que exista el infinito. El infinito no es más que un constructo, un constructo humano.

J.M. Coetzee

El objetivo fundamental de este trabajo ha sido el de contribuir con nuevos resultados a los ya aportados por la literatura especializada que pretende comprender cómo se implanta la noción de infinito en la mente y cómo evoluciona dicha noción sometida a un proceso de enseñanza y aprendizaje. Las dificultades de semejante tarea no han escapado a ninguno de los autores que de manera eventual o permanente la han incluido en su labor investigadora. Estas dificultades se deben, en primer lugar, a la propia naturaleza del concepto, que desde el principio presenta un carácter sinonímico, o simplemente extensivo, de otras expresiones ya existentes en el vocabulario del niño; no ocurre así con nociones matemáticas sofisticadas como, por ejemplo, la de límite que, aún implicando un despliegue conceptual y analítico considerable, tiene un correlato bastante aproximado en el lenguaje habitual. En segundo lugar, la corporeización de un concepto se lleva a cabo a partir del entorno más próximo, de la cotidianidad que nos sumerge; pero lo cotidiano no presenta, en absoluto, rasgos infinitistas a excepción de posibles extensiones microscópicas que sugieren una divisibilidad indefinida o bien ciertas propuestas cosmológicas infundadas sobre el tamaño del universo. Pero, en ausencia de referentes, el pensamiento metafórico, inherente al desarrollo cognitivo, se encarga de completar los posibles vacíos que puedan surgir; esto supone una servidumbre necesaria del lenguaje habitual ligado a una realidad finita que, en el mejor de los casos, favorece una concepción progresiva o potencial de infinito. Por último, y en relación con la afirmación anterior, el origen y evolución epistemológicos ponen en evidencia las dificultades para establecer y asumir por la comunidad científica, y por la tradición filosofíca en general, el carácter actual de infinito como ha quedado reflejado a lo largo del capítulo 1. En realidad, el infinito en dichos ámbitos, no ha existido hasta finales del siglo XIX; desde los griegos se ha denominado infinito –potencial- a algo que sencillamente no era infinito[1], mientras que su acepción absoluta,

1. El infinito potencial constituye, de hecho, la definición de un proceso; un proceso que *no acaba* representado por unos puntos suspensivos, un término general, una ley de recurrencia, una relación funcional, etc. La introducción de la expresión $\lim_{x\to\infty}$, que pretende "adelantarnos el final" del proceso en como atributo, se restringió a la naturaleza o a las capacidades de las divinidades de cada mitología o teología. Sólo Cantor y algunos colegas condescendientes fueron capaces de incorporar de manera definitiva al corpus científico una noción que, aunque elegante, supone un reto al conocimiento intuitivo por las contradicciones que supone frente a los postulados finitistas tan firmemente arraigados a las estructuras cognitivas.

El notable incremento de trabajos de investigación sobre este concepto en el contexto de la Educación Matemáticas en los últimos quince años, como se puede apreciar en el Apéndice I, ha ido ampliando también las perspectivas desde las que analizar las peculiaridades conceptuales, cognitivas y didácticas de infinito. Algunos de los paradigmas vigentes en Educación Matemática, en particular dentro del área de Pensamiento Matemático Avanzado, tales como la teoría APOE, la teoría de metáforas y corporeización, las reglas y modelos intuitivos, etc. están siendo aplicados a este concepto con el fin de describir e interpretar los procesos de aprendizaje del mismo, así como de plantear propuestas de instrucción que permitan superar o al menos minimizar los obstáculos asociados a la interiorización de infinito en un contexto matemático. Dentro de este marco teórico, esta tesis introduce como aspectos innovadores el estudio cuantitativo de los patrones de evolución de los diferentes comportamientos ante el concepto en cuestión en un amplio abanico de edades, la detección sistemática de modelos intuitivos vinculados a la noción de infinito, un análisis pormenorizado del lenguaje relacionado con infinito y, finalmente, la elaboración de un esquema conceptual nivelar que comprende un extenso conjunto de imágenes agrupadas en diferentes categorías alusivas a la evolución cognitiva, a aspectos propios del concepto y a sus contradicciones y elementos obstaculizadores. En la metodología utilizada se han conjugado el paradigma cuantitativo, mediante la aplicación de cuestionarios a muestras de sujetos y su tratamiento estadístico, y el cualitativo, por medio de entrevistas con y entre individuos con planteamientos enfrentados que permitieron la emergencia de conflictos cognitivos entre modelos intuivos tácitos contrapuestos; así mismo, se han realizado estudios comparativos con los resultados aportados por otros autores en los casos en que ha sido posible.

I

El análisis de los datos ha arrojado una serie de resultados cuya interpretación nos permite establecer algunas conclusiones que merecen ser destacadas. En primer lugar, en lo que se refiere a los modelos intuitivos, hemos de indicar que se ha hallado la presencia de modelos aún no descritos en los trabajos publicados. Así, junto a los modelos establecidos por Fischbein, Tsamir, Tirosh y otros autores, modelo de *inclusión*, modelo *infinito = infinito*, modelo de *inagotabilidad* y modelo *punto-marca*, recogidos en la revisión bibliográfica sintetizada en el capítulo 3, se han detectado los siguientes en el presente estudio:

Modelo intuitivo de *indefinición*. Las respuestas y actitudes que induce este modelo están asociadas a cierta incapacidad de conocer o calcular que impide la concreción de resultados relacionados con procesos u objetos infinitos; de esta manera es frecuente hallar expresiones del tipo *no se sabe, no se puede saber* o *calcular porque son infinitos*. Dicha incapacidad está

cuestión, no es sino un postrer artificio matemático con fines exclusivamente operativos. No deben extrañarnos, por lo tanto, las dificultades epistemológicas que entrañan tanto el concepto de límite, tan ampliamente estudiado, como el de cardinal infinito.

vinculada en la mayor parte de los casos a limitaciones propias de nuestra naturaleza que nos inhabilitan para acceder en un tiempo razonable a los datos necesarios o bien realizar las operaciones requeridas; así lo ponen de manifiesto argumentos más explícitos que el anterior, “no se pueden contar porque son infinitos”, “no se puede calcular porque no sabemos dónde acaba”, “el segmento se puede dividir en muchas mitades de forma que no existe un número concreto”, “el resultado no se puede calcular porque las fracciones que se suman no llegarían a terminar”, “no se puede calcular porque jamás podríamos contar todos los diámetros”, etc.

Modelo intuitivo *acotado-finito / no acotado-infinito*. Este modelo aunque se halla presente en la literatura especializada no ha sido tratado con suficiente detalle. Responde a la relación que establece un número importante de sujetos entre la definición acotada o no acotada de un conjunto y el cardinal de sus elementos. La primera opción induce, en general, a actitudes finitistas, “llega un momento en que ya no caben más círculos en el triángulo porque llegamos al vértice” o infinitistas actuales, “la suma de todos los diámetros será como mucho la altura del triángulo”; no obstante, es preciso indicar que la frecuencia de las mismas depende de si el contexto es geométrico o numérico y, evidentemente, del nivel educativo; por su parte, la ausencia de cotas propende en mayor medida a posturas infinitistas bajo una perspectiva potencial, “en $[0, \infty)$ hay más números que en $[0, 1]$ porque no acaba”. Así, pues, el hecho de que representemos el conjunto o conjuntos a evaluar mediante intervalos o segmentos, mediante notación conjuntista o recintos bidimensionales, tendrá una repercusión definitiva en la actitud adoptada por el sujeto.

Modelo intuitivo de *divergencia*. La suma de infinitas cantidades, ya sean series de naturaleza geométrica o bien numérica, nos muestra que este modelo y sus imágenes asociadas constituyen uno de los tipos de elementos propios más genuinos del esquema conceptual correspondiente. Tales imágenes representan mayoritariamente, salvo en el nivel universitario en el que se invierten los valores obtenidos en todos los ítems, el carácter divergente del resultado independientemente de que la convergencia del término enésimo sea más o menos acentuada; así, la expresión “el resultado es infinito porque siempre se suma” supone una clara aplicación de postulados finitistas que respondería al esquema *siempre que se suma* [un número finito de términos] *el resultado es más grande*, sin reparar en cotas superiores, aun reconociendo en no pocas respuestas *que los números son cada vez más pequeños*. El sujeto puede cuestionarse la rapidez con la que crecen las sumas parciales pero apenas lo hace con el resultado; sólo en algunas representaciones geométricas en las que se evidencia la contención de los sumandos en el interior de un polígono, por ejemplo, el resultado finito obtiene porcentajes significativos, pero en la mayor parte la justificación se encuentra en que “llega un momento en ya no caben más triángulos”. Quizás el caso más destacado sea aquel en el que se solicita sumar una serie de segmentos cada uno de longitud la mitad del anterior, tras haber respondido a una cuestión sobre la naturaleza del “último” elemento de la división indefinida en mitades sucesivas de un segmento; prácticamente uno de cada tres sujetos universitarios mantiene que el resultado será infinito, mientras que en el resto de niveles educativos lo hace uno de cada dos.

Modelo intuitivo de *aproximación*. Ya se ha mencionado con anterioridad que la corperización de infinito es el resultado de extender el lenguaje propio de una realidad tangible y finita a situaciones que implican procesos indefinidos, *seguir y seguir*, *saltar y saltar*, etc., aún incluso en el seno de dicha realidad. Pero al pasar del ámbito puramente verbal al matemático, el sujeto halla ciertos inconvenientes que debe salvar como, por ejemplo, la necesidad externa o interna de ofrecer un resultado cuantitativo. En tal caso, una de las opciones a las que se recurre es la de efectuar un aproximación o redondeo a un valor cercano, despreciando el error absoluto cometido: “si unes todos los segmentos dará alrededor de 2 metros”, “llegará un momento en que ya no puedes dividir más y la suma será aproximadamente 2 m.”, “si sumamos los cuatro primeros segmentos obtenemos un valor casi igual a dos y la suma de los siguientes es casi despreciable porque son muy pequeños”, “no se puede calcular el resultado”, “sólo hacer aproximaciones”, etc.; incluso en ocasiones la estimación es bastante gruesa cuando se trata de comparar cantidades infinitas, “ambos conjuntos tienen casi los mismos porque son infinitos”, “si quitas un millón a los números naturales no se nota”, etc. Ambos tipos de respuestas se hallan entroncadas con actitudes infinitistas, potenciales en el primer caso y actuales en el segundo, si bien resuelven la situación con métodos eminentemente finitos.

II

En segundo lugar, se han definido los *patrones de evolución nivelar* que nos indican el comportamiento de las diferentes categorías establecidas a lo largo de los niveles educativos considerados; el perfil de estos patrones nos proporciona información muy valiosa sobre aspectos tan importantes como la sensibilidad de los modelos intuitivos frente a las variaciones contextuales, la resistencia de dichos modelos para una representación determinada, el carácter emergente o residual de ciertos elementos o imágenes del esquema conceptual, el efecto del proceso educativo a través de la introducción de nuevos conceptos como los de función, sucesión o límite, etc. Por su parte, el *grado de estabilidad* del patrón de evolución, definido en el capítulo 5, nos permite cuantificar la resistencia mencionada y centrar nuestra atención sobre los modelos activos que hay tras actitudes de uno u otro signo. Un estudio detallado de estos parámetros nos aporta una serie de resultados que resumimos a continuación.

En lo que se refiere a cardinalidad y relación entre conjuntos infinitos hemos encontrado que un contexto numérico-conjuntista contribuye, por una parte, a aceptar como una propiedad natural la infinitud de los conjuntos propuestos desde las edades inferiores y, por otra, a que entren en juego los modelos *infinito = infinito*, “ambos conjuntos tendrán los mismos elementos”, “infinitos, porque los números no acaban”, de *inclusión*, “los dos conjuntos tienen infinitos elementos pero el primero tiene más porque empieza antes”, y de *indefinición*, “los dos conjuntos son infinitos y no se puede decir cuál va a tener mayor número de elementos”. El primero de estos modelos presenta un patrón de evolución creciente, mientras que el de los otros dos es creciente-decreciente con grados de estabilidad más acentuados en los primeros niveles. Dentro de este contexto, los patrones de evolución se muestran sensibles al hecho de substraer un subconjunto finito o infinito de elementos de $\mathbb{N}$, dificultando en este último caso, respecto al primero, la observación de la equipotencia entre ambos conjuntos. Otra cuestión que hemos de mencionar corresponde a la naturaleza del “receptáculo” que alberga los elementos del conjunto. Así, por ejemplo, de los 11 a los 16 años se considera que $\mathbb{N}$ contiene más elementos que puntos hay en el interior de un cuadrado y entre ambos extremos hallamos conjuntos tales como el número de estrellas, el número de granos de arena o el de células que componen nuestro cuerpo, en este mismo orden, que como podemos observar depende directamente del tamaño del continente o “contenedor”.

Si el contexto elegido para comparar conjuntos infinitos es el geométrico hallamos algunas diferencias con el caso anterior que conviene constatar. En primer lugar, los elementos de estos conjuntos, los puntos, adquieren una dimensionalidad de la que carecían los conjuntos numéricos; esto supone un postulado decisivo, ya que obstaculiza la identificación del cardinal correspondiente y convierte la comparación de conjuntos en una mera cuestión métrica. De esta manera, si se trata de relacionar los puntos contenidos en dos cuadrados o segmentos diferentes, será frecuente leer que "habría una cantidad finita de puntos pero no se podría decir sin saber cuánto mide un punto", o bien "si el primer cuadrado contiene 100 puntos el segundo contendrá 900". Esta dependencia del "tamaño de los puntos" es mantenida por, al menos, uno de cada cuatro sujetos como ocurre en el nivel universitario. Por otra parte, la introducción en el enunciado de elementos funcionales, o bien que los sugieran, favorece al modelo infinito = infinito frente al modelo de inclusión y permite, en los niveles superiores, la observación de correspondencias biyectivas entre los conjuntos comparados, "son iguales, ya que los puntos de la curva AB son proyecciones del intervalo [2, 5]", "se puede establecer una biyección entre los puntos de la circunferencia pequeña y los de la grande". En cambio, la comparación de intervalos de números reales potencia el modelo de inclusión en particular en los estudiantes de bachillerato frente a los universitarios. Por último, hemos de señalar el constrate entre algunos de estos resultados y los correspondientes al ítem "¿existen diferentes tamaños de infinito?"; la respuesta negativa presenta valores muy elevados en comparación con los que se deducen de todos los ítems anteriores; esto pone de relieve que el modelo *infinito = infinito* domine a nivel tácito frente al de inclusión.

Los procesos de divisibilidad indefinida también nos ofrecen una gama de resultados digna de considerar. Lo primero que debemos destacar es, una vez más, la fuerte sensibilidad de las respuestas a variaciones contextuales; así, la partición progresiva de un segmento arroja valores porcentuales elevados de la actitud finitista "el proceso acaba", con un patrón de evolución claramente decreciente, frente a los obtenidos en un contexto de división numérica, que induce a la postura contraria, "numéricamente no tendría final pero físicamente sí", con un grado de estabilidad muy alto. La explicación de tales actitudes hemos de buscarla en el isomorfismo que se establece entre elementos geométricos y materiales y en las limitaciones físicas que supone la manipulación de estos últimos; esto nos conduce directamente a la relación entre este tipo de procesos y la naturaleza del "último" elemento; es decir, tenemos la posibilidad de observar la interpretación que realizan los estudiantes del vínculo entre lo infinito y lo infinitesimal. En efecto, mientras que en el caso numérico *al final obtendremos un número decimal*, una presentación geométrica de los enunciados da pie a propuestas del tipo *se obtiene un segmento o muchos segmentos, un segmento muy pequeño, un punto, un átomo, etc*. Por el contrario, las respuestas infinitistas presentan un patrón de evolución con un crecimiento muy acusado, reflejan un mayor grado de abstracción y se remiten en la mayor parte de las ocasiones a la propia definición del proceso, "nunca se alcanzará el resultado más pequeño ya que no puedes parar de dividir" y, con una frecuencia mucho menor, a una posible consideración actual de infinito, "al final el segmento desaparece porque cada vez se va haciendo más pequeño"; es evidente que esta última no se halla exenta de las contradicciones características entre actitudes finitistas e infinitistas, sobre las que volveremos más adelante. Dentro del contexto numérico se han planteado versiones indirectas de este problema solicitando el valor mínimo de un intervalo abierto pero acotado; en los niveles inferiores se le ha dado un matiz lúdico y en los superiores algo más formal. Esta diferencia ha dado lugar a que el patrón de evolución en el primer caso tenga un perfil semejante a los ya mencionados anteriormente, es decir creciente para la categoría "el juego no acaba" y decreciente para la opción contraria; en cambio, en el segundo caso los resultados han alcanzado una estabilidad inesperada para los dos tipos de respuesta en torno a valores muy próximos. Una posible explicación podría hallarse en la interiorización de 2,000…1 como un objeto resultante de la secuencia 2,1, 2,01, 2,001,…, hecho que se ha registrado en numerosas respuestas. En relación con esta cuestión se halla aquella otra que solicita, si existe, algún valor entre 1,999… y 2; la respuesta afirmativa presenta un patron de evolución residual, mientras que la tendencia de la negativa es creciente con valores elevados; sin embargo, no se interioriza en general la identificación entre ambos números pues se considera que "2 es el siguiente a 1,999…", o bien que "como hay infinitos nueves no existe ningún número entre ambos". Por último, conviene recordar que el modelo de inagotabilidad, detectado por Fischbein, suele ir asociado a procesos de divisibilidad indefinida; en nuestro caso, uno de cada tres estudiantes universitarios ha considerado que la división progresiva del segmento [1, 2] en mitades permitirá alcanzar $\sqrt{2}$ mediante una sucesión de intervalos encajados.

Uno de los tópicos menos explorados en relación con el concepto de infinito es el de las series convergentes. Los resultados obtenidos se hallan estrechamente ligados al modelo de divergencia al que ya nos hemos referido anteriormente. Dentro del contexto geométrico se pueden apreciar ciertas semejanzas entre los patrones de evolución correspondientes a las tres representaciones que se han propuesto: unión de segmentos cada uno de longitud la mitad que el anterior, suma de los diámetros de circunferencias inscritas en un triángulo y suma de las áreas de una serie triángulos en el interior de un cuadrado. En primer lugar, el tipo de respuesta *el resultado es infinito porque siempre se le puede sumar más*, que responde al modelo de divergencia, presenta un perfil con un cierto grado de estabilidad en los niveles inferiores pero decreciente en los niveles superiores y oscila, aproximadamente, entre un 25% y un 45%; el hecho de que en el caso de los segmentos no se explicita cota alguna mientras que en los otros dos casos aparece un límite a la expansión de la serie, representado por el contorno del triángulo o del cuadrado, da lugar a porcentajes superiores de la respuesta "infinita", especialmente en los estudiantes más jóvenes. Y, en segundo lugar, las respuestas que proponen resultados finitos presentan un análisis más complejo debido a una mayor diversidad que va desde una actitud finitista, "porque llegará un momento en que se acaben los segmentos", o "porque llega un momento en que no caben más diámetros en el triángulo", a otra infinitista potencial, "la suma se acercará a 2 metros" o infinitista actual, "la suma de todas las áreas será la cuarta parte del cuadrado". En las tres representaciones la tendencia de sus patrones de evolución es creciente, en particular en los niveles superiores, pero en el caso de la suma de segmentos se aprecia un crecimiento muy pronunciado en 2BTO y 1UNI frente a los otros dos casos cuyo incremento es mucho más suave. La explicación de este hecho debemos buscarla en la aparición de una nueva categoría, *no se puede calcular*, con porcentajes significativos en las dos representaciones en las que la serie aparece acotada; este tipo de respuesta suele ir asociada a la insuficiencia de datos, dificultad para representar los términos más pequeños o simplemente la indefinición atribuida a infinito. Por último hemos de considerar los resultados correspondientes al contexto numérico que aparece en los cuestionarios bajo dos representaciones diferentes:

a) $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots$ *b)* $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

La sensibilidad de los resultados ante la variación de contextos se refleja con bastante claridad en los patrones de evolución. Así, el contexto numérico arroja unos valores apreciablemente superiores para la respuesta infinita, en especial para la representación a), frente a los obtenidos en el contexto geométrico. Por su parte, la respuesta finita, con tendencia creciente en todos los casos tanto geométricos como numéricos, nos muestra valores muy reducidos para la serie a) en todos los niveles; aunque esta serie presenta una convergencia mucho más acelerada que la b) ha dado origen, de nuevo, a la categoría *no se puede calcular* a pesar de que ambos ítems incluían un resultado finito entre las respuestas altenativas. Pero hay algunas diferencias entre ambas propuestas; en el caso a) se ofrecía la posibilidad "el resultado es un número finito, ¿cuál?" mientras que en el b) era "el resultado se acerca indefinidamente a un cierto número" y, además, la cota de la serie a) tras hacer algunos cálculos no se evidencia como lo hace la correspondiente al caso b). En general, una buena parte de los estudiantes de los niveles inferiores e intermedios considera como infinito cualquier número con infinitos decimales; de este modo podemos entender la reticencia hacia la respuesta finita. Por el contrario, la imagen de aproximación elude tal inconveniente y, a la vez, posee una cierta familiaridad para los sujetos de los niveles superiores que hace más favorable su elección.

Las series no son sino una de las numerosas posibilidades que tienen los estudiantes para acceder a operaciones que implican la manipulación de cantidades infinitas. Los cuestionarios de todos los niveles han incluido ítems que permiten observar y analizar el tipo de aritmética que genera el sujeto cuando ha de arreglárselas para operar con infinitos términos o bien con cardinales infinitos. En general, cuando se ha de operar con números decimales periódicos es frecuente, en los niveles inferiores, aducir la imposibilidad del cálculo en base a la incapacidad para comenzar a realizar la operación o bien la indefinición de infinito que no nos permite conocer la cantidad de términos con los que hemos de operar. Pero, por otra parte, también es bastante habitual encontrar respuestas que afirman la existencia del resultado expresado como número periódico, *el resultado de la resta es 4,272727…* o *el producto da 0,999…* que interpretan tales valores más como objetos que como procesos. El significado de la expresión 0 x ∞, planteado en el nivel universitario, oscila entre la actitud finitista, *da 0 porque cualquier número por cero da cero*, y la confusa idea de indeterminación que sólo en ocasiones se justifica *porque depende del tamaño de 0 y de ∞*. La "división entre infinito" se presta asímismo a la aplicación de presupuestos intuitivos reseñables; por ejemplo, dependiendo de que el numerador de dicho cociente sea mayor o menor, la respuesta *el resultado es muy pequeño* varía de un caso a otro modificando los patrones de evolución respectivos tanto en los valores porcentuales como en la tendencia de los mismos; la respuesta nula o aquella otra que considera la aproximación progresiva a cero constituyen elementos emergentes que sólo alcanzan frecuencias significativas a partir de 2BTO. Por último, el patrón de evolución de aquellos sujetos que consideran incorrecta la relación $\infty + 5 = \infty$ es característico de un elemento residual; en cambio, si dicha relación se vincula a la "paradoja del hotel infinito" el perfil de la respuesta negativa, aun decreciente, se eleva de manera considerable sobre aquél, pues se aduce la imposibilidad material de albergar un número adicional de personas en un hotel ya completo o sencillamente la inviabilidad de tal hotel.

III

En el capítulo 6 se ha elaborado una posible estructura para un esquema conceptual nivelar (ECN) a través de una serie de componentes que recogen la gama más amplia posible de imágenes en torno a la idea de infinito a partir de los más de dos mil sujetos que han respondido los cuestionarios. Con la denominación "nivelar" nos referiremos a un determinado rango de edades que en nuestro caso comprenderá uno o dos niveles educativos consecutivos y supondrá la creación de cinco de tales esquemas. El sustrato básico de cada ECN se compondrá de los denominados *elementos propios* que corresponden a imágenes consolidadas en el nivel en cuestión obtenidas a partir de análisis cuantitativo del capítulo 5; sobre este tipo de elementos se erigen otros de naturaleza netamente evolutiva tales como los elementos *metafóricos*, *simbólicos* y *preformales* o formales, o bien aquellos otros que constituyen rasgos idiosincrásicos de infinito como los elementos *finitistas* e *infinitistas* y los elementos *obstáculo*. Resulta un hecho experimental la coexistencia, no sólo en un nivel educativo sino en cada individuo, de elementos correspondientes a diferentes estadios evolutivos de un concepto; en el caso que nos ocupa aún es más sencillo constatar este resultado, dado su carácter ambiguo y contradictorio. Por lo tanto, en un ECN no existe un grado homogéneo de madurez y contemplaremos, por ejemplo, la convivencia de elementos metafóricos de un nivel inferior con elementos preformales propios de niveles superiores.

En primer lugar debemos comenzar refiriéndonos al papel que desempeña el lenguaje, en particular el lenguaje natural, en la integración de este concepto dentro de los esquemas de conocimiento sobre nuestro entorno, desde las realidades más concretas a las más abstractas. La corporeización de infinito pasa ineludiblemente por el uso reiterado de expresiones metafóricas que permiten materializar nociones más o menos intangibles en estadios cognitivos en los que el acceso a la abstracción aún es precario, "este juego duraría todo el tiempo del mundo", "seguiría y seguiría hasta que nos cansemos", "cada vez se alargará más", "volvería a ser la mitad una y otra vez", etc. No obstante, hallaremos las huellas del pensamiento metafórico a lo largo de todo el periodo de edades considerado, eso sí con una gama de expresiones cada vez más numerosa y sofisticada. El estudio de los elementos metafóricos a lo largo de los cinco niveles establecidos nos permite extraer las siguientes conclusiones.

- Los elementos metafóricos métrico-espaciales constituyen el vínculo principal con la realidad más inmediata y material. Esta viene representada fundamentalmente por un concepto de medida más o menos impreciso, arbitrario y directo: "una línea es tan grande que no se puede medir", "mediría kilómetros porque una línea es infinita", "depende de la medida de los puntos", "serían tan pequeños que no los verías", "no hay una regla tan grande para medir infinito", "el segundo conjunto es mayor porque hay más distancia entre número y número", "por pequeño que sea el círculo siempre medirá algo", etc. Pero también también indirecto a partir de referencias espaciales, "será un número muy largo pero no llegará a 0", "los números también son infinitos hacia abajo", "el primer conjunto tiene más recorrido hasta infinito", "podemos alargarla hasta donde queramos", "1,999… está muy cerca de 2", "nunca se podría poner un número detrás de 1,999…", "los puntos de la circunferencia más pequeña van a estar más juntos", "es un número que no se puede alcanzar", "es el lugar más alejado del origen de los números reales", *etc.*

Evidentemente no hay proceso de medida que no lleve asociado sus propias limitaciones o errores, ya sean fisiológicos o instrumentales, "serían tan pequeños que no los verías", "aunque no se podrían medir seguirían estando allí", "lo mínimo que puedes obtener al final es un átomo", "no importa el tamaño de los puntos", "sino que el aparato con que medimos sea más preciso", "llegará un momento en que sea imperceptible", *etc.*, si bien hemos de constatar la presencia de elementos metafóricos que ya anuncian la transición hacia la abstracción superando los obstáculos anteriores, "aunque tu no veas el segmento, lo podrías ver con aparatos especializados", "mirando por el microscopio se podría seguir dividiendo el segmento", etc. En consecuencia, es necesario conocer este tipo de elementos a la hora de establecer estrategias de instrucción ya que la evolución de la noción de infinito y las propiedades asociadas dependerá básicamente de ellos.

- Los elementos metafóricos cinético-temporales implican una complejidad propia de conceptos más artificiales, menos inmediatos, como se pone de manifiesto en el reducido número de imágenes registradas en los niveles inferiores y en el notable incremento que se produce en los superiores. Por una parte, se puede observar que las duraciones inconmensurables se representan mediante una gama más o menos constante de adverbios o adverbializaciones tales como *siempre, nunca, jamás, eternamente, toda la vida, todo el tiempo que quieras,* etc. así como la utilización de expresiones negativas*, no pararás de poner nueves, no pararías jamas de dividir, puedes añadir puntos sin parar,* etc.; pero hay un número muy importante de sujetos, especialmente en los niveles inferiores, para los que también hay limitaciones temporales, "tarde o temprano llegaremos al número que queremos", "llega un momento en que ya no podrías hacer la mitad", etc. Y, por otra parte, encontramos referencias evidentes que transfieren rasgos cinéticos al tratamiento de conjuntos, sucesiones, operaciones, etc. de objetos matemáticos. Así, es posible reconocer una amplio catálogo de verbos, *ir, seguir, continuar, crecer, avanzar, llegar, alcanzar, acercarse, aproximarse, tender,* etc., adjetivos, *rápido, lento, progresivo, inalcanzable,* etc. y adverbios, *sucesivamente, continuamente, periódicamente,* etc., que pretenden representar el movimiento de elementos absolutamente inertes, "los números van siempre hacia delante", "1,999… sigue pero no llega al 2", "la serie B va avanzando de cuatro en cuatro", "va creciendo de dos en dos infinitamente", "se acerca continuamente a 4", "el segundo conjunto va saltando números", "si la serie se detuviese en algún punto", "el primer conjunto tendría más números", "nos vamos aproximando poco a poco a un extremos del segmento", etc., e incluso los modos de dicha dinámica, "los dos grupos de números van aumentando al mismo ritmo hasta el infinito", "aunque una serie vaya más rápida y otra más lenta", "llegarán al mismo lugar", "crecen pero cada vez más lentamente", "hay diferentes "velocidades" de tender hacia infinito", "el número de múltiplos de 2 crece más rápido", etc. A la vista de toda esta terminología y sus imágenes asociadas, que las hallamos interiorizadas en los sujetos más jóvenes y con más frecuencia en los de mayor edad, podemos anticipar el pleno desarrollo de una perspectiva potencial de infinito.

- Por último, en lo que se refiere a los elementos metafóricos vinculatorios hemos de recurrir a la idea de *compartimentación* de Vinner para justificar su reducido número, al menos hasta bachillerato. En los niveles inferiores e intermedios sólo se detectan fugaces relaciones entre representaciones de contextos geométricos y numéricos, "se obtiene un segmento con muchísimos decimales aunque no terminarías nunca de dividir", "la línea mediría infinito porque los números no tienen fin”, “al dividir el segmento en mitades se obtendrá un número comprendido entre 0 y 1”, etc. Como se ha indicado, es preciso esperar a los niveles de bachillerato y universitario para registrar respuestas más sofisticadas y que impliquen una mayor diversidad de contextos, “esta división de segmentos es como el cociente 1/n, cuanto más pequeño es n, más grande es el cociente”, “si en una ecuación nos da como resultado 5/0 significa que en la gráfica hay una asíntota vertical”, “al ser $\mathbb{N}$ de longitud infinita, le quites lo que le quites siguen quedando infinitos números”, “establecería una relación entre [0, 1] y [2,5] con x convertido en 2+3x que es una biyección”, etc. Esta situación nos obliga a pensar en *tareas de conexión* (Garbin, 2000) que favorezcan el establecimiento de vínculos entre las diferentes áreas del curriculo, aparentemente estancas en el esquema conceptual del sujeto, con el fin dotar al estudiante de recursos suficientes para enfocar la noción de infinito desde diversas perspectivas.

Los elementos simbólicos suceden a los metafóricos pero conviven con ellos en un mismo esquema conceptual e incluso comparten, en buena medida, un lenguaje común que rinde servidumbre a la corporeización paulatina del concepto. La incorporación de los elementos simbólicos supone el progreso de las acciones sobre el entorno hacia un proceso de encapsulamiento que las convierte en objetos susceptibles de manipular como tales y de reflexionar sobre ellos. En realidad, este tipo de elementos nos informa sobre los presupuestos de los que parte el sujeto a la hora de llevar a cabo dicha manipulación en contextos relacionados con infinito. Hemos distinguido, por las peculiaridades propias del concepto que nos ocupa, entre elementos operacionales, “siempre se puede dividir un número” o “no puedes dividir entre dos sucesivamente porque te quedarías sin números”, y relacionales, “al ser los números infinitos no existe el valor más grande” o “el primer conjunto es mayor porque empieza antes”.

- Como hemos indicado, los elementos operacionales establecen un sin fin de pautas en términos axiomáticos sobre el tipo de operaciones que se puede realizar y las condiciones en las que ello es posible, “no se puede empezar a hacer la resta porque hay infinitos números”, “es infinito porque siempre se suma la mitad infinitas veces”, “si le sumas lo mínimo a 1,999… sale 2”, “el producto de dos números infinitos es infinito”, “no se puede sumar porque no sabes el último número de la serie”, “ningún número multiplicado por 9 puede dar 1”, etc. No es difícil hallar tras ellas numerosas referencias didácticas que caen sobre un terreno abonado con demasiadas ambigüedades, “infinito menos cualquier número es una indeterminación ya que puede dar cualquier número”, “al multiplicar un número periódico por otro igual, el resultados seguirá siendo infinito”, “puesto que el número multiplicado roza el uno, el resultado también rozará el uno”, “aún sumándo infinitos elementos de la sucesión no llegaría a 4”, “algo dividido entre 0 no tiene sentido porque es una indeterminación”, etc. En consecuencia, el conocimiento de esta aritmética sesgada del infinito nos permitirá establecer instrucciones precisas que minimicen la generación de obstáculos didácticos.

- En cuanto a los elementos relacionales encontramos, por una parte, alusiones a los extremos superior o inferior de intervalos tanto acotados como no acotados, “si empiezo yo, puedo decir el número más pequeño”, “podría decir el último número de los que existen”, “el número más pequeño entre 2 y 3 es el 2,000…1”, “el resultado más pequeño posible será 1:∞”, “infinito es la cantidad mayor que somos capaces de acumular”, etc.; también toda una serie de relaciones de orden indefinidas, “puedo decir siempre un número mayor”, “siempre hay un número más pequeño”, etc. que en ocasiones, cada vez más frecuentes con la edad, finalizan admitiendo la inexistencia del extremo correspondiente, “no se puede llegar a un número máximo”, “no existe el valor más grande”, “nunca alcanzas el resultado más pequeño porque no lo hay”, “no existe el más pequeño porque hay infinitos números entre 2 y 3”, etc. Pero, el registro de imágenes más interesante procede de las relaciones de orden que se establecen entre el cardinal de dos o más conjuntos. Como ya se ha indicado anteriormente, la mayor parte de las respuestas se sitúan en torno a los modelo de *inclusión*, “el primer conjunto es mayor porque el otro va saltándose números”, “el primer conjunto es mayor porque empieza antes”, “la línea A debería tener más puntos porque es más larga”, “en la semirrecta hay más puntos porque contiene al intervalo [0, 1]”, “es preferible apostar por los racionales mejor que por los naturales, ya que éstos son un subconjunto de aquellos”, etc. e *infinito = infinito*, “los dos conjuntos son iguales porque tienen infinitos números”, “los dos conjuntos tienen los mismos porque acaban en infinito”, “no existen diferentes tamaños de infinito porque si a infinito le sumas uno sigue siendo infinito”, “los dos conjuntos son infinitos y tendrían el mismo número ya que $3\cdot\infty = \infty$”, etc., aunque también son reseñables aquellas otras que se refieren al modelo de *indefinición*, “no se pueden ordenar estos conjuntos porque todos son infinitos”, “es difícil ordenarlos porque no tienen un número determinado”, “no podemos saber qué infinito es más grande aunque vemos que el segundo infinito está contenido en el primero”, etc. Por último, en los niveles superiores comienzan a aparecer referencias a aplicaciones entre los elementos de los conjuntos con el fin de justificar su equipotencia, “tendrán los mismos ya que es la misma progresión pero multiplicada por 3 cada uno de sus números”, “emparejando todos los naturales con los impares se ve que hay la misma cantidad”, etc. Así, pues, podemos concluir que predominan patrones epistemológicos a la hora de establecer una relación entre la numerosidad de dos conjuntos; no obstante, debemos apuntar que el hallazgo de correspondencias entre elementos, aunque infrecuente en niveles inferiores, no es ajeno a las estructuras cognitivas de nuestros estudiantes como lo pone de manifiesto la respuesta “la serie B será cuatro veces más grande que la A porque es el número que ponga en A por 4” de una alumna de 2ESO; esto nos permite pensar en la posibilidad de reintroducir en el currículo la nociones de aplicación y correspondencia a un nivel intuitivo con el fin de crear modelos que, al menos, generen un conflicto cognitivo con los ya establecidos y provoquen la reflexión sobre su validez general.

El rasgo más definitorio del ECN viene dado por los elementos finitistas e infinitistas ya que, además de ir asociados a diferentes estadios de madurez, nos indican la actitud del sujeto frente a este concepto así como los modelos intuitivos que participan en sus decisiones.

- En primer lugar, las actitudes finitistas se manifiestan mediante una serie de imágenes comunes a todos los ECN que se hacen eco de las limitaciones propias de un mundo ajeno a la abstracción. Aquellas hacen mención a los extremos alcanzables de un intervalo, “durará hasta que uno diga el más bajo”, “si el primero dice infinito el juego se acabará”, etc., a elementos indivisibles, “al final ya no se podría partir puesto que se llegaría al átomo o a un punto minúsculo”, que acabarían lógicamente rellenando un recito acotado, “cabrían muchos puntos en el cuadrado pero habría un final”, “sólo se pueden añadir triángulos hasta que el espacio se acabe”, “al final el segmento terminaría llenándose y sólo cabría un número finito de segmentos”, etc. o, en fin, a presupuestos inciertos, “sería una longitud muy grande pero se podría medir”, “el resultado depende de cuántos segmentos haya", etc. Este tipo de imágenes perduran a lo largo de todos los niveles estudiados aunque su frecuencia disminuya con la edad. Las entrevistas han mostrado que el conflicto que surge al enfrentar a estos sujetos una y otra vez a procesos indefinidos se halla en la fortaleza que presentan dicotomías del tipo práctico/teórico o mundo físico/mundo matemático como compartimentos incomunicados.

- Los elementos de transición finitista/infinitista contienen en la contradicción que les caracteriza el origen de su evolución hacia actitudes infinitistas, aunque es posible la perduración de tal situación hasta edades avanzadas en las que ya será muy difícil estimular cambios en un contexto de instrucción ortodoxa. En general, este tipo de elementos conjuga la asunción de cantidades grandes o procesos inabarcables con la incapacidad de acceder a ellos, casi siempre bajo la influencia del modelo de indefinición, "no podemos ordenarlos porque es muy difícil contarlos", "son muchos puntos y perderías la cuenta", "se podría seguir cortando miles de veces", "ambos tienen igual debido a que los dos conjuntos "finalizan" en el infinito", "en el intervalo [0, 1] también encontramos casi infinitos números", "al ser un segmento de longitud *l*, sólo entraría una cierta cantidad de segmentos infinitesimalmente pequeños", etc.

- Cuando un sujeto incorpora a su esquema conceptual los primeros elementos infinitistas, estos son de naturaleza potencial en la mayor parte de los casos y en la totalidad de los niveles considerados. La interiorización del infinito actual es un proceso complicado a partir de presupuestos potenciales, pues los términos secuenciales impiden observar la globalidad representada por un cardinal o por un límite, pero aún lo es más desde el finitismo más ingenuo o inmaduro. Basta con revisar las tablas de elementos incluídas en el capítulo 6 para apreciar el notable incremento de imágenes potenciales a lo largo del amplio abanico de edades analizado y la irrupción súbita, pero no frecuente, de la perspectiva actual de infinito al final del bachillerato y en el primer curso universitario; en el primer caso, parco, debemos pensar en los recursos intuitivos del individuo que apenas ha escuchado el término correspondencia, esporádicamente aplicado al concepto de función, y menos entre conjuntos infinitos, mientras que en el segundo caso es preciso atribuirlo a una instrucción más formal, irónicamente denominada hace algunos años ya teoría intuitiva de conjuntos. Cuando se solicita el resultado de un proceso indefinido, lo que centra la atención del individuo no es dicho resultado sino el proceso en sí, su desarrollo, constatar sobretodo que "continúa", que nada ni nadie lo puede parar, en muchos casos ni la voluntad del propio sujeto, "siempre hay un número mayor que otro", "los números siguen y no acaban", "siempre cabrá un punto más", "obtendrías segmentos cada vez más pequeños", "nunca podrás parar de dividir el segmento por la mitad", etc., aunque a veces dicha voluntad se reserve el derecho a hacerlo mediante la adverbialización correspondiente, "se obtiene un segmento tan pequeño como quieras", "puedes seguir poniendo todos los ceros que quieras", "se puede dividir todas las veces que desees", etc. Sin embargo, esto no significa que el carácter exhaustivo de estos procesos permita alcanzar límite alguno, "nunca llegarás a 2 porque siempre falta un trocito", "se puede calcular hacia dónde se aproxima la suma, el límite de la suma, pero no se puede hacer la suma", incluso hasta llegar a negar la realidad, "nunca llegarías a las 12:00 porque primero faltaría 1/4 de minuto, luego 1/8, luego 1/16,… pero nunca llegaría a faltar 0 segundos". Todo esto nos obliga una vez más a considerar el modelo de indefinición como causa directa de numerosas respuestas que se remiten a la imposibilidad de conocer o calcular el resultado.

- Dentro de los elementos infinitistas actuales hemos de distinguir dos tipos de imágenes diferentes. Por una parte, aquellas que reconocen la existencia de un límite y la posibilidad de "alcanzarlo" eventualmente, "el resultado será cero porque si divido va disminuyendo", "me quedo sin nada porque va desapareciendo el segmento al dividirlo", "la suma de todas las áreas será la cuarta parte del cuadrado", "al unir todas las mitades te da dos metros", "como 0,999… = 1 entonces 0,999… x 0,999… = 1·1 = 1", etc., y, por otra, aquellas que se refieren a la equipotencia de conjuntos infinitos; entre estas, la mayoría responde explícita o implícitamente al modelo *infinito* = *infinito*, "habría infinitos puntos en los dos cuadrados", "si se quita un millón a algo infinito se queda como estaba, infinito", etc. y sólo un porcentaje muy pequeño en los niveles superiores alude a la correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos, "$\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ – {1, 2, 3, …., 1.000.000} tienen la misma cantidad de números porque siguen la misma pauta de 1 en 1", "hay los mismos porque los puntos de la curva AB son reflejos del intervalo [2, 5]", "a cada punto de una circunferencia le corresponde una proyección sobre la otra circunferencia", "si se establece la relación 2+3*x* entre [0,1] y [2, 5] se encuentra una biyección y, por lo tanto, habrá el mismo número de puntos en ambos intervalos", etc.

IV

Aunque los denominados elementos obstáculo y elementos contradictorios se hallan prácticamente en cualquiera de las componentes del ECN, debemos singularizar su tratamiento pues deben constituir la esencia de cualquier programa de instrucción que pretenda optimizar el aprendizaje de este concepto. De hecho, la técnica IST de Tirosh y Tsamir y, en parte, la tarea de conexión de Garbín, revisadas en el capítulo 3, siguen la línea de explotar el conflicto cognitivo que surge cuando un sujeto enfrenta dos modelo intuitivos incoherentes.

Los elementos obstáculo epistemológicos ya han sido tratados ampliamente a lo largo del capítulo anterior y de estas conclusiones. No obstante, su examen evidencia un incremento significativo, a medida que aumenta la edad, de expresiones que aspiran a reflejar a través de otras tantas imágenes los mismos postulados inherentes al origen y desarrollo del concepto; estos son los modelos de *inclusión*, que supone la herencia finitista más directa, *infinito* = *infinito*, que concede a infinito un carácter absoluto pero ni mucho menos actual, y *punto* = *marca*, que nos remite al profundo grado de abstracción que representa la noción de adimensionalidad y sus consecuencias.

La elaboración de un catágolo de elementos obstáculo didácticos sería el primer paso razonable de cualquier proyecto de introducción al infinito en el currículo escolar. Pero esta tarea no es trivial si pretendemos no caer en la arbitrariedad; el análisis de libros de texto, así como de las convicciones del profesorado al respecto convierten esta compleja labor en ardua y dilatada. Diversos autores, entre ellos Sbaragli (2004) y Penalva (1996), han llevado a cabo investigaciones sobre el segundo de estos aspectos con el objetivo de proponer una categorización de las mismas. En el presente trabajo se ha optado, a partir de los resultados de dichas autoras, por seleccionar sólo aquellos tópicos que, por su ausencia en el desarrollo epistemológico y su elevada frecuencia en los datos registrados en cuestionarios y entrevistas, se han considerado originados en el contexto educativo. En primer lugar, las referencias a “el número más grande” adoptan diferentes imágenes según el nivel que estemos considerando; así, para los de menor edad tales alusiones son literales, “si digo el número más alto ganaría el juego”, mientras que a medida que avanzamos hacia niveles superiores hallamos expresiones del tipo “el infinito es la expresión de un máximo”, o bien “infinito es el mayor número natural”, que no hacen sino convertir el término infinito en sinónimo de “el más grande”; algo semejante ocurre con “el más pequeño”, que en determinados exhibe un grado de incoherencia evidente: “$2,\widehat{0}1$ no existe pero representa al número más pequeño entre 2 y 3”. En segundo lugar, los elementos obstaculizadores derivados de los modelos de *indefinición* y de *divergencia* han sido comentados en detalle en las páginas anteriores; el primero de ellos supone un impedimento para la manipulación de cualquier objeto o proceso infinitos que se ampara en la ausencia intrínseca de información de infinito, “el término infinito se utiliza cuando algo muy grande no se conoce a ciencia cierta”, y si este sentimiento de desinformación está tan arraigado, probablemente esté asociado a una presencia insuficiente en el currículo escolar; en cuanto al segundo, más sofisticado, tiene relación con propiedades no triviales como, por ejemplo, el tipo de convergencia de los términos de la serie; en ausencia de este conocimiento, el sujeto aplica reglas intuitivas primarias que contemplan la suma o unión como un aumento que desemboca, en el caso de infinitos términos, en un resultado infinito o, en su defecto, indeterminado o indefinido que según lo comentado anteriormente equivalen a aquél. Por último, debemos mencionar la existencia de otro tipo de obstáculo didáctico que surge en los niveles superiores, en particular en el universitario. Se trata de la concepción de infinito no como un objeto matemático sino como una representación en un sentido amplio de la palabra; de esta manera, encotramos expresiones tales como “el infinito es sólo una idea o concepto en nuestra mente”, “una manera de expresar algo que no podemos entender”, “algo abstracto para algo que diverge”, “un concepto imaginario que “acota” la recta real”, “una representación mental”, “sólo un signo matemático”, “una palabra para indicar que los números no tienen fin”, etc. Estas y algunas más se puede consultar en las tablas correspondientes del capítulo 6 y, como ocurre con el modelo de *indefinición*, inhabilitan al sujeto para incorporar a su esquema conceptual una noción tratable de infinito, con sus propiedades y sus reglas operativas.

Los elementos obstáculo que hemos denominado materiales recogen tanto una perspectiva que se centra en las limitaciones físicas que rodean el tratamiento de procesos u objetos infinitos, “no se podrían unir los segmentos porque serían muy pequeños y no se podrían coger”, “no puedo saber lo que mediría la línea porque no la puedo dibujar”, “habría muchos puntos y te confundirías al contarlos”, “no se pueden meter todos los números naturales en el bombo”, etc., como el recurso expeditivo de aproximar o redondear de manera arbitraria un resultado indefinido, “aproximadamente caben 1.000.000 de puntos”, “ambos conjuntos tienen casi los mismos porque son infinitos”, “si unes todos los segmentos dará alrededor de 2 metros”, “no se consigue exactamente el 1 pero se consigue una aproximación muy grande”, “si le quitas un millón a los números naturales no se nota”, “$\infty + 5 = \infty$ quiere decir que 5 es muy pequeño comparado con infinito”, etc. Como se puede apreciar, la mayor parte de estas imágenes contienen referencias didácticas que el estudiante extrapola intuitivamente ante situaciones más o menos novedosas; pero, dada la importante presencia de este tipo de elementos se ha decidido segregarlos de los obstáculos didácticos con el fin de subrayar su trascendencia; cuando un profesor simplifica su discurso diciendo, por ejemplo, que 5 es muy pequeño o despreciable frente a un número muy grande o frente a infinito debería ser consciente del tipo de modelos intuitivos que inculca en sus alumnos e intentar paliar su efecto mediante las aclaraciones necesarias dependiendo del contexto en que se halle.

Por último, hemos de hacer mención a los elementos contradictorios que necesariamente forman parte esencial de cualquier ECN; su carácter necesario se debe al conflicto cognitivo que, en la evolución natural desde actitudes finitistas a infinitistas, se produce entre modelos contrapuestos. Podemos encontrar ejemplos de incoherencias asociados a cuaquier modelo o pareja de modelos intuitivos: “no se puede hacer la resta pero si se pudiese, su resultado sería 4,272727…”, “los dos son infinitos porque no los podemos contar”, “en los dos cuadrados hay infinitos siempre que los puntos se hagan con un lápiz”, “el juego durará hasta que uno diga infinito porque nunca se acaba”, “es infinito porque puedes seguir metiendo triángulos hasta que llegue un momento en el que ya no quepan más”, “aunque son infinitos los números tienen algún límite por remoto que sea”, etc. En consecuencia, una revisión exhaustiva de contradicciones nos proporciona una instantánea del estadio de transición del nivel en cuestión y nos ofrece la posibilidad de utilizar estas situaciones como recurso para rectificar, de manera constructiva, patrones de comportamiento obstaculizadores.

V

También hemos de referirnos a las *implicaciones pedagógicas*, *docentes* y de *investigación* que se derivan de este análisis de las que, aunque son múltiples y muy diversas, sólo destacaremos algunas que consideramos esenciales. En primer lugar, la formación del profesorado de Educación Primaria y Secundaria, tanto inicial como permanente, debería incluir el desarrollo de esta noción tanto desde la perspectiva del Análisis Matemático como desde la Teoría de Conjuntos, incidiendo especialmente en los modelos intuitivos derivados de la misma y las contradicciones a ellos asociadas; en particular, sería aconsejable rescatar la idea de conjunto e incidir en sus diversas representaciones que contribuirán a enriquecer el esquema conceptual asociado[2]. En segundo lugar, la noción de función nos permite que entre en juego la idea de *correspondencia* entre conjuntos infinitos que facilita, a la vista de nuestros resultados, una perspectiva actual del infinito; por lo tanto, convendría aprovechar la notable presencia del concepto de función en el currículo actual para acentuar su naturaleza de relación entre conjuntos numéricos. Por otra parte, sería conveniente que los departamentos de matemáticas de los centros de educación secundaria sondearan, mediante pruebas puntuales que propiciasen la aplicación de modelos intuitivos, el estado de conocimiento de grupos de alumnos de diferentes niveles en periodos de instrucción determinados, con el fin de cuantificar el efecto de los procesos de aprendizaje y corregir las tendencias obstaculizadoras detectadas. Y, por último, la inclusión de sesiones monográficas, adaptadas a cada uno de los niveles educativos desde la Educación Primaria, que aborde el lenguaje, las paradojas y los retos relacionados con la noción de infinito, podría favorecer la adquisición de recursos por parte de los estudiantes, que les permitiesen discriminar entre los

2. En los últimos veinte años se ha pasado, por ejemplo en la formación de los profesores de Educación Primaria, de unos contenidos curriculares basados exclusivamente en la Teoría de Conjuntos a la práctica desaparición de los mismos. Estos permitirían, bien a través de la metáfora del “contenedor”, bien a través de la amplia variedad de imágenes que suscita, reubicar el infinito actual en el esquema conceptual correspondiente.

diferentes mensajes que irán recibiendo a lo largo su instrucción y resolver de manera autónoma la mayor parte de los conflictos que les puedan surgir en torno a la idea de infinito.

Para terminar, debemos indicar que entre las tareas de investigación pendientes cabe destacar la necesidad de efectuar un estudio sistemático de la presencia de este concepto, más bien las alusiones indirectas al mismo, en los libros de texto de nuestro país con el fin de delimitar el tipo de elementos asociados que sus contenidos generan en el ECN; junto a la formación inicial, es un hecho reiteradamente comprobado que los elementos o imágenes que se difunden en los textos representan una participación activa en el proceso de aprendizaje a través de su intepretación y reelaboración por parte del profesorado. También podría resultar de interés analizar la influencia del uso de software matemático fácilmente accesible y cada vez más habitual en el ámbito docente, tipo Derive y Cabri, en la modificación de modelos intuitivos y patrones de evolución nivelar; en particular, la relación entre fenómenos o sistemas periódicos y el infinito o entre inducción e infinito son aspectos aún no tratados cuya investigación podría arrojar resultados de interés. Y, en fin, dada la dependencia, constatada a lo largo de esta tesis, del lenguaje natural en el desarrollo del esquema conceptual de infinito convendría analizar la influencia de factores tales como el nivel académico de los sujetos, su contexto sociocultural, conjeturado por Boero *et al.* (2003), su desarrollo emocional, etc.

VI

En resumen, hemos recogido a lo largo de estas conclusiones la constatación de las hipótesis establecidas en la introducción de este trabajo. Por una parte, en coincidencia con otras investigaciones, hemos comprobado que los tipos de modelos intuitivos no quedan afectados por la edad; todos los modelos detectados se hallan presentes en todos los niveles objeto de esta investigación, si bien han sido desvelados modelos intuivos no incluidos hasta ahora en las publicaciones especializadas; sin embargo, a diferencia de resultados ya publicados, sí que encontramos una dependencia temporal de dichos modelos en sus patrones de evolución, de acuerdo con los parámetros estadísticos utilizados. Asimismo, se ha podido comprobar que el pensamiento metafórico es uno de los hilos conductores de todos los esquemas conceptuales estudiados, protagonizando un papel clave en el aprendizaje de la noción de infinito; por su parte, la fuerte sensibilidad de los resultados frente a las variaciones contextuales o representativas no hace sino confirmar la incidencia del lenguaje, primero natural y luego matemático, en la corporeización de concepto tan singular.

Referencias bibliográficas

ADAMS, T.L. (2003). Reading mathematics: More than words can say. *The Reading Teacher*, **56** (8), pp. 786-795.

AMIT, M. y VINNER, S. (1990). Some misconceptions in calculus - anecdotes or the tip of an iceberg. *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **1**, pp. 3-10

ARISTÓTELES (a). *Física*. Madrid: Gredos, 1995

ARISTÓTELES (b). *Acerca del cielo. Meteorlógicos*. Madrid: Gredos, 1996

ARQUÍMEDES. El Arenario, en *El Mundo de las Matemáticas* (ed. J.R. Newman). Vol. **4**. Barcelona: Grijalbo, 1983

ARRIGO G., D'AMORE, B. (1999). "Lo vedo ma no ci credo…". Ostacoli epistomoligici e didattici al processo di comprensione di un teorema de Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento Della matematica e delle scienze integrate*, **22B**, 5, pp. 465-494.

ARRIGO, G., D'AMORE, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, **12**, 2, 5-19

ARTIGUE, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **10** (2/3), pp. 241-286.

ARY, D., JACOBS, L.Ch. y RAZAVIEH, A. (1982). *Introducción a la investigación pedagógica*. Méjico: Interamericana.

ARZARELLO, F., BARTOLINI, M.G. y ROBUTTI, O. (2004). Infinity as a Multi-Faceted Concept in History and in The Mathematics Classroom. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **4**, pp. 89-96.

ASTOLFI, J.P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner*. Paris: E.S.F.

AUSLANDER, J. (2001). Embodied Mathematics. *American Scientist*, **89**, pp. 366-7.

AYERS, T., DAVIS, G., DUBINSKY, E. y LEWIN, P. (1988). Copunter experiences in learning composition of functions. Journal for Research in Mathematics Education, **19**(3), pp. 246-259.

AZCÁRATE, C. y CAMACHO, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, **10** (2), 135-149

AZCÁRATE, C. (1998). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, **1** (2), pp. 235-243.

BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin

BAGNI, G.T. (1997). Didactics of Infinity: Euclid's proof and Eratosthenes' sieve Prime numbers and potential infinity in High School, *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, Thessaloniki, pp. 209-218.

BAGNI, G.T. (1998). Un'interpretazione categoriale de una misconcezione riguardante gli insiemi infiniti, *Atti e Memorie dell'Ateneo di Treviso*, **15**, pp. 51-60.

BASTICK, T. (1982). *Intuition: How we Think and Act.* Chichester/UK: John Wiley & Sons.

BEN-ZEEV, T. y STAR, J. (2002). Intuitive Mathematics: Theoretical and Educational Implications en *Understanding and teaching the intuitive mind* (eds. B. Torff y R.J. Sternberg). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Ass.

BERNABÉ, A. (1988). *De Tales a Demócrito. Fragmentos presocráticos*. Madrid: Alianza Editorial

BERTHOZ, A. (1997). Le sens du Mouvement. Paris: Editions Odile Jacob

BOERO, P., DOUEK, N. y GARUTI, R. (2003). Children's Conceptions of Infinity of Numbers in a Fifth Grade Classroom Discussion Context. *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. **2**, pp. 121-128.

BOLZANO, B. *Las paradojas del infinito*. Méjico: Mathema, UNAM, 1991

BORASI, R. (1985). Errors in the enumeration of infinite sets. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **7** (3/4), 77-88

BOSQUE, I y DEMONTE, V. (1999). *Gramática descriptiva de la lengua. Real Academia Española*. Madrid: Espasa

BOYER, C.B. (1994). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial

BROOKS, R.A. (1991). Intelligence Without Representation, Artificial Intelligence 47, pp. 139-159.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problémes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **4** (2), pp. 165-198.

BROWN, A., McDONALD, M.A. y WELLER, K (2008). Step by Step: Infinite Iterative Processes and Actual Infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education*, Vol. **15,** pp. 117-144. American Mathematical Society

BRUNER, J.S. (1966). *Towards a Theory of Instruction.* Cambridge, MA: Harvard University Press

BRUNER, J.S. (1972). Hacia una intuición disciplinada en *La importancia de la educación.* Barcelona: Paidós.

BUNGE, M. (1962). *Intuition and Science.* Englewood Cliffs, Prentice-Hall

BUSSI, M.G. (1998). Verbal Interaction in Mathematics Classroom: a Vygotskian Analysis en Language and Communication in the Mathematics Classroom (eds. H. Steimbring, Bartolini Bussi, M.G. y A. Sierpinska). Reston VA: NCTM, 65-84

CANTOR, G. *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*. Barcelona: Crítica, 2006

CHIU, M.M. (1996). Exploring the origins, uses and interactions of student intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **27**(4), 478-504

COHEN, L. y MANION, L. (1998). *Research Methods in Education*. London: Routledge

CLARK, A. (1997). *Being There: Putting Brain, Body and World Together Again*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press

COHN, J. (1994). *Histoire de l'infini*. Paris: Éditions du Cerf

COLÁS, M.P. y BUENDÍA, L. (1998). *Investigación educativa*. Sevilla: Alfar

CONTI (2005). Aspecto Léxico, modo de acción o aktionsart. Disponible en <http://www4.ujaen.es/~cconti>. Marzo de 2005.

COOK, T.D. y REICHARDT, Ch.S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Madrid: Morata.

CORNU, B. (1981). Apprerntissage de la notion de límite: modèles spontanés et modèles propres. *Actes du Cinquième Colloque du Groupe International PME*, Grenoble, pp. 322-326.

CORNU, B. (1983). Appentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. Tesis doctoral. Universidad de Grenoble.

CORNU, B. (1991). Limits, en *Avanced Mathematical Thinking* (ed. D. Tall). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., pp. 153-166.

COTTRILL, J. (2003). An Overview of Theories of Learning in Mathematics Education Research. Disponible en <http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/theory-pmet.pdf> Junio de 2003

COUTURAT, L. (1973). *De l'infini mathématique*. Paris: Librairie Scientifique et Technique

CRUBELLIER, M. (1994). La raison et l'infini. *Repères-IREM*, **17**, pp. 13-28.

CZARNOCHA, B., DUBINSKY, S., PRABHU, V. y VIDAKOVIC, D. (1999). One Theoretical Perspective in Undergraduate Mathematics Education Research. *Proceedings of the 23th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, 95-110,

D'AMORE, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un capo fértil para la investigación en didáctica de la matemática. *Epsilon*, **36**, pp. 341-359.

D'AMORE, B. (1997). L'infinito in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, **3**, pp. 289-305.

D'AMORE, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bolonia: Pitagora Editrice

D'AMORE, B., ARRIGO, G. ET AL. (2006). El "sentido del infinito", *Epsilon*, **65**, 187-216

DAVIS, R. (1984). Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. Norwood, NJ: Ablex

DAVIS, Ph. J. y HERSH, R. (1988). Intuición en *Experiencia Matemática*. Barcelona: MEC-Labor.

DEDEKIND, R. *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza Editorial, 1998

DEHAENE, S. (1997). *The Number Sense*. Oxford: Oxford University Press

DELAHAYE, J.P. (2001). El carácter paradójico del infinito. *Investigación y Ciencia*, Temas 23, pp. 36-44

DENDALUCE, I. (coord.). *Aspectos metodológicos de la investigación educativa*. Madrid: Narcea

DESCARTES, R (a). *Oevres et lettres*, Paris: Gallimard, 1953

DESCARTES, R (b). *Discurso del método. Meditaciones metafísica*. Madrid: Espasa-Calpe, 1979

DISSESA (1983). *Phenomenology and the evolution of intuition* en Mental Models (eds. D. Gentner y A. Stevens). New Jersey: Lawrence Erlbaum Ass.

DREYFUS, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking*, en Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for Psychology of Mathematics Education (eds. P. Nesher y J. Kilpatrick), pp. 113-134. Cambridge, GB: Cambridge University Press.

DREYFUS, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes, en *Avanced Mathematical Thinking* (ed. D. Tall). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

DUBINSKY, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en *Avanced Mathematical Thinking* (ed. D. Tall). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. pp. 95-123.

DUBINSKY, E. y McDONALD, M.A. (2002). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, 275-282, ICMI Study

DUBINSKY, E., WELLER, K., McDONALD, M.A. y BROWN, A. (2005a y 2005b). Some Historical Issues and Parodoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS-Based Analysis: Part 1 y Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, **58** (3), pp. 335 – 359 y **60** (2), pp. 253-266.

DUROUX, A. (1983). La valeur absolue; difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x*, 3

DUVAL, R. (1983). L'osbtacle du dedoublement des objets mahtematiques. *Educational Studies in Mathematics*, **14**, pp. 385-414.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, pp. 37-65.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang

ECHANDÍA, G.R. (1995). Introducción a la *Física de Aristóteles*. Madrid: Gredos

EDELMAN, G.M. y TONONI, G. (2000). *A Universe of Consciousness: How Matter Becomes Imagination.* New York: Basic Books

EDWARDS, B.S. y WARD, M.B. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. *American Mathematical Monthly*, 111 (5), pp. 411-424.

EDWARDS, B.S., DUBINSKY, E. y McDONALD, M.A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, **7**, pp. 15-25.

EISENBERG, Th. (1991). Functions and Associated Learning Difficulties, en *Avanced Mathematical Thinking* (ed. D. Tall). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

ENGLISH, L. D. (1997). Analogies, Metaphors and Images: Vehicles for Mathematical Reasoning en *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphores and Images* (ed. L.D. English). New Jersey: Lawrence Erlbaum

EUCLIDES. *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos, 2000

FALK, R., GASSNER, D., BEN-ZOOR, F. y BEN-SIMON, K. (1986). How do children cope with the infinity of numbers? *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 13-18.

FALK, R. y BEN-LAVY, Sh. (1989). How big is an infinite set? Exploration of children's ideas, *Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. **I**, 252-259.

FALK, R., (1994). Infinity: A Cognitive Challenge, *Theory & Psychology*, **4** (1), pp. 35-60.

FALK, R., GASSNER, D., BEN-ZOOR, F. y BEN-SIMON, K. (1986). How do children cope with the infinity of numbers? *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 13-18.

FAUCONNIER, G. y TURNER, M. (1998). *Rethinking Metaphor* en Cambridge Handbook of Metaphor and Thought (ed. R. Gibbs). Cambridge: Cambridge University Press

FERNÁNDEZ, E., SOLANO, I. y JIMÉNEZ, E. (2005). Sobre la divisibilidad hasta el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, volumen extra, 1-4.

FERRARI, E., LAGNA, G.A., LUZI, E. y TROVINI, E. (1995). Il concetto di infinito nell'intuizione matemática. *L'insegnamento della matemática e delle scienze integrate*, **18B** (3), pp. 212-236.

FERREIRÓS, J. (1992). *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854 - 1908*. Madrid: Ed. UAM

FILEP, L. (2001). The Genesis of Eudoxus's Infinity Lemma and Proportion Theory. *Proceedings Eigth Midwest Hist. Math. Conference*, pp. 1-9.

FILEP, L. (2003). Proportion Theory in Greek Mathematics. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, **19**, pp. 167-174.

FISCHBEIN, E. (1983). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, **3** (2), 9-18

FISCHBEIN, E. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), pp. 3-17.

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel Publ.

FISCHBEIN, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the learning of mathematics*, 9 (2), pp. 9-13.

FISCHBEIN, E. (1998). Intuition and Schemata in Mathematical Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, **38** (1/3), pp. 11-50.

FISCHBEIN, E. (2001). Tacit Models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, **48** (2/3), 309–329.

FISCHBEIN, E., JEHIAM, R. y COHEN, D. (1995). The concept of irrational numbers in highschool students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, **29**, pp. 29-44.

FISCHBEIN, E., TIROSH, D. y HESS, P. (1979). The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, **10**, pp. 3-40.

FONT, V. y ACEVEDO, J.I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, **21** (3), pp. 405-418.

FOX, D.J. (1981). *El proceso de investigación en Educación*. Navarra: EUNSA

FRANT, J.B., ACEVEDO, J. y FONT, V. (2006). Metaphors in Mathematics Classrooms: Analyzing the Dynamic Process of Teaching and Learning of Graph Functions. *Actas Cerme* **4**, pp. 82-91.

GALILEI, G. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Madrid: Editora Nacional, 1981

GARBIN, S. (2000). “Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16 – 17 años”. Tesis Doctoral. Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciènces Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.

GARBIN, S. (2005a). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, **8**, 2, pp. 169-193.

GARBIN, S. (2005b). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias*, **23** (1), pp. 61-80.

GARBIN, S. y AZCÁRATE, C. (2002). Infinito actual e inconsistencies: acerca de las incoherencies en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, **20** (1), pp. 87–113.

GARCÍA-MIGUEL, J.M. (2005). Verbos aspectuales en español. La interacción de significado verbal y significado construccional en *Estudos em Homenagem ao Profesor Mario Vilela* (coords. Rio-Torto, G.M. et al.), Vol. **1**, pp. 405-418.

GARDINER, T. (1985). Infinite processes in elementary mathematics. How much should we tell the children? *The Mathematical Gazette*, **69**, pp. 77-87.

GENTNER, D. y STEVENS, A.L. (1983). Mental Models. New Jersey: Lawrence Erlbaum Ass.

GILBERT, J. (1996). The role of intuitive rules in science and mathematics education. *European Journal of Teacher Education*, **19** (2), 109-120

GILBERT, Th. y ROUCHE, N. (2001). La notion d’infini. Paris: Ellipses Éditions

GLAESER, G. (1984). Réflexions préalable à une étude des obstacles, *Séminaire de Didactique des Mathématiques*. Grenoble: Laboratoire IMAG

GRATTAN-GUINNESS, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza.

GRAY, E., PITTA, D., PINTO, M. y TALL, D.O. (1999). Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **38** (1/3), pp. 111-133.

GRAY, E. Y TALL, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25** (2), pp. 115-141

GRAY, E. y TALL, D. (2001). Relationships between embodied objetcs and symbolics procets: an explanatory theory of succes and failure in mathematics. *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 65–72

GRAY, E., PINTO, M., PITTA, D., TALL, D. (1999). Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary and Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **38**, pp. 111-133.

GRÜNBAUM, A. (1969). Can an Infinitude of Operations be Perfomed in a Finite Time? *British Journal of Phil. Sci.* **20**, pp. 203-218

GRUPO AHA (1999). *Vers l’infini pas à pas. Bruselas*: De Boeck & Larcier.

GUBA, E.G. y LINCOLN, Y.S. (1982). Epostemological and methodological bases of naturalistic inquiry. *Educational Communication and Technology Journal*, **30** (4), pp. 233-252

HAHN, H. (1968). La crisis de la intuición en *Sigma. El mundo de las matemáticas* (ed. J.R. Newman), Vol. **5**, pp. 342-362.

HAREL, G. y SOWDER, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematics Thinking and Learning*, **7**, 27-50.

HAREL, G., SELDEN, A. y SELDEN, J. (2006). *Advanced mathematical thinking* en Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (eds. A. Gutiérrez y P. Boero), 147-172. Rotterdam: Sense Publishers.

HEATH, T.L. (1981). *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover

HOUDÉ, O., ZAGO, L., MELLET, E. ET AL. (2000). Shifting from the perceptual brain to the logical brain: the neural impact of cognitive inhibition training. *Journal of Cognitive Neuroscience*, **12** (5), pp. 721-728.

HOWE, K. y EISENHART, M. (1992). *Validity in educational research* en The handbook of qualitative research in education (eds. M. LeCompte, W. Millroy y J. Preissle), pp. 642-680. San Diego: Academia Press

JAHNKE, H.N. (2001). “Cantor’s cardinal and ordinal infinity”. *Educational Studies in Mathematics*, **48** (2-3), 175-197

JANVIER, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and Learning of mathematics.* New Jersey: Lawrence Erlbaum ass. Publishers.

JIROTKOVÁ, D. y LITTLER, G. (2003). Student’s Concept of Infinity in the Context of a Simple Geometrical Construct. *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. **3**, pp. 125-132.

JIROTKOVÁ, D. y LITTLER, G. (2004). Insight into pupils’ understanding of infinity in a geometrical context. *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. **3**, pp. 97-104.

JOHNSON, M. (1991). *El cuerpo en la mente*. Madrid: Debate.

JUTER, K. (2006). “Limits of Functions. University Student’s Concept Development”. Tesis doctoral. Department of Mathematics, Lulea University of Technology.

JUTER, K. (2005). Students’ Attitudes to Mathematics and Performance in Limits of Functions. *Mathematics Education Research Journal*, **17** (2), 91-110.

KERLINGER, F.N. (1982). *Foundations of Behavioral Research*. New Cork: Hol, Rinehart and Winston.

KILPATRICK, J., RICO, L. y SIERRA, M. (1994). *Educación matemática e investigación*. Madrid: Síntesis

KIM, D.J., SFARD, A. y FERRINI-MUNDY, J. (2005). Students’ Colloquial and Mathematical Discourses on Infinity and Limit. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. **3**, pp. 201-208.

KUHN, T. S. (1984). *La estructura de las revoluciones científicas*. Madrid: Fondo de Cultura Económica.

KLINE, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Vol. I. Madrid: Alianza

KRUGLANSKY y AJZEN (1983). Bias and error in human judgment. *European Journal of Social Psychology*, **13** (1), pp. 1-44.

LAKOFF, G. (1987). *Women, fire, and dangerous thing: What categories reveal about the mind*. Chicago and London: University of Chicago Press

LAKOFF, G. (2004). *No pienses en un elefante*. Madrid: Editorial Complutense

LAKOFF, G. y JOHNSON, M. (1980). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra

LAKOFF, G. y JOHNSON, M. (1999). *Philosophy in The Flesh: the Embodied Mind and its Challenge to Western Thought.* New York: Basic Books.

LAKOFF, G. y NÚÑEZ, R.E. (1997). The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics en *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphores and Images* (L.D. English Ed.). New Jersey: Lawrence Erlbaum

LAKOFF, G. y NÚÑEZ, R.E. (2000). *Where Mathematics Comes From?* New York: Basic Books.

LATORRE, A., DEL RINCÓN, D. y ARNAL, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: GR92

LEINO, A.L. y DRAKENBER, D. (1993). Metaphor: An educational perspectiva. *Research Bulletin*, 84. Department of Education, University of Helsinki

LEVY, T. (2001). Thabit ibn Qurra y el infinito numérico. *Investigación y Ciencia (Temas)*, **23** 14-17

LUCRECIO. *De la naturaleza de las cosas*. GARCÍA, A. (ed.). Madrid: Cátedra

MAMOLO, A. (2007). Infinite Magnitude vs Infinite Representation: Intuitions of "Infinite Numbers", *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Seoul, Corea. Disponible en <http://www.rume.org/crume2007/papers/mamolo.pdf>. Julio 2008

MAOR, E. (1991). *To infinity and Beyond*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press

MAURICE, L. (1996). Une genèse de l'idée d'infini. *Bulletin AMQ*, **36** (4), pp. 10-20.

McFARLANE, Th, J. (1999). *Nicholas of Cusa and the Infinite*. Disponible en <http://www.integralscience.org/**cusa**.html>

MONAGHAN, J. (1986). "Adolescents' Understanding of Limits and Infinity". Tesis Doctoral. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick, UK.

MONAGHAN, J. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, **48**, pp. 239-257.

MONTORO, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y Aprendizaje*, **28** (4), pp. 409-427.

MORENO, L.E. y WALDEG, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, pp. 211–231.

MURA, R. y MAURICE, L. (1997). L'infini, un Ensemble de Nombres? Enquête apures de Futurs Enseignants et Enseignantes. *For the Learning of Mathematics*, **17** (3), pp. 28-35.

NARAYANAN, S. S. (1997). Knowledge-based Action Representations for Metaphor and Aspect (KARMA). Tesis doctoral. University of California, Berkeley

NÚÑEZ, R. (1990). Infinity in Mathematics as a scientific subject for cognitive psychology. *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. **I**, pp. 77-84.

NÚÑEZ, R. (1993). Approaching infinity: a view from cognitive psychology. *Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, **1**, 015 – 111

NÚÑEZ, R. (1994). Subdivision and small infinites: Zeno, paradoxes and cognition. *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. **3**, pp. 368-375.

NÚÑEZ, R. (1997). Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales. *Educación Matemática*, **9** (1), pp. 20-32.

NÚÑEZ, R. (2000). Mathematical idea análysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Hiroshima, **1**, 3-22

NÚÑEZ, R. (2004a). Do Real Numbers Really Move? Language, Thought, and Gesture: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics en *Embodied Artificial Intelligence*, F. Iida et al. (Eds.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

NÚÑEZ, R. (2005). Creating mathematical infinites: Metaphor, blending, and the beauty of transfinite cardinals, *Journal of Pragmatics*, **37**, 1717 - 1741

NUÑEZ, R.E., EDWARDS, L.D. y MATOS, J.F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, **29**, pp. 45-65.

O'HALLORAN, K.L. (2003). Educational implications of mathematics as a multisemiotic discourse en *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (eds. Anderson, M., Sáenz-Ludlow, A., Zellweger, S. and Cifarelli, V. V.), pp. 185-214. Ottawa: Legas Publishing.

OUVRIER-BUFFET, C. (2002). An activity for constructing a definition, en *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the PME* (eds. A.d. Cockburn y E. Nardi), **4**, 25-32.

PAPERT, S. (1980). *Mindstorms*. Brighton: Harvester Press

PAULOS, J.A. (2001). Where Mathematics Comes From. *The American Scholar*, **70** (1), pp. 151-152.

PENALVA, M.C. (1996). “Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito”. Tesis doctoral. Departament de didàctica de la Matemàtica. Universitat de Valéncia

PENKONEN, E. y HANNULA, M.S. (2006). Infinity of Numbers: A Complex Concept to be Learnt? *Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *North American Chapter*, Vol. **2**, pp. 152-154.

PFEIFFER, R. y SCHEIER, C. (1999). Understanding Intelligence. London, UK: MIT Press

PIAGET, J. (1950). *Introduction à l'epostémologie génétique*. Paris: P.U.F. (También en español: Introducción a la epistemología genética. Buenos Aires: Paidós, 1979).

PIAGET, J. (1970). L'épistemologie génetique. Paris: P.U.F.

PIAGET, J. (1979). *La psicología de la inteligencia*. Buenos Aires: Editorial Psique

PIAGET, J., INHELDER, B. y SZEMINSKA, A. (1948). La géométrie spontanée de l'enfant. Paris: P.U.F.

PIAGET, J e INHELDER, B. (1948). *La representation de l'espace chez l'enfant* (Edición de 1981). Paris: Presses Universitaires de France (P.U.F.)

PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1983). *Psicogénesis e historia de las ciencias*. Méjico: Siglo XXI

PIMM, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul

PIMM, D. (1995). The advance party [Recensión del libro *Advanced Mathematical Thinking*]. *Educational Studies in Mathematics*, **29**, 97-122

PINDARO. *Odas y Fragmentos*. Madrid: Gredos, 1984.

PINTO, M.M.F. (1998). “Students' Understanding of Real Análisis”, Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Warwick.

POINCARÉ, H. *Sobre la ciencia y su método*. Madrid: Círculo de Lectores, 1997

POLYA, G. (1967). *La decouverte des Mathématiques*. París: Dunod.

POZO Y CARRETERO (1987). Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia? *Infancia y Aprendizaje*, **38**, pp. 35-52.

PRESMEG, N.C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **23**, pp. 595-610.

PRESMEG, N.C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning, en *Mathematical Reasoning: Analogies, metaphors, and images* (ed. L.D. English). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

PUTNAN, H. (1981). *Reason, Truth and History*. Cambridge: Cambridge University Press.

RASMUSSEN, C., ZANDIEDH, M., KING, K. y TEPPO, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, **7**, pp. 51-73.

RICHMAN, F. (1999). Is .999… = 1? *Mathematics Magazine*, **72** (5), pp. 404-408.

ROBERT, A. y SCHWARZENBERGER, R. (1991). Research in Teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level, en *Avanced Mathematical Thinking* (ed. D. Tall). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., pp. 127-139.

ROMERO i CHESA y AZCÁRATE, (1994). An enquiry into the concept images of the continuum trying a research tool. *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol, **2**, pp. 185-192.

RUCKER, R. (1995). *Infinity and the Mind*. New Jersey: Princeton University

RUSSELL B. (2001). *The problem of Infinity Considered Historically en Zeno's Paradoxes (Ed. por Salmon, W.C.)*. Hackett, Indianapolis/Cambridge

SACRISTÁN, A.I. (1991). Los obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos. *Educación Matemática*, **3** (1), 5-18

SALMON, W.C. (2001). *Zeno's Paradoxes.* Indianapolis/Cambridge: Hackett Publ.

SBARAGLI, S. (2003). Le convinzioni degli insegnanti elementary sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matemática e delle scienze integrate,* 1ª parte **26A** (2), pp. 155-186 y 2ª parte **26A** (5), pp. 573-588.

SBARAGLI, S. (2004). "Teacher' convictions on Mathematical Infinity". Tesis doctoral. Universidad de Bratislava. Disponible en <http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm>. Abril de 2006

SCHIRALLI, M. y SINCLAIR, N. (2003). A constructive response to "Where Mathematics Comes From". *Educational Studies in Mathematics*, **52**, pp. 79–91.

SCHWARZENBERGER, R.L.E. y TALL, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, **82**, pp. 44-49.

SELDEN, A. y SELDEN, J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, **7** (1), 1-13. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

SFARD, A. (1989). Transition from operacional to structural conception: the notion of function revisited. *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. **3**, pp. 151-158.

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, **22** (1), pp. 1-36.

SFARD, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, **14** (1), pp. 44-55.

SFARD, A. (1997). On Metaphorical Roots of Conceptual Growth en *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphores and Images* (ed. L.D. English). New Jersey: Lawrence Erlbaum

SIERPINSKA, A. y VIWEGIER, M. (1989). How & when attitudes towards mathematics & infinity become constituted into obstacles in students? *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 166-173.

SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **6** (1), pp. 5-67.

SIERPINSKA, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, **18**, pp. 371-397.

SIERPINSKA, A. (1989). *Sur un programme de recherché lié a la notion d'obstacle épistemologique* en Constructions de savoirs: Obstacles & Conflicts (eds. N. Berdnaz y C. Garnier). Ottawa, Canada: Agence d'Arc

SIERPINSKA, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London: the Falmer Press

SIERRA, R. (1988). *Técnicas de investigación social. Teoría y ejercicios*. Madrid: Paraninfo

SINGER, M. y VOICA, C. (2003). Perception of infinity: does it really help in problem solving? *Proceedings of the International Conference "TheDecidable and the Undecidable in Mathematics Education,* pp. 252-256. Brno, República Checa.

SKEMP, R.R. (1979). *Intelligence, Learning and Action*. Chichester: Wiley

SKEMP, R.R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. London: Peguin

SONDHEIMER, E.H. y ROGERSON, A. (1981). *Numbers and Infinity: A Historical Account of Mathematical Concepts.* Cambridge: Cambridge University Press.

SORENSEN, R. (2007). *Breve historia de la paradoja*. Barcelona: Tusquets

SPANOS, G., RHODES, N.C., DALE, T.C. y CRANDALL, J. (1988). Linguistic features of mathematical problem solving: Insights and applications, en *Linguistic and cultural influences on learning mathematics* (eds. R. Cocking y J. Mestre), pp. 221-240. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

STEFFE, L.P. y COBB, P. y Glasersfeld, E. (1988). *Construction of arithmetic meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.

STEWART, I. (1998). *De aquí al infinito*. Barcelona: Crítica.

TALL, D. (1980a). Mathematical Intuition, with special reference to limiting processes. *Proceedings of the 4th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 170-176.

TALL, D. (1980b). Intuitive infinitesimal in the calculus. *Abstracts of short communications, Fourth International Congress on Mathematical Education.* Berkeley

TALL, D. (1980c). The Notion of Infinite Measuring Number and Its Relevance in the Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, **11**, pp. 271-284.

TALL, D. (1981). Intuitions of Infinity. *Mathematics in School*, **10** (3), 30 – 33

TALL, D. (1986). Using the computer to represent calculus concepts. *Recueil des Textes et Comptes Rendus*, pp. 238-264. Le IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques, Orleáns (sesión plenaria).

TALL, D. (1988). Concept Image and Concept Definition. *Senior Secondary Mathematics Education*, (eds. J. de Lange y M. Doorman). Utrecht: OW&OC

TALL, D. (1991a). The Psychology of Advanced Matematical Thinking, en *Avanced Mathematical Thinking* (ed. D. Tall). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

TALL, D. (1991b). Intuition and rigour: The role of visualization in the Calculus, en *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (eds. W. Zimmermann y S. Cunningham), pp. 105-119, Washington: Mathematical Association of America.

TALL, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: function, limits, infinity, and proof en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ed. D.A. Grouws), pp. 495-511. Nueva York: Macmillan.

TALL, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking, en *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (eds. L. Meira y D. Carraher), Vol. **1**, pp. 61-75.

TALL, D. (2001a). A Child Thinking About Infinity, *Journal of Mathematical Behavior*, **20** (1), pp. 7-19.

TALL, D. (2001b). Natural and Formal Infinities, *Educational Studies in Mathematics*, **48** (2/3), 199-238.

TALL, D. (2004a). Building theories: the three worlds of mathematics, *For the Learning of Mathematics*, **24** (1), pp. 29-32.

TALL, D. (2004b). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceeding of the 28th conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. **4**, pp. 281-288.

TALL, D. (2004c). Three Worlds of Mathematics. Disponible en <http://www.warwick.ac.uk /staff/David.Tall/themes/three-worlds.html>. Noviembre de 2004.

TALL, D.O. (2006). A Theory of Mathematical Growth Through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **11**, pp. 195-215.

TALL, D. (2007a). Devoloping a Theory of Mathematical Growth. *International Reviews on Mathematical Education*, **39** (1-2), pp. 145-154.

TALL, D. (2007b). Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education. *10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, San Diego, California

TALL, D. y TIROSH, D. (2001). Infinity – the never-ending struggle. *Educational Studies in Mathematics*, **48** (2/3), pp. 199-238.

TALL, D. y VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12** (2), pp. 151-169.

TALMY, L. (1996). Fictive motion in language and “ception” en *Language and Space* (eds. P. Bloom et al.). Cambridge: MIT Press

THOMPSON, P.W. (1985). Experience, problems solving and learning mathematics: considerations in developing mathematics curricula en *Teaching and Learning Mathematics Problem Solving* (E. Silver Ed.). Hillsdale NJ: Erlbaum, pp. 189-236

TIROSH, D. (1990). Inconsistencies in students’ mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **12**, pp. 111-129.

TIROSH, D. (1996). Intuitive Rules and Subdivision Tasks in The role of intuitive rules in science and mathematics education (Symposium), *European Journal of Teacher Education*, **19** (2), 109 - 120

TIROSH, D. (1999). Finite and infinite sets: Definitions and intuitions. *International Journal of Mathematics in Science and Technology*, **30** (3), pp. 341-349.

TIROSH, D. y TSAMIR, P. (1996). The role of representations in students’ intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematics in Science and Technology*, **27** (1), pp. 33-40.

TIROSH, D, FISCHBEIN, E. y DOR, E. (1985). The Teaching of Infinity, *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 501-506.

TIROSH, D. y STAVY, R. (1993). Subdivision processes in mathematics and science. Journal of Research in Science Teaching, 30 (6), pp. 579-586.

TIROSH, D. y STAVY, R. (1996). Intuitive rules in science and mathematics: the case of “everything can be divided by two. *International Journal of Science Education*, **18** (6), pp. 669-683.

TSAMIR, P. y TIROSH, D. (1994). Comparing infinite sets: intuitions and representations. *Proceeding of the 28th conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. **4**, pp. 345-352.

TSAMIR, P. y TIROSH, D. (1999). Consistency and Represntations: The Case of Actual Infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, **30** (2), pp. 213-219.

TSAMIR, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite set: teaching prospective teachers, *Educational Studies in Mathematics*, **38**, 209-234

TSAMIR, P. (2001). When “The Same” is not perceived as such: The Case of Infinite Sets. *Educational Studies in Mathematics*, **48**, pp. 289-307.

TUCKMAN, B. (1972). *Conducting Educational Research*. New Cork: Harcourt Brace Jovanovich.

TURÉGANO, P. (1996). Intuición del infinito en estudiantes de primero de BUP, *Epsilon*, **34**, pp. 11-46.

UNDERWOOD, B.J. y SHAUGHRESSY, J.J. (1975). *Experimentation in psychology*. New York: Wiley

VAN HIELE, P.M. (1986). Structure and Insight. New York: Academic Press.

VARELA, F., THOMPSON, E. y ROSCH, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive and human experience*. Cambridge: MIT Press

VEEL, R. (1999). Language, knowledge and authority in school mathematics en *Pedagogy and the shaping of consciousness: Linguistic and social proceses* (ed. F. Christie), pp. 185-216. London: Continuum

VENDLER, Z. (1967). *Linguistic in philosophy*. Ithaca: Cornell University Press

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10** (2/3), pp. 133-170.

VIDAL, C. (2003). “Georg Cantor et la découverte des infinis”. Tesis de maestría, Universidad de París

VINNER, S. (1983a). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, **14** (3), pp. 293-305.

VINNER, S. (1983b). Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. *Proceeding of the 6th conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 24-28.

VINNER, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, en *Avanced Mathematical Thinking* (ed. D. Tall). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

VINNER, S. y DREYFUS, T. (1989). Image and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (4), pp. 356-366.

VINNER, S., HERSKOWITZ, R. y BRUCKHEIMER, M. (1981). Some cognitive factors as causes of mistakes in the addition of fractions. Journal for Research in Mathematics, **12**, pp. 70-77.

VOORHEES, B. (2004). Embodied Mathematics. *Journal of Consciousnes Studies*, **11** (9), pp. 83-88.

WALDEGG, G. (1987). "Esquemas de respuesta ante el infinito matemático: transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito". Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Méjico.

WALDEGG, G. (1993). La comparaison des ensambles infinis: un cas de resístanse à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, pp. 19-36.

WALDEGG, G. (1996). Identificación de obstáculos epistemológicos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, **1** (1), pp. 107-122.

WATSON, A. (2000). Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth. *Proceeding of the 26th conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 369-376.

WATSON, A. SPYROU, P. y TALL, D.O. (2003). The Relationship between Physcial Embodiment and Mathematical Symbolism: The Concept of Vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education,* **1**(2), pp. 73-79.

WELLER, K., BROWN, A., DUBINSKY, E. McDONALD, M. y STENGER, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the American Mathematical Society*, **51** (7), pp. 741 – 750. Disponible en <http://ams.org/notices/200407/fea-dubinsky.pdf>. Agosto de 2004.

WHEELER, M.M. y MARTÍN, W.G. (1987). Infinity Concepts among preservice elementary school teachers. *Proceeding of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 362-268.

WOOD, N.G. (1992). "Mathematical Analysis: a comparison of student development and historical development". Tesis doctoral. Cambridge University.

YAIR, Y. y YAIR, Y. (2004). Everything comes to an end: An intuitive rule in physics and mathematics. *Science Education*, **88** (4), pp. 594-609.

ZELLINI, P. (1991). *Breve historia del infinito*. Madrid: Siruela

ZIPPIN, L. (1996). *Usos del infinito*. Madrid: Euler Editorial

Índice analítico

A

abstracción, 41, 42, 47, 53-56, 74, 85, 214, 221, 242, 267, 287, 291, 298, 322, 327, 364, 372, 378, 386, 387, 402
abstracción empírica, 55, 56
abstracción reflexiva, 55, 56
acción, 12, 42, 46, 47, 56, 66, 74, 75, 81, 86, 87, 97, 98, 102, 105, 109, 165-168, 172, 237, 278, 322, 327, 339
Anaxágoras, 2, 8, 10, 35
Anaximandro, 2, 3
apeiron, 2, 7
APOE, 47, 48, 102, 115, 165, 166, 167, 168
Aristóteles, 2-14, 16, 18, 19, 25, 28, 31, 48, 59, 294
Arquímedes, 5, 6, 7, 20, 26, 34
Arrigo, G., 211, 236
aspecto imperfectivo, 86, 87, 89, 93
aspectual, 80, 86, 87, 95
autoevidencia, 59, 62, 64-67, 82
Azcárate, C., 42, 53, 134, 180, 236, 248, 279, 342

B

Bagni, G.T., 145, 227, 228,-229, 265
Bolzano, B., 29, 30, 32, 34, 35, 152, 155, 156, 234
Boyer, C., 31, 59
Bachelard, G., 106, 107, 109
Brousseau, G., 43, 106, 107, 109, 236
Bruner, J.S., 57, 59, 95

C

Camacho, M., 42, 53
Cantor, G., 16, 25, 28-37, 94, 127, 130-133, 144, 156, 233, 384, 395
cardinal, 34, 35, 46, 95, 118, 123, 129, 132, 133, 140, 142-144, 147, 156, 157, 160, 161, 210-213, 215, 220, 221, 227, 230, 232, 234, 247, 252, 279, 296, 305, 318, 327, 328, 337, 339, 344, 355, 357, 363, 383, 391, 396, 398
cardinalidad, 29, 32, 35, 133, 139, 142, 146
Cauchy, A.L., 15, 23, 26, 28, 29, 30, 31, 32
cinético, 120, 311, 320, 321, 334, 335, 349, 351, 368, 369, 389, 391
coercitividad, 65, 82
compresión, 78, 95, 97, 104, 105, 313, 314
conflicto cognitivo, 40, 51, 111, 146, 149, 207, 238, 244, 254, 264, 274, 280, 316, 405
conocimiento intuitivo, 61-65, 145, 174, 233, 234
conservación, 34, 122, 142, 156, 364
contexto, 32, 93, 96, 97, 102, 114, 115, 118, 122, 124, 125, 134-144, 152, 155-161, 165, 211, 312, 315-321, 324, 326, 329, 331, 335, 342-352, 355, 362, 363, 365, 368, 369, 375, 383-386, 390, 395
contradictorio, 19, 64, 66, 117, 118, 119, 121, 123, 135, 149, 155, 164
Cornu, B., 48, 49, 52, 55, 58, 107, 109, 166
corporeización, 46, 74-78, 85, 86, 97, 98, 100, 105, 115, 311-315, 320, 323, 324, 343, 386, 389, 404
corporeizada, 48, 74-77, 80, 81, 82, 85, 87, 86, 97, 98, 100-104, 314, 333, 391

D

D'Amore, B., 69, 113, 143, 211, 236
Davis, Ph. J., 50, 60, 61, 79
definición conceptual, 49, 50, 51, 53, 55, 310, 375
Dedekind, J.W., 23, 29, 32, 33, 34, 35
Demócrito, 2, 3, 5
Descartes, R., 22, 23, 24, 59
descomposición genética, 47
divisibilidad indefinida, 22, 116, 117, 125, 175, 177
Dreyfus, T., 41, 42, 53, 58
Dubinsky, E., 45, 47, 50, 55, 56, 74, 86, 123, 165, 166, 167, 171
Duroux, A., 107, 109
Duval, R., 48, 127, 152, 153, 155, 222, 270, 292, 296

E

Edwards, B.S., 43, 52, 75
efecto coercitivo, 65
emparejabilidad, 94
encapsulación, 45, 47, 48, 50, 55, 56, 74, 165, 166, 167, 168, 265, 312, 314, 315, 325
encapsulado, 48, 97, 167
equipotente, 145, 154
esquema conceptual, 39, 44, 45, 48, 49, 50-55, 65, 101, 111, 115, 134, 155-159, 173, 175, 180, 208-210, 213, 217, 230, 231, 238, 239, 244, 247, 249, 250, 253, 254, 259,

264, 266, 269, 274, 281, 283, 284, 295, 296, 304, 306, 307, 309, 310, 311, 314-317, 320-322, 324, 328, 331, 333, 337, 341, 350, 351, 355, 357, 360, 361, 366, 368, 371, 375, 379, 381, 404
esquema conceptual nivelar (ECN), *v*, *x*, 304, 308-311, 316, 317, 327, 330, 336, 340, 343, 344, 346, 349, 352, 354, 359, 372, 273, 374, 385, 386, 388, 395-399, 402-405
estabilidad, 66, 72, 75, 83, 119, 139, 176, 179, 207, 209, 211, 212, 213, 215, 217, 219, 220, 223, 224, 226, 230, 235, 237, 240, 245, 246, 248, 253, 254, 255, 257, 261, 262, 264, 269, 272, 275, 281, 282, 284, 286, 287, 289, 290, 291, 294, 298, 302, 307, 330, 346, 374, 389, 390
Euclides, 7, 8, 21, 30, 145, 146

F

Falk, R., 57, 115, 121, 124, 142, 150, 157, 211, 219, 221, 229, 254, 291, 300, 323, 392
finitista, 1, 4, 117-125, 132-136, 151, 161, 176, 210, 211, 219, 222, 223, 226, 230, 231, 239, 244, 247, 248, 253, 255, 256, 258, 259, 261, 262, 263, 264, 268, 271, 273, 277, 285, 286, 290, 291, 294, 298-302, 307, 310, 314, 317, 319, 321-326, 328, 332-334, 338, 341, 344, 350, 354, 356, 358, 374, 373, 374, 377, 379, 381, 383, 384, 386, 396, 397, 404, 405
Fischbein, E., 14, 33, 39, 59, 61, 62, 64, 66-73, 82, 115, 116-118, 122-128, 131, 139, 140, 146, 147, 149, 162, 174, 176, 207, 208, 211, 216, 218, 221, 223, 230, 231, 248, 250-252, 258, 262, 263, 266, 267, 271, 306, 307, 312, 314, 317, 324, 330
fuzzy-trace, 58

G

Galileo, 8, 20-23, 25, 27, 152, 168
Garbín, S., 134, 136, 174, 248, 251, 268, 278, 302, 314, 342
Gardiner, T., 113, 115, 246, 300, 302, 311
Gray, E., 44, 78, 123, 313
Grünbaum, A., 11, 15

H

Harel, G., 40, 43
Hersh, R., 60, 61
Hilbert, D, 26, 27, 38
hipótesis del continuo, 34

I

imagen mental, 46, 81, 110, 143, 313, 339, 351
inagotabilidad, 3, 5, 31, 127, 262, 266, 273, 302, 303, 306
incompletitud, 6, 37, 52, 62
incoherencia, 134, 135, 179
inconsistencia, 10, 135, 179
infinitista, 117-120, 122, 125, 151, 246, 258, 267, 271, 277, 290, 294, 298, 304, 306, 307, 310, 314, 317, 326, 327, 339, 354, 355, 356, 358, 375, 376, 379, 384, 397, 398, 399, 404, 405
infinito actual, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 16, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 28-34, 36, 38, 46, 59, 66, 88-93, 228, 238, 239, 247, 255, 262, 268, 271, 282, 284, 293, 296, 322, 356, 396, 398
infinito potencial, 3, 7, 9, 17, 18, 24, 28, 30, 31, 34, 46, 59, 90, 91, 93, 95, 118, 119, 121, 125, 126, 127, 130, 134, 136, 144-149, 151, 152, 155, 157, 158, 160, 166, 214, 223, 240, 244, 247, 250, 255, 257, 260, 262, 267, 268, 282, 288, 293, 294, 296, 301, 322-325, 336, 351, 397
interiorización, 44, 47, 55, 78, 165, 166, 385
intuición, 4, 5, 8, 9, 12, 21, 27, 31, 37, 57-68, 73, 94, 101, 113-120, 128, 129, 130, 133, 136, 139, 142, 147, 157, 165, 219, 221, 232, 243, 244, 250, 260, 261, 292, 297, 305, 311, 372, 402, 403
intuiciones primarias, 68, 208
intuiciones secundarias, 68

K

Kant, I., 24, 27, 37, 59, 60
Kronecker, L., 37

L

Lakoff, G., 39, 48, 54, 74-82, 84, 85, 86, 87, 89, 100, 101, 103, 166, 311, 313
Leibniz, G.W., 24, 25, 28, 31, 110

M

marco conceptual, 6, 17, 54
medida infinita, 115, 133
metáfora, 14, 39, 66, 69, 79-90, 94, 95, 100, 103, 115, 161, 162, 311, 312, 334, 337, 356, 378
Metáfora Básica del Infinito (MBI), 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 166
metáfora conceptual, 79, 80, 82-85, 88, 94, 95, 100
metáfora del espacio, 15, 312
metáforas vinculatorias, 84
met-before, 96, 100
mezcla conceptual, 84, 93, 94
modelo acotado-finito/no acotado-infinito, 241, 244, 245, 273, 274, 306, 409
modelo de aproximación, 290, 304, 306, 335, 409
modelo de divergencia, 270, 274, 277, 280, 281, 332, 346, 348, 360, 365, 412
modelo de indefinición, 219, 224, 241, 246, 254, 260, 274, 275, 280, 283, 284, 286, 290, 292, 339, 349, 362, 372, 294
modelo infinito = infinito, 219, 223, 228, 232, 235, 241, 243, 246, 246, 290, 291, 305, 307, 337, 362, 364, 383
modelo intuitivo, 39, 58, 64, 69, 70, 72, 126, 130, 131, 207, 208, 216, 219, 228, 229, 242, 247, 249, 262, 263, 267, 271, 279-282, 285, 290, 304, 306, 307, 342, 352, 353, 405
modelos mentales, 69, 126
modelo punto-marca, 232, 233, 239, 307
modelos tácitos, 57, 69, 70, 71, 126, 127, 28, 340, 356
Monaghan, J, 114, 115, 117, 122-124, 133, 139, 158, 161, 162, 211, 216, 218, 221, 241, 307, 338

N

Newton, I., 15, 25
Nicolás de Cusa, 19, 36, 168
Núñez, R., 39, 74, 75, 76, 79-87, 89, 93, 94, 100, 103, 115, 163-166, 251, 311, 313

O

obstáculo, 39, 41, 43, 52, 53, 63, 68, 96, 106-110, 118, 130, 142, 144, 151, 157, 214, 222, 228, 229, 233, 234, 236,

240, 255, 262, 264, 287, 290, 310, 311, 315, 316, 328, 329, 330, 340, 341, 356-360, 376-381, 386, 399-404
obstáculos didácticos, 108
obstáculos epistemológicos, 43, 55, 59, 106-109, 111, 124, 130, 131, 174, 211, 226, 315

P

paradoja, 10-14, 21, 23, 48, 114, 115, 124, 126, 134, 154, 164, 166, 251
patrones de evolución, 207, 213, 215, 219, 226, 233, 244, 245, 251, 254, 258, 261, 263, 269-272, 275, 279, 281, 285, 287, 290, 294, 299, 302, 307, 310, 385
Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), 40-44, 55, 59, 97, 103
Pensamiento Matemático Elemental (PME), 39-43
Piaget, J., 34, 39, 40, 47, 50, 54-59, 67, 70, 72, 73, 76, 94, 95, 106, 116-118, 124, 140, 142, 165, 248, 251
Pimm, D., 41, 103
procepto, 45, 46, 98, 99, 105, 312, 313

R

reificación, 74, 78
representación, 33, 42, 43, 48, 49, 53, 58, 61, 63, 64, 66, 70, 73, 80, 96, 99, 100, 105, 125, 134, 135, 143, 149, 156, 212, 214, 216, 218, 222, 227, 228, 234, 237, 238, 242, 243, 252, 256-258, 275, 279, 284, 288, 289, 296, 343, 345, 362, 365, 378, 384, 385, 392, 401, 402, 410, 413, 420

S

Sbaragli, S., 129, 143, 211, 216, 219, 229, 231, 236, 292, 297, 316
Schwarzenberger, R., 41, 55
Sfard, A., 44, 45, 50, 78, 79, 83, 103, 123
Sierpinska, A., 55, 120, 140, 143, 237, 312
simbólico, 45, 77, 98, 99, 100
sistema aspectual, 86, 87
Skemp, R.R., 40, 59
Sowder, L., 40, 43

T

Tall, D., 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 53, 54, 55, 74, 76, 77, 79, 95, 96, 97, 100-103, 110, 111, 113, 115, 116, 118, 120, 123, 131, 132, 133, 136, 137, 140, 158, 166, 208, 232, 236, 243, 265, 271, 272, 294, 311-315
temporal, *x*, 11, 30, 35, 86, 89, 128, 168, 169, 208, 209, 212, 235, 249, 260, 268, 277, 293, 297, 229, 310, 311, 312, 320-324, 334, 335, 336, 349, 350, 351, 368, 369, 387, 391, 324
Thâbit ibn-Qurra, 16
Tirosh, D., 115, 117, 118, 134, 135, 146, 148, 150, 211, 216, 218, 221, 229, 230, 233, 268, 271
Tsamir, P., 148, 149, 150, 211, 216, 218, 221, 229, 233, 268
Turégano, P., 125

V

van Hiele, P.M., 95
verbos imperfectivos, 86
verbos perfectivos, 86
Vinner, S., 39, 48-55, 111, 148, 158, 208, 216, 238, 311, 315, 321

W

Waldegg, G., 8, 32, 151, 155-157, 211, 216, 217, 221, 228, 229, 230, 234, 239, 240, 267, 292, 294, 29
Weierstrass, K., 26, 29, 31, 32, 34, 36, 37, 38

Z

Zenón, 3, 10-15, 115, 134, 164, 251, 312

APÉNDICE I: Cronograma de publicaciones sobre el concepto de infinito

Año	**Ámbito:** marco teórico	**Ámbito:** didáctica del infinito
1989		**How and when attitudes towards mathematics and infinity become constituted into obstacles in students?** A. Sierpinska y M. Viwegier **How big is an infinite set? Exploration of children's ideas** R. Falk y S. Ben-Lavy
1988		**Explicit Knowledge of Infinity** M.M. Wheeler et al.
1987	**Intuition in Science and Mathematics** E. Fischbein **Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics** C. Janvier (Ed.) **The Body in the Mind** M. Johnson	**Esquemas de respuesta ante el infinito matemático: transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito** G.C. Waldegg [Tesis]
1986		**How do children cope with the infinity of numbers?** R. Falk et al. **Adolescents' Understanding of Limits and Infinity** J. Monaghan [Tesis]
1985		**Infinite processes in elementary mathematics How much should we tell the children?** T. Gardiner **The Teaching of Infinity** D. Tirosh et al. **The intuition of infinity and its relevance for mathematical education** D. Tirosh [Tesis] **Errors in the enumeration of infinite sets** R. Borasi
1983	**Obstacles épistemologiques en mathématiques** G. Brousseau **Concept definitions and intuitions: the case of the tangent** S. Vinner	**L'obstacle du dedoublement des objets mathematiques** R. Duval
1982	**Intuition: How we Think and Act** T. Bastick	
1981	**Concept Image and Concept Definition in Mathematics** D. Tall y Sh. Vinner	**Intuitions of Infinity** D. Tall
1980	**Mathematical Intuition, whith Special Reference to Limiting Processes** D. Tall	**The notion of Infinite Measuring Number and Its Relevance in the Intuition of Infinity** D. Tall
1979		**The Intuition of Infinity** E. Fischbein, D. Tirosh y P. Hess
1978	**Conflicts in the learning of real numbers and limits** R.L.E. Schwarzenberger y D. Tall	**Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits** D. Tall y R.L. Schwarzenberger
1974	**Relevance of Education** *Cap. 5: Towards a Disciplined Intuition* J.S. Bruner	
1956	**The Crisis in Intuition** H. Hahn	
1948	**La representation de l'espace chez l'enfant** J. Piaget y B. Inhelder	

Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics E. Gray et al. **Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education** R. Núñez et al.	1999	**Consistency and Representations: The Case of Actual Infinity** P. Tsamir, D. Tirosh **Finite and infinite sets: Definitions and intuitions** D. Tirosh **The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers** P. Tsamir
Mathematics Education as a Research Domain: A Search for identity A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.)	1998	**Tacit Models and Infinity** E. Fischbein
What is the objet of the encapsulation of a process? G. Davis, D. Tall y M. Thomas **The Metaphorical Structure of Mathematics** G. Lakoff y R.E. Núñez **Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images** L.D. English (Ed.)	1997	**L'Infini, un Ensemble de Nombres? Enquête auprès de Futurs Enseignants** R. Mura y L. Maurice **L'infinito in didattica della matematica** B. D'Amore **Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: paradojas y espacios consensuales** R. Nuñez **Infinito Didactics of Infinity: Euclid's proof and Eratosthenes' sieve Prime numbers and potential infinity** G.T. Bagni
Intuitive Rules and Subdivision Tasks en The role of intuitive rules in science and mathematics education D. Tirosh	1996	**Estudio sobre la comprensión del concepto de numero cardinal de un conjunto infinito** C. Penalva [Tesis] **TG-14: Procesos infinitos en el currículum** ICME-8, Sevilla **Intuición del infinito en estudiantes de 1° de BUP** P. Turégano **Identificación de obstáculos epistemológicos en el estudio del infinito actual** G. Waldegg
Sémiosis et pensée humaine R. Duval **A theory of intellectual development** J. Confrey	1995	**Il concetto di infinito nell'intuizione matematica** E. Ferrari et al. **Comparing infinite sets: Effects of representations and order of presentation** D. Yehoshua [Tesis]
Reification as the Birth of Metaphor A. Sfard	1994	**Comparing infinite sets: intuitions and representations** D. Tirosh, P. Tsamir **Is infinity a whole number?** G. Shama, N. Movsshovitz-Hadar **Infinity: A Cognitive Challenge** R. Falk **Promoting students consistent responses in respect to their intuitions of actual infinity** P. Tsamir [Tesis]
The interaction between the formal and the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity E. Fischbein	1993	**Approaching infinity: a view from cognitive psychology** R. Núñez
Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning **Students' Difficulties in Calculus** D. Tall	1992	**The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof** D. Tall
Advanced Mathematical Thinking D. Tall (ed.) **On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins** A. Sfard	1991	**The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity** L.E. Moreno, G. Waldegg **The Role of Students' Intuition of Infinity in Teaching The Cantorian Theory** D. Tirosh
Advanced Mathematical Thinking T. Dreyfus	1990	**Infinity in Mathematics as a Scientific Subject for Cognitive Psychology** R.E. Nuñez

Ámbito: marco teórico

Ámbito: didáctica del infinito

2004

Reflecting on Post-Calculus-Reform
D. Tall, J.P. Mejía
Thinking through three worlds of mathematics
D. Tall
Do *Real* Numbers Really Move?
Language, Thought, and Gesture: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics
R. Núñez
Embodiment, Conceptual Linguistic and Geometry
L.D. Edwards
Building theories: the three worlds of matematics
D. Tall
Embodied Mathematics
B. Voorhees
Effect as a pivot between actions and symbols: the case of vector
A. Pointer [Tesis]

Intimations of Infinity
K. Weller et al.
What is this thing we call "infinity" A view from Cognitive Science
R. Núñez
Insight into pupils' understanding of infinity in a geometrical context
D. Jirotkova y G. Littler
Teacher' convictions on mathematical infinity
S. Sbaragli [Tesis]
Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor
G. Arrigo y B. D'Amore
Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets
T. Dreyfus
Everything comes to an end: An intuitive rule in physics and mathematics
Y. Yair

2003

A constructive response to "Where Mahtematics Comes From"
M. Schiralli y N. Sinclair
An Overview of Theories of Learning in Mathematics Education Research
J. Cottril
The Relationship between Physical Embodiment and Mathematical Symbolism
A. Watson et al.

Children's Conceptions of Infinity of Numbers in a Fifth Grade Classroom discussion Context
P. Boero, N. Douek, R. Garuti
Perception of infinity: does it really help in problem solving?
M. Singer, C. Voica
Le convinzioni degli insegnanti elementary sull'infinito matematico
S. Sbaragli
Intuitive Beliefs, Formal Definitions and Undefined Operations: Cases of Division by Zero
P. Tsamir y D. Tirosh

2002

Thinking through three worlds of mathematics
D. Tall
Intuitive Mathematics: Theoretical and Educational Implications
T. Ben-Zeev y J. Star
APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research
E. Dubinsky y M.A. McDonald

Natural and Formal Infinities
D. Tall
Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años
S. Garbin, C. Azcárate

2001

Relationship between embodied objects and symbolic procepts
D. Tall y E. Gray
Embodied Mathematics
J. Auslander

Young Peoples' Ideas of Infinity
J. Monaghan
Infinity - the never-ending struggle
D. Tall y D. Tirosh
When "The Same" is not perceived as such: The Case of Actual Infinity
P. Tsamir
Tacit Models and Infinity
E. Fischbein
Monográfico sobre el concepto de infinito
Educational Studies in Mathematics, 48 (2/3)

2000

Where Mathematics Comes From
G. Lakoff y R.E. Nuñez
Mathematical Idea Analysis: What Embodied Cognitive Science can say about The Human Nature of Mathematics
R. Núñez
Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth
A. Watson

The Basic Metaphor of Infinity
G. Lakoff, R.E. Núñez
Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16 - 17 años
S. Garbin [Tesis]

Ámbito: marco teórico

Ámbito: didáctica del infinito

2008

Step by step: Infinite Iterative Processes and Actual Infinity
A. Brown, M.A. McDonal y K. Weller
Between perception and intuition: Learning about infinity
F.M. Singer y C. Voica
Paradoxes as a window to infinity
A. Mamolo y R. Zazkis

2007

Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education
D. Tall
Procedural embodiment and magic in linear equations
R. Nogueira y D. Tall

2006

Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education
A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.)

A Theory of Mathematical Growth Through Embodiment, Symbolism and Proof
D. Tall

El “sentido de infinito”
B. D’Amore et al.
Infinity of Numbers: A Complex Concept to be Learnt?
E. Penkonen y M.S. Hannu la
The concept of infinity from K-12 to undergraduate
B. Klass-Tsirulnikov y Sh. Katz
Levels of students’ understanding on infinity
Hannula, M.S. et al.

2005

Advanced mathematical thinking at any age: Its nature and its development
G. Harel y L. Sowder
Perspectives on Advanced Mathematical Thinking
A. Selden y J. Selden
Advanced mathematical thinking
B.S. Edwards, E. Dubinsky, E. y M.A. McDonald
Verbos aspectuales en español. La interacción de significado verbal y significado construccional
J.M. García-Miguel

Some Historical Issues and Paradoxes Regardind the Concept of Infinity: An APOS-Based Analysis
E. Dubinsky et al.
Creating mathematical infinites: Metaphor, blending and the beauty of transfinite cardinals
R. Núñez
Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo
S. Garbin
¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos
S. Garbin
Student’s Colloquial and Mathematical Discourses of Infinity and Limit
D.J. Kim, A. Sfard y J. Ferrini-Mundy
Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios
V. Montoro
The Basic Metaphor of Infinity and the Concept of a Point
Y. Ueno
Sobre la divisibilidad hasta el infinito
E. Fernández e I. Solano

Ámbito: marco teórico

Ámbito: didáctica del infinito

APÉNDICE II: Cuestionarios de otros autores

THE INTUITION OF INFINITY
Fischbein, E., Tirosh, D. y Hess, P.
Educational Studies in Mathematics 1979. **10**. 3 - 40

(1) Dividimos el segmento AB en dos partes iguales (Figura 1). El punto H es el punto medio del segmento. A continuación dividimos AH y HB. Los puntos P y Q representan el punto medio de los segmentos AH y HB respectivamente. Continuamos dividiendo de la misma manera. Con cada división, los fragmentos se hacen cada vez más pequeños. Cuestión: ¿llegaremos a una situación tal que los fragmentos sean tan pequeños que seamos incapaces de dividirlos más? Explica tu respuesta.

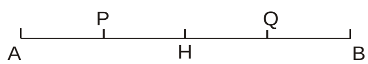


Fig. 1

(2) Consideremos de nuevo el segmento AB de la cuestión 1. Esta vez, en lugar de dividir el segmento en dos partes iguales, lo dividiremos en tres partes iguales (Figura 2). ¿Llegaremos a una situación tal que el segmento se tan pequeño que seamos capaces de continuar dividiéndolo? Explica tu respuesta.

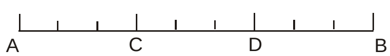


Fig. 2

(3a) Si la respuesta a la cuestión 2 es "si", ¿llegaremos a dicha situación antes que en la primera cuestión (donde dividíamos el segmento en dos partes iguales?. Explica tu respuesta.

(3b) AB y CD son segmentos de diferentes longitudes, tales que AB es más largo que CD (Figura 3). Dividimos el segmento AB y denominamos H_1 al punto medio. Dividimos el segmento CD y denominamos a su punto medio H_2. Diremos que H_1 y H_2 son *puntos correspondientes*. Continuamos dividiendo los segmentos resultantes. Denominaremos a los puntos medios de AH_1 y H_1B respectivamente P_1 y P_3 y P_2 y P_4 a los correspondientes a CH_2 y H_2D. P_1 se corresponde con P_2 y P_3 se corresponde con P_4. Cuestión: ¿llegaremos a una situación en la que para un punto de división sobre el segmento AB no haya más puntos correspondientes sobre el segmento CD? Explica tu respuesta.

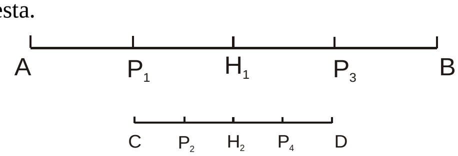
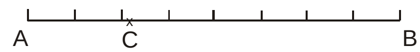


Fig. 3

(4) Considera el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ y el conjunto de los números pares $\mathbb{D} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Cuestión: ¿Cuál de los dos conjuntos contiene más elementos? Explica tu respuesta.

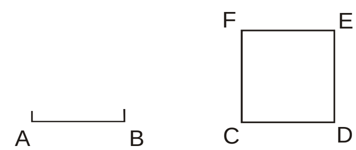
(5) C es un punto arbitrario sobre el segmento AB (Figura 4). Dividimos y subdivimos el segmento AB como lo hicimos en la cuestión 1. Cuestión: ¿llegaremos a una situación tal que uno de los puntos de división coincida con el punto C? Explica tu respuesta.



(6) Consideremos un segmento AB de longitud 1 cm y un cuadrado cuyo lado mide 1 cm (Figura 5). Cuestión: ¿Es posible

Fig. 4

encontrar un punto



correspondiente sobre el segmento para cada punto sobre el cuadrado? Explica tu respuesta.

Fig. 5

(7)
Consideremos un cuadrado y un cubo (Figura 6). Cuestión: ¿Es posible encontrar un punto correspondiente sobre el cuadrado para cada punto en el cubo? Explica tu respuesta. [En relación con las cuestiones 6 y 7, se añadieron algunas explicaciones verbales y gráficas con el fin de aclarar que las cuestiones se referían a una correspondencia uno a uno entre dos conjuntos]

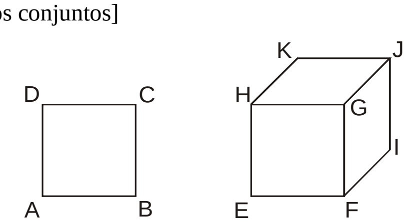


Fig. 6

(8a) Construimos un semicírculo con el segmento AB como diámetro. Dividimos AB en dos partes iguales, AC y CB y construimos dos semicírculos sobre AC y CB como se muestra en la Figura 7. Continuamos dividiendo y construyendo semicírculos (ver Figura 7). Cuestión: ¿qué le ocurre a la longitud de la línea ondulada a medida que acortamos la longitud de cada sub-segmento? Explica tu respuesta.

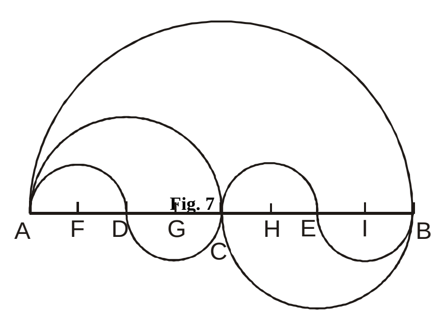


Fig. 7

(8b) ¿Qué ocurrirá con la *suma de las áreas* determinadas por los semicírculos a medida que acortamos la longitud de cada sub-segmento? Explica tu respuesta.

(9) Consideremos el rectángulo ABCD (Figura 8). Construimos nuevos rectángulos aumentando su longitud y disminuyendo su anchura de manera que su perímetro permanezca constante. ¿Qué le ocurre a las áreas de los rectángulos a medida que continúa el proceso?

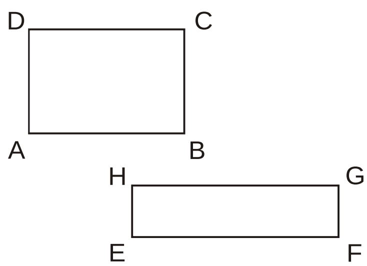


Fig. 8

(10a) ABC es un triángulo equilátero. Dividimos cada lado en dos partes iguales e indicamos sus puntos medios con A_1, B_1 y C_1. Consideremos el triángulo $A_1B_1C_1$ e indiquemos los puntos medios de sus lados con A_2, B_2 y C_2 (Figura 9). Continuamos el proceso de la misma manera. Cuestión: ¿llegará a un fin este proceso?

(10b) ¿Cuál será el área de la figura final?

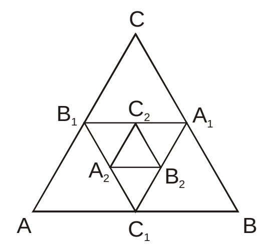


Fig. 9

L'OBSTACLE DE DEDOUBLEMENT DES OBJETS MATHEMATIQUES
Duval, R.
Educational Studies in Mathematics 1983, **14**, 385 - 414

Hoja 1

(1) ¿Qué significa para ti "infinito"? ¿Hay cosas que sean infinitas para ti?

(2) En la lista de los primero 70 números naturales, rodea los que son cuadrados de enteros (es decir, un número natural al cuadrado)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

(3) ¿Cuántos cuadrados de naturales hay en esta lista?

(4) Si se prolongase esta lista hasta

100	10.000	100.000.000

¿Cuántos cuadrados de naturales habrías rodeado?

- Si se consideran todos los números naturales,

	SI	NO	NO SE
- su cantidad es muy grande pero *finita*	□	□	□
- es infinita	□	□	□

Di porqué

- Si se consideran todos los cuadrados de naturales,

	SI	NO	NO SE
- su cantidad es muy grande pero finita	□	□	□
- es infinita	□	□	□

- *Entre todos los números enteros, sin límite*, hay

	SI	NO	NO SE
- mas números naturales que cuadrados	□	□	□
- tantos números naturales como cuadrados	□	□	□

Hoja 2

(1) Imagina una máquina que muestra los números naturales sin detenerse nunca. Imagina otra máquina que muestra los cuadrados de los naturales sin detenerse nunca:

Primera máquina: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

Segunda máquina: 1 4 9 16 25 36 49 64 81 …

- ¿Hay números tan grandes para los cuales la segunda máquina no pueda encontrar el cuadrado?
- ¿Por qué?
- ¿Cada número natural tiene su cuadrado?

(2) Si se compara el conjunto de todos los naturales {1, 2, 3, 4,...} con el conjunto de todos los cuadrados de los naturales {1, 4, 9, 16,...}

	VERDAD	FALSO	NO SE
- El conjunto de los números naturales tiene más elementos que el conjunto de los cuadrados	☐	☐	☐

- ¿Por qué?

	VERDAD	FALSO	NO SE
- El conjunto de los números naturales tiene tantos elementos como el conjunto de los cuadrados	☐	☐	☐

- ¿Por qué?

(3) Si se compara el conjunto de todos los naturales {1, 2, 3, 4,...} con el conjunto de todos los cuadrados de los naturales {2, 4, 6, 8,...}

	VERDAD	FALSO	NO SE
- El conjunto de los números naturales tiene más elementos que el conjunto de los pares	☐	☐	☐

- ¿Por qué?

	VERDAD	FALSO	NO SE
- El conjunto de los números naturales tiene tantos elementos como el conjunto de los pares	☐	☐	☐

- ¿Por qué?

THE ROLE OF REPRESENTATIONS IN STUDENT'S INTUITIVE THINKING ABOUT INFINITY
Tirosh, D. y Tsamir, P.
International Journal of Mathematics in Science and Technology 1996, **27**, 33 - 40

Las autoras presentan un cuestionario con diferentes representaciones de los conjuntos a comparar:

1. Representación Horizontal. Considera los siguientes conjuntos

   A = {1, 2, 3, 4, 5,…} B = {1, 4, 9, 16, 25,…}

   El números de elementos en A es mayor que / igual a / menor que el número de elementos en B. Explica tu respuesta.

2. Representación Vertical. Considera los conjuntos siguientes:

   A = {1, 2, 3, 4, 5,…}
   B = {1, 4, 9, 16, 25,…}

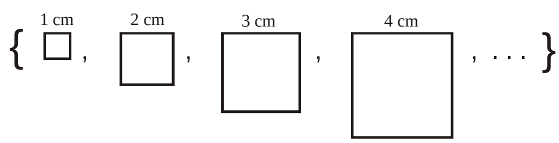
   El números de elementos en A es mayor que / igual a / menor que el número de elementos en B. Explica tu respuesta.

3. Representación Numérica-Explícita. Considera los conjuntos siguientes:

   A = {1, 2, 3, 4, 5,…}
   B = {1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2,…}

   El número de elementos en A es mayor que / igual a / menor que el número de elementos en B. Explica tu respuesta.

4. Representación Geométrica. Considera el conjunto infinito de cuadrados:



   El conjunto A son las longitudes de los lados (en cm.), es decir, A = {1, 2, 3, 4, 5,…}
   El conjunto B es el valor del área (en cm^2), es decir,
   B = {1, 4, 9, 16, 25,…}
   El números de elementos en A es mayor que / igual a / menor que el número de elementos en B. Explica tu respuesta.

INTUICIÓN DEL INFINITO EN ESTUDIANTES DE PRIMERO DE BUP
Turégano, P.
Epsilón, 1996, **34**, 11 - 46

Esta autora aplica un cuestionario análogo a Fischbein *et al.* (1979), del que utiliza los ítems 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9, e introduce tres cuestiones más:

Cuestión 9

Consideremos la serie de polígonos (figura 6). Cada vez que dibujamos un nuevo polígono, lo hacemos con un lado más.

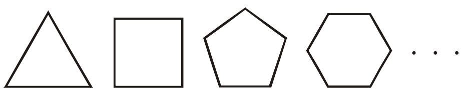


Fig. 6

Pregunta 9. ¿Tiene fin este proceso?. Explica tu respuesta.

Respuesta. CU09

Pregunta 10. ¿Podrías dibujar la "última figura"? Explica tu respuesta.

Respuesta. CU09

Cuestión 11

Consideremos el cuadrado ABCD (figura 8). Dividamos cada lado en dos partes iguales y llamamos a los puntos medios A_1, B_1, C_1, D_1. Uniendo estos puntos, obtenemos el cuadrado $A_1B_1C_1D_1$. Continuamos el proceso de la misma manera.

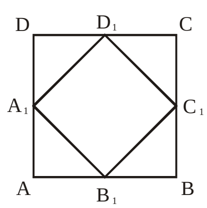


Fig. 8

Pregunta 15. ¿Tiene fin este proceso? Explica tu respuesta.

Respuesta. CU15

Pregunta 16. ¿Cuál será el área de la "última figura"?. Explica tu respuesta.

Respuesta. CU16

Cuestión 12

Consideremos la circunferencia de centro O y radio *r* (figura 9). Con el mismo centro, y añadiendo una unidad al radio anterior, trazamos una nueva circunferencia. Continuamos el proceso de la misma manera.

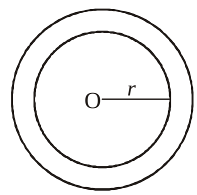


Fig. 9

Pregunta 17. ¿Tiene fin este proceso?. Explica tu respuesta.

Respuesta. CU17

Pregunta 18. ¿Cuál será el área de la "última figura"? Explica tu respuesta.

Respuesta. CU18

THE TRANSITION FROM COMPARISON OF FINITE TO THE COMPARISON OF INFINITE SET: TEACHING PROSPECTIVE TEACHERS
Tsamir, P.
Educational Studies in Mathematics, 1999, **38**, 209 - 234

Esta autorea plantea un cuestionario en el que futuros profesores deben comparar conjuntos tanto discretos como continuos tras haber recibido un curso específico de teoría de conjuntos:

Compara el número de elementos de los siguientes pares de conjuntos y explica tu respuesta:

Conjuntos a comparar *Número de elementos*

1) A = {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,...} B = {1, 2, 3, 4, 5, 6,...} igual / diferente

Explica tu respuesta: ____

2) E = {-1, -2, -3, -4, -5, -6,...} B = {1, 2, 3, 4, 5, 6,...} igual / diferente

Explica tu respuesta: ____

3) I = {2, 4, 6, 8, 10,...} J = {1, 4, 9, 16, 25,...} igual / diferente

Explica tu respuesta: ____

4) D = {1/n, n es un número natural} K = {0,3xyt... / todos los decimales racionales con 3 en las décimas} igual / diferente

Explica tu respuesta: ____

5) B = {1, 2, 3, 4, 5, 6,...} M = {Puntos sobre el segmento ST} igual / diferente

Explica tu respuesta: ____

6) T = {Puntos sobre una línea recta} M = {Puntos sobre un segmento de 7 cm} igual / diferente

Explica tu respuesta: ____

7) T = {Puntos sobre un círculo de radio 7 cm} H = {Puntos sobre un círculo de 10 cm} igual / diferente

Explica tu respuesta: ____

CONSISTENCY AND REPRESENTATIONS: THE CASE OF ACTUAL INFINITY
Tsamir, P. y Tirosh, D.
Journal for Research in Mathematics Education, 1999, **30** (2), 213 - 234

APPENDIX
The Infinite-Sets Activity

The infinite-sets activity is a three-phased didactic tool in which card activities are used to present students with two different infinite-sets representations, known to elicit incompatible solutions to the same problem. This activity uses a cognitive-teaching approach to encourage students' reflection on incompatibilities in their answers. The stages of the activity run as follows:

Stage I: Encouraging part-whole considerations

Instruction 1: "Take Card A. This card refers to the set of natural numbers. (a) Explain the meaning of the sign '...' at the right end of the card. (b) Are the numbers 987853, 1947, (-7), 22.5 also included in the set represented on this card?"

Card A:
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, ...}

Instruction 2: "Take Card L. (a) Circle the numbers divisible by 4. (b) Explain once again what the sign '...' at the right end of the card stands for. (c) Which of the following numbers belong on this card: 1246000, 1113, 16567, 4400080, 842?"

Card L:
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, ...}

Instruction 3: "Copy the numbers circled previously on a new empty card marked B."

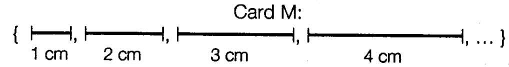
Card B:
{4, 8, 12, 16, 20, ...}

Instruction 4: "Card A contains the natural numbers. Card B contains the numbers divisible by 4. Are the numbers of elements on Cards A and B equal? Please explain your answer."

Stage II: Encouraging one-to-one correspondence considerations

Instruction 1: "The following card refers to an infinite set of segments. The first segment is 1 cm long, the second segment is 2 cm long, et cetera. Each segment is 1 cm longer than the previous one. Please write down on Card 1 the set of numbers that represent the lengths (in centimeters) of the segments described on this card."

Card M:

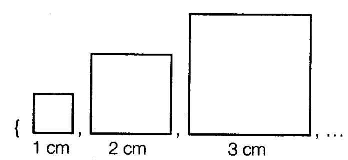


(Card 1 should look the same as the previous Card A.)

Instruction 2: "Imagine yourself trying to construct squares in such a way that the previous segments are the sides of the squares. In your opinion, (a) Is it possible to build more than one square for each segment? (b) If one side of a square is X cm, how long is its perimeter? Is this the only possible solution? (c) Given that the perimeter of a square is Y cm, how long are its sides? Is this the only possible solution?"

Instruction 3: "Consider a set of squares, each square using one segment from Card M for its side (see Cards M and T). How many squares are there? Is the number of squares equal to the number of segments?"

Card T:



Instruction 4: "Now, write down on Card 2 the set of numbers that represent the lengths (in cm) of the perimeters of these squares. In your opinion, are the numbers of elements on Cards 1 and 2 equal? Explain your answer." (Card 2 should look the same as the previous Card B.)

Stage III: Confronting the student with his or her inconsistent ideas

At this stage, Cards A, B, 1, and 2 are laid out in front of the student to encourage him or her to notice the identity of (a) Cards A and 1 and (b) Cards B and 2. He or she is then asked to explain his or her conceptions about the consistency in his or her solutions to the problems presented in the previous stages.

THE CONCEPTUAL EVOLUTION OF ACTUAL MATHEMATICAL INFINITY
Moreno, L.E. y Waldegg, G.
Educational Studies in Mathematics, 1991, **22**, 211 - 231

Cuestionario 1

PARTE UNO

1. Rodea los números que sean cuadrados perfectos en la siguiente lista.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

2. ¿Cuántos cuadrados hay en la lista?

3. Si continuamos la lista hasta: 100, 10 000, 1 000 000 000, ¿cuántos cuadrados hay en cada caso?

CUESTIONES 4 A 6. RODEA LA RESPUESTA CORRECTA

4. Si tomamos todos los números naturales, la cantidad es muy grande, pero

finita SI NO NO SE
infinita SI NO NO SE
Explica tu respuesta

5. Si tomamos todos los cuadrados perfectos, la cantidad es muy grande, pero

finita SI NO NO SE
infinita SI NO NO SE
Explica tu respuesta

6. Piensa en *todos* los números naturales

Hay más números naturales que cuadrados SI NO NO SE
Hay tantos naturales como cuadrados SI NO NO SE
Explica tu respuesta

PARTE DOS

Imagina una máquina que produce número naturales y nunca para.
Imagina otra mágina que produce cuadrados y nunca para.

Primera máquina:	1	2	3	4	5	6	7	. . .
Segunda máquina:	1	4	9	16	25	36	49	. . .

7. ¿Hay números tan grandes que la segunda máquina no pueda hallar su cuadrado

Hay más números naturales que cuadrados SI NO NO SE
Hay tantos naturales como cuadrados SI NO NO SE
Explica tu respuesta

8. ¿Tiene cuadrado cada número natural? Explica tu respuesta.

Si compararas el conjunto el conjunto de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5,... con el conjunto de los cuadrados 1, 4, 9, 16, 25, ...

9. ¿Tendría el conjunto de los números naturales más elementos que el conjunto de los cuadrados?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

10. ¿Tendría el conjunto de los números naturales tantos elementos como el conjunto de los cuadrados?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

Si compararas el conjunto de todos los números naturales 1, 2, 3, 4, 5,... con el conjunto de los números pares 2, 4, 6, 8, ...

11. ¿Tendría el conjunto de los números naturales más elementos que el conjunto de los números pares?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

12. ¿Tendría el conjunto de los números naturales tantos elementos como el conjunto de los números pares?
SI NO NO SE

Explica tu respuesta

Cuestionario II

RESPONDE A LAS CUESTIONES SIGUIENTES RODEANDO LA RESPUESTA CORRECTA

Observa el segmento AB que mide 4 centímetros de longitud y el segmento CD que mide 6 centímetros (Figura 1)

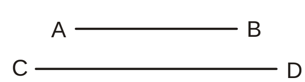


Fig. 1

1. ¿Crees que ambos segmentos están constituidos por puntos?
SI NO NO SE

2. Si tu respuesta es "SI", ¿habrá un número muy grande, pero
finito, de puntos en AB? SI NO NO SE
pero infinito de puntos? SI NO NO SE

3. Si compararas los puntos del segmento AB con los puntos del segmento CD
¿Tiene CD más puntos que AB? SI NO NO SE
¿Tiene CD tantos puntos como AB? SI NO NO SE

Observa de nuevo los segmentos AB y CD. Trazamos la líneas de puntos CA y DB que se cortan en O. Sea P cualquier punto sobre CD, dibujando PO determinamos el punto P' sobre AB (Figura 2)

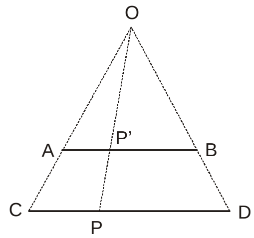


Fig. 2

4. Para cada punto sobre CD, ¿hay un punto sobre AB determinado de esta manera?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

5. Para cada punto sobre AB, ¿hay un punto sobre CD?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

6. ¿Tiene todos los puntos sobre CD su correspondiente sobre AB?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

7. ¿Tiene todos los puntos sobre AB su correspondiente sobre CD?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

8. ¿Tiene CD más puntos que AB? SI NO NO SE
Explica tu respuesta

9. ¿Tiene CD tantos puntos como AB? SI NO NO SE
Explica tu respuesta

Observa el segmento AB que mide 1 centímetro de longitud y el cuadrado C cuyo lado mide 1 centímetro (Figura 3)

Fig. 3

10. ¿Por cada punto en AB hay un punto en C?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

11. ¿Por cada punto en C hay un punto en AB?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

12. ¿Tiene C más puntos que AB?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

13. ¿Tiene C tantos puntos como AB?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

Cuestionario III

RESPONDE A LAS CUESTIONES SIGUIENTES RODEANDO LA RESPUESTA CORRECTA

Observa el conjunto

$$A = \{x \in \Re / 0 \le x \le 1\}$$

Este conjunto es el intervalo [0, 1]. Ahora, definimos el conjunto

$$B = \{y / y = 2x, \; x \in A\}$$

En el conjunto B, cada elementos "*x*" de A se recoloca en la posición 2*x* sobre la recta numérica (Figura 4).

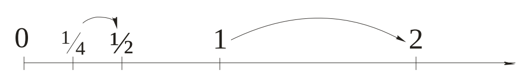


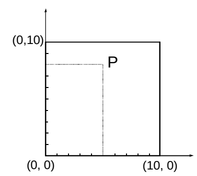
Fig. 4

Así, 0 no cambia de posición, ¼ cambia a ½, 1 cambia a 2, etc.
1. ¿Tiene el conjunto B todos los puntos del intervalo [0, 2]?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

2. ¿Tienen los conjuntos A y B el mismo número de elementos?
SI NO NO SE
Explica tu respuesta

IL CONCETTO DI INFINITO NELL'INTUIZIONE MATEMATICA
Ferrari, E. et al.
L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 1995, **188** (3), 212 - 236

1. Al punto P corresponde la pareja de números (5, 8). ¿Cuántas parejas de números enteros o decimales se encuentran en el cuadrado representado en la figura?



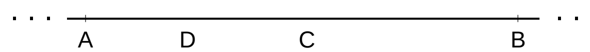
a) tantas parejas como queramos
b) 100 parejas
c) 121 parejas
d) 10 000 parejas

2. ¿Se puede dividir un segmento de 20 cm de longitud en 10 000 partes iguales?
a) sí, en cualquier número de partes y aún queda un segmento
b) sí, en cualquier número de partes y se reduce a un punto
c) no, porque el segmento es muy corto respecto al número de partes
d) no, porque cualquier segmento tiene una medida finita

3. La fracción generatriz de 0.3 es $\frac{3}{10}$; la fracción generatriz de $0,\widehat{1}$ es $\frac{1}{9}$. ¿Cuál es la fracción generatriz de π?
a) $\frac{314}{100}$
b) no es posible determinarla porque π es un decimal ilimitado noperiódico
c) no es posible determinarla porque π es un decimal ilimitado
d) $\frac{157}{50}$

4. El número 9 es el número entero más grande menor que 10. ¿Cuál es el número decimal más grande menor que 1?
a) no existe
b) 0.9
c) 0.99999
d) $0,\widehat{9}$

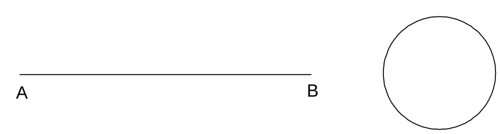
5. Sea *r* la recta definida por dos puntos distintos A y B. Entonces es posible encontrar un punto C entre A y B, un punto D entre A y C… ¿Cuántas veces es posible repetir este proceso?



a) depende de dónde se ponga el punto C
b) tantas veces como se quiera
c) termina cuando se alcance el punto A
d) no se puede responder porque no se conoce la medida de AB

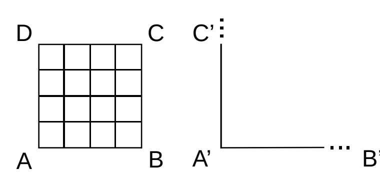
6. ¿Es infinito el conjunto de los números naturales?
a) no, porque una calculadora potente podría escribirlos todos
b) no, porque existe un número más pequeño que de todos los otros
c) sí, porque no existe un número más grande que de todos los otros
d) sí, porque es posible enumerar todos los elementos del conjunto

7. Considera una circunferencia de 10 cm de longitud y un segmento de 8 cm de longitud



a) hay más puntos en la circunferencia que en el segmento
b) hay un punto más en el segmento porque en la circunferencia coinciden los extremos
c) segmento y circunferencia no tienen el mismo número de puntos porque tienen longitudes diferentes
d) en ambos hay infinitos puntos

8. El cuadrado de la figura está recubierto por 16



cuadraditos. Para recubrir un ángulo recto, ¿cuántos cuadraditos nos sirven?

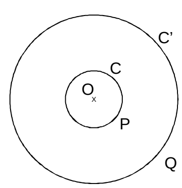
a) no existe un número de cuadraditos que permita reconstruir todo el ángulo
b) depende del ángulo considerado
c) tantos como nos sirvan para el cuadrado
d) 7

9. Considera los números: π $\quad 3,\overline{47}$ $\quad 1{,}15$
a) los tres números tienen infinias cifras decimales diferentes de cero
b) sólo π tiene infinitas cifras decimales diferentes de cero
c) cualquiera de estos números tiene dos cifras decimales
d) sólo el tercer número tiene un número finito de cifras decimales

10. En los números naturales el siguiente de 4 (aquel número que viene inmediatamente después de 4) es 5. En los números decimales, ¿cuál es el número que viene inmediatamente después de 3,5?
a) 3,6
b) 4,5
c) 3,51
d) no existe

11. $\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{2}{4} = 0{,}5 \qquad \frac{3}{6} = 0{,}5 \quad \ldots$ ¿Cuántas fracciones equivalen al número decimal 0,5?
a) 50
b) 1 000
c) tantas como números naturales hay
d) ninguna de las respuestas anteriores es correcta

12. Observando las dos circunferencias de la figura se puede decir que:

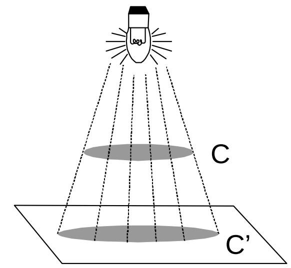


OQ = 3OP

a) C y C' tienen el mismo número de puntos
b) el número de puntos de C es un tercio del número de puntos de C'
c) la longitud de C' es el doble que la de C
d) C tiene menos puntos que C'

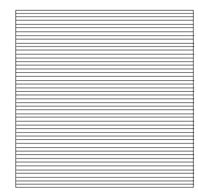
13. Si dividimos por la mitad 10 se obtiene 5; si dividimos por la mitad 5 se obtiene 2,5; …
¿Cuántas veces se puede repetir esta operación?
a) un número par de veces
b) es un procedimiento que no termina
c) 10 veces
d) hasta que se obtenga cero

14. Comparando los puntos del círculo C con los de su sombra C' podemos decir que:
a) los puntos de C' son el doble de los de C'
b) no se pueden comparar el número de puntos de C y C' porque no se conocen sus áreas



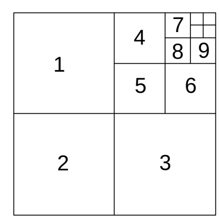
c) los puntos de C son un número inferior a los de C'
d) los dos círculos tienen un número igual de puntos

15. ¿Cuántos segmentos del tipo ilustrado en la figura se necesitan para recubrir todo el cuadrado?



a) infinitos
b) no es posible decir cuántos segmentos se necesitan porque aun utilizando infinitos segmentos siempre queda espacio en blanco
c) depende de la dimensión del cuadrado
d) un millón de segmentos es suficiente

16. Subdividimos un cuadrado de lado 5 cm en 4 cuadrados iguales; subdividimos el cuadrado superior a la derecha en otros 4 cuadrados iguales; subdividimos el cuadrado superior a la derecha en otros 4 cuadrados iguales; y así mientras sea posible. Obtenemos de esta manera una figura con muchos cuadrados de área diferente. ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener prosiguiendo con el procedimiento descrito?



a) infinitos
b) un número finito porque la suma de las áreas de todos los cuadrados es 25 cm^2
c) 13
d) no se puede calcular el número pedido porque los lados del último cuadrado son demasiados pequeños

17. Dados los conjuntos

A = conjunto de los números con dos cifras decimales comprendidos entre 0 y 10
B = conjunto de los números decimales limitados comprendidos entre 0 y 10

se puede decir

a) no se pueden enumerar todos los elementos ni del conjunto A ni del conjunto B
b) los elementos de A se puede enumerar pero los de B no
c) se pueden enumerar todos los elementos tanto del conjunto A como del B
d) los elementos de B se pueden enumerar todos pero los de A no

18. ¿Cuántas palabras pronuncia una persona durante toda su vida?
a) infinitas
b) un millón
c) un número finito difícil de determinar
d) no es correcta ninguna de las respuestas anteriores

19. Considera los números: $2.\overline{35}$, $2.3\overline{5}$, $2{,}35$. ¿Cuál de las siguientes ordenaciones es correcta?

a) $2.\overline{35} < 2.3\overline{5} < 2{,}35$

b) $2{,}35 < 2.\overline{35} < 2.3\overline{5}$

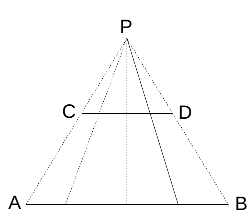
c) $2{,}35 < 2.3\overline{5} < 2.\overline{35}$

d) $2.\overline{35} < 2{,}35 < 2.3\overline{5}$

20. La última cifra decimal de 7,351 es 1. ¿Qué puedes decir del número $6{,}\widehat{3}$?
a) la última cifra es 3 y está precedida de un número finito de cifras todas iguales entre ellas
b) no hay una última cifra
c) la última cifra es 3 y está precedida de infinitas cifras
d) no es correcta ninguna de las respuestas anteriores

21. ¿Qué se puede decir de los dos números $1,\overline{52}$ y $1{,}5\overline{25}$?
a) son iguales porque cada uno de ellos es igual a 1,525252…
b) son diferentes porque en el segundo hay un antiperiodo
c) son diferentes porque el periodo no está constituido por los mismos números
d) parecen iguales, pero en el segundo la cifra 5 se encuentra más al final

22. Considerados los segmentos AB y CD con AB de longitud 4 cm y CD 2 cm se puede decir que



AB = 2CD

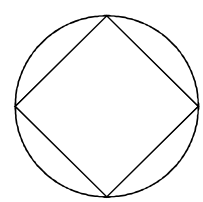
a) CD tiene más puntos que AB
b) no se pueden comparar el número de puntos de ambos segmentos sino sólo la longitud
c) los puntos de CD son tantos como los de AB
d) AB tiene más puntos que CD

23. Dado un segmento AB de longitud 2 cm, se puede decir que:
a) puesto que la longitud de AB es de 2 cm, el segmento contiene un número finito de puntos
b) aunque la longitud del segmento AB sea finita, el número de puntos contenido en AB es infinito
c) si se excluyen los extremos de A y B disminuye la longitud del segmento
d) el segmento AB contiene sólo dos puntos (A y B)

24. Dividiendo 5 por 0,1, por 0,01, por 0,001, por 0,0001, etc, obtenemos:
a) números menores que 5 cada vez más pequeños
b) números decimales comprendidos entre 0 y 1
c) números mayores que 5 cada vez más grandes
d) números decimales comprendidos entre 1 y 5

25. Dado un segmento AB, de cuántas maneras es posible dividirlos en dos segmentos tales que su suma de AB?
a) depende de la longitud del segmento
b) de una sóla manera, eligiendo el punto medio
c) de infinitos modos
d) de un número muy grande de maneras (pero finito)

26. Si se divide la circunferencia en cuatro arcos iguales, como en la figura, se obtienen los cuatro vértices de un cuadrado inscrito; dividiendo posteriormente cada arco se obtiene un octógono regular y así sucesivamente. Se puede afirmar que:



a) cuando el número de lados es superior a mil, el procedimiento termina porque el polígono se convierte en una circunferencia
b) este procedimiento no termina porque se puede obtener tantos polígonos regulares como queramos
c) el número de lados de los polígonos que se pueden inscribir depende de la medida de la circunferencia
d) el procedimiento termina cuando ya no se puede dividir más por la mitad los arcos

INTUITIVE RULES AND SUBDIVISION TASKS IN THE ROLE OF INTUITIVE RULES IN SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCACION
Tirosh, D.
European Journal of Teacher Education, 1996, **19** (2), 109 - 120

A. Tareas de división repetida.

División sucesiva

1. Considera un rectángulo. Divídelo en dos rectángulos iguales. Divide uno de los rectangulos en dos rectángulos iguales. Continúa dividiendo de la misma manera.
¿Llegará a un fin este proceso? Si / No. Explica tu respuesta

2. Considera una pieza rectangular de aluminio. Divídelo en dos partes iguales. Divide una de las mitades en dos partes iguales. Continúa dividiendo de la misma manera.
¿Llegará a un fin este proceso? Si / No. Explica tu respuesta

División sucesiva con suma

3. Considera un segmento. Añade a este segmento otro segmento cuyo tamaño sea la mitad del primero. Continúa añadiendo de la misma manera.
¿Llegará a un fin este proceso? Si / No. Explica tu respuesta

4. Considera un hilo de cobre. Añade a este hilo de cobre otro cuyo tamaño sea la mitad del primero. Añade de nuevo otro hilo de cobre de tamaño la mitad que el anterior. Continúa añadiendo de la misma manera.
¿Llegará a un fin este proceso? Si / No. Explica tu respuesta

B. Tareas de seriación.

5. Considera la siguiente serie:

$$1 – ½ - ¼ - 1/8 – 1/16 – 1/32 – 1/64 – 1/128 ...$$

En esta serie cada número es la mitad del anterior.

¿Llegará a un fin este proceso de dividir números? Si / No.
Explica tu respuesta

6. Se echa una cucharilla de azucar en una copa de agua y se disuelve en él. Se extrae la mitad de la mezcla de agua y azucar y se añade la mitad de una copa de agua mezclándola con el agua y azucar que quedaba. Este proceso se repite de nuevo: la mitad de la mezcla se extrae y se añade la mitad de agua. El proceso se repite sucesivamente.

¿Es posible alcanzar un estado en el que no quede azucar en la copa? Si / No
Explica tu respuesta

ESTUDIO SOBRE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO CARDINAL DE UN CONJUNTO INFINITO
Penalva, M.C. (1996)
Tesis no publicada, 1996, Universidad de Valencia

Guión de la entrevista (semiestructurada) a los profesores:

1. Explica en qué situaciones y de qué forma utilizas en tus clases conjuntos infinitos
2. ¿Has observado en los alumnos dificultades de aprendizaje de los conceptos relacionados con los conjuntos infinitos?
3. ¿Has detectado en los alumnos concepciones o ideas asociadas a los conjuntos infinitos?
4. Cuando tú personalmente reflexionas sobre nociones relativas a los conjuntos infinitos, ¿tienes alguna imagen o idea asociada a dichas nociones?

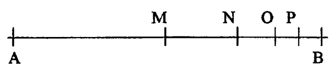
Guión de la entrevista (semiestructurada) a los estudiantes:

1. Explica si te resulta conocida la palabra infinito
2. ¿Has utilizado la palabra infinito alguna vez?, ¿en qué situaciones?
3. Di palabras asociadas a infinito
4. Describe con tus propias palabras lo que entiendes por infinito
5. ¿Conoces ejemplos de conjuntos infinitos?, ¿cuáles?
6. Cita ahora conjuntos que no sean infinitos
7. Acabas de dar ejemplos de conjuntos infinitos y de conjuntos finitos, trata de encontrar alguna propiedad o propiedades que caractericen a los conjuntos finitos.
8. Justifica si esa condición la cumplen los conjuntos finitos.
9. Trata de dar una posible definición de conjunto infinito
10. Has dado como ejemplos de conjuntos infinitos: N, Z, Q y R,... Explica si se pueden comparar o relacionar esos conjuntos infinitos
11. Aclara cómo se puede hacer esa comparación
12. Razona si todos los conjuntos infinitos son comparables mediante el criterio que has indicado
13. Piensa si esa relación produce una clasificación de los conjuntos infinitos
14. Amplía un poco más tu respuesta indicando si se producen o no distintos tipos de conjuntos infinitos
15. Reflexiona sobre los conjuntos infinitos, ¿podrías ahora explicar alguna propiedad que caracterice a los conjuntos infinitos?
16. Cita de nuevo conjuntos infinitos y comprueba si cumplen o no esa propiedad
17. ¿Por qué decimos que N es infinito?

INFINITO ACTUAL E INCONSISTENCIAS: ACERCA DE LAS INCOHERENCIAS EN LOS ESQUEMAS CONCEPTUALES DE ALUMNOS DE 16-17 AÑOS
Garbín, S.
Enseñanza de las Ciencias, 2002, **20** (1), 87 - 113

Cuestionario C_1

1.- Observa la siguiente figura.
Nos muestra un esquema en el que se biseca cada vez el segmento de la derecha, es decir los puntos M,N,O,P, son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.



Si se siguen haciendo más y más bisecciones.
¿Crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B?.
Explica tu respuesta.

2.- Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura h/2.
¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota?. Explica tu respuesta.
¿Podrías decir cuantos rebotes hará la pelota?. Explica tu respuesta.

3.- Considera la siguiente suma

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + \ldots$$

¿Cuál crees que es el valor de esta suma?. Explica tu respuesta.

Cuestionario C_2

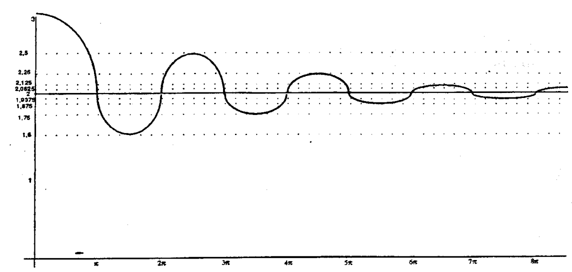
Segundo cuestionario

Tienes el cuestionario que tu mismo/a has contestado:
a) Usando un bolígrafo rojo puedes ahora corregir o completar tus respuestas.
Si corriges o completas, explica por qué lo haces y, en caso que no lo hagas, explica también el motivo.
(Si no habías contestado alguna de las prguntas inténtalo ahora.)

La respuesta que das a cada pregunta, ¿crees que es la única respuesta posible?

b) ¿Encuentras que existe alguna relación o conexión entre las preguntas? ¿Y entre las respuestas? Explícalo.

4.- La siguiente figura representa la gráfica de una función.



Describe lo que pasa con la función para valores muy grandes de x. ¿Podrías determinar el valor de la función cuando x se hace muy grande?. Explica tu respuesta.

5.- Considera la siguiente ecuación:

$$y = 1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots + 1/2^n + \ldots$$

¿Podrías decir para qué valor de n resulta y = 2? Explica tu respuesta.

YOUNG PEOPLE' IDEAS OF INFINITY
Monaghan, J.
Educational Studies in Mathematics, 2001, **48**, 239 - 257

TABLE I

Does the sequence 1, 0, 0.1, 0, 0.01, ... have a limit?		Does this curve have 0 as a limit?	
Yes	79	Yes	133
unsure	20	unsure	11
No	91	No	46

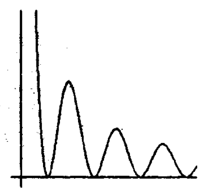


TABLE II

Counting		Measuring	
Consider the two sequences of numbers 1, 2, 3, 4, ... and 2, 4, 6, 8, ... Are there:		Consider all the decimal numbers between 0 and 1 and all the decimal numbers between 0 and 10. Are there:	
more in the first row	31	more between 0 and 1	1
more in the second row	4	more between 0 and 10	79
same in both	86	same in both	48
can't compare	66	can't compare	60

TABLE III

	Yes	?	No
1) Can you add 1 + 1 + 1 + ... (the dots indicate continuation) and get an answer?	56	7	127
2) Can you add 0.1 + 0.01 + 0.001 + ... (the dots indicate continuation) and get an answer?	85	5	100
3) Just as we often write $\frac{1}{3}$ as $0.\dot{3}$, we can write $\frac{1}{9}$ as $0.\dot{1}$. Can $^{1}/_{9}$ be defined as 0.1 + 0.01 + 0.001 + ... ?	144	19	27

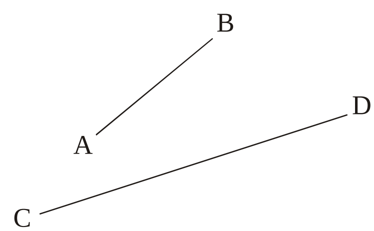
TEACHER' CONVICTIONS ON MATHEMATICAL INFINITY
Sbaragli, S.
Tesis no publicada, 2004, Bratislava

1. ¿Qué crees que significa el infinito matemático?

2. ¿Has hablado alguna vez del infinito durante los último cinco años de enseñanza?, ¿cuándo?, ¿en qué sentido?, ¿qué tipo de soporte has utilizado?

3. ¿Existe el término "infinito" en matemáticas como adjetivo y como nombre?

4. ¿Hay más puntos en el segmento AB o en el segmento CD? (escribe en la hoja de papel todo lo que se te ocurra)



5. ¿Cuántos números pares hay: 0, 2, 4, 6, 8,...?

6. ¿Cuántos números impares hay: 1, 3, 5, 7,...?

7. ¿Cuántos números naturales hay: 0, 1, 2, 3,...?

8. ¿Cuántos múltiplos de 15 hay?

9. ¿Hay más números pares o impares?

10. ¿Hay más números pares o naturales?

11. ¿Hay más números impares o naturales?

12. ¿Hay más múltiplos de 15 o números naturales?

13. ¿Has comparado alguna vez durante tu docencia en la escuela primaria las cantidades de estos conjuntos numéricos? (pares con impares, pares con naturales, impares con naturales)? ¿En qué ocasión?

14. Intenta ser lo más honesto posible al responder la siguiente cuestión: ¿te convence la demostración de que hay tantos puntos en AB como en CD?

15. Intenta ser lo más honesto posible al responder la siguiente cuestión: ¿te convence la demostración de que hay tantos números en el conjunto de los pares como en el conjunto de los números naturales?

INSIGHT INTO PUPILS' UNDERSTANDING OF INFINITY IN A GEOMETRICAL CONTEXT
Jirotková, D.y Littler, G.
Proceeding of the 28th Internacional Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2004, **3,** 97-104

Tarea 1. Dos chicos están hablando. Decide cuál de ellos tiene razón.
Adam: *Una línea recta tiene dos "infinitos". Si voy en una dirección alcanzaré el infinito. Si voy en la dirección opuesta también alcanzaré el infinito*.
Boris: *Esos dos "infinitos" son el mismo, sólo hay un infinito sobre la línea recta. Ese es el lugar donde se unen ambos como un círculo.*

Escribe el nombre del chico que tú creas que tiene razón. Explica porqué.

Tarea 2. Tres chicas están hablando. Decide cuál de ellas tiene razón.
Cecilie: *Dos rayos paralelos terminan en dos puntos del infinito diferentes*
Dana: *No estoy de acuerdo. Terminan en el mismo punto del infinito*
Eva: *No teneis razón ninguna de las dos. Un rayo continúa y no termina nunca*

Escribe el nombre de la chica que tu creas que tiene razón. Explica porqué.

Tarea 3. Sea un segmento AB. Lo alargamos dos veces, tres veces,..., mil veces,..., infinitas veces.
Describe el objeto resultante y da su nombre.

Tarea 4: Sea un segmento AB cuyos extremos A y B han sido cortados. Lo alargamos dos veces, tres veces, ..., mil veces, ..., infinitas veces.
Describe el objeto resultante y da su nombre.
Los objetos de las tareas 3 y 4, ¿son el mismo? Si no es así, explica porqué no

Tarea 5: Frank afirma que puede escribir el número decimal positivo más pequeño ¿Es posible esto?
Si SÍ, escribe el número. Si NO, da razones.

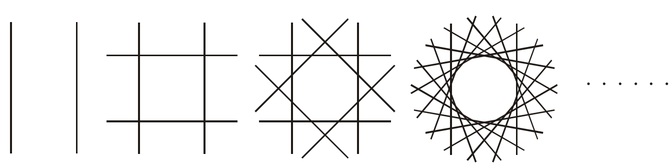
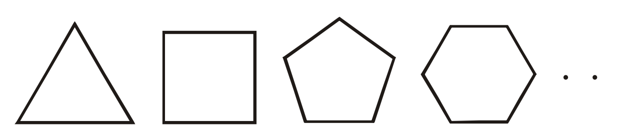
Tarea 6. Sea un semicírculo de diámetro AB [se proporcionó diagrama]. Considera todos los triángulos posibles ABC que tienen el vértice C sobre la circunferencia del semicírculo. Dibuja dos triángulos ABc tales que la altura *h* (desde C a AB) es (a) la mayor posible, (b) la menor posible.

Tarea 7. Sea una línea recta b y un punto A que no se halle sobre b. Considera todos los cuadrados ABCD cuyo vértice b se encuentra sobre la línea b. Dibuja un cuadrado ABCD con (a) el menor área posible, (b) el mayor área posible. Describe la posición del punto B. Dibuja las diagonales AC y BD y marca el centro S del cuadrado ABCD. Si no tienes espacio suficiente en tu hoja para marcar cualquiera de los puntos, dibuja flechas que indiquen la dirección en la que se hallarían [se proporcionó diagrama]

AL INFINITO Y MÁS ACÁ: CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS
Montoro, V.
Infancia y Aprendizaje, 2005, **28** (4)**,** 409-427

Pregunta	**¿Qué indaga?**
Juan y María juegan con una máquina que puede realizar 10 tareas distintas y posee un teclado con tres teclas: M, A y P. Ellos inventaron un sistema para denominar esas tareas a través de combinaciones de las tres teclas. Las combinaciones elegidas para cada una de las tareas fueron: MAP, MP, PM, AMP, MAA, PPMMA, MAPP, A, PMM, MAPA. A este sistema lo denominaron "idioma de máquina JM".	
P1) ¿Piensas que es posible con sólo estas tres teclas (M, A y P) crear un "idioma de máquina" para una máquina que realizará 200 000 tareas? SI - NO - NO SE	¿Con pocos elementos puedo obtener <u>muchas</u> combinaciones?
P2) ¿Piensas que es posible con sólo estas tres teclas (M, A y P) crear un "idioma de máquina" con el cual siempre se podría dar una denominación a una tarea no prevista anteriormente? SI - NO - NO SE	¿Con pocos elementos puedo obtener <u>infinitas</u> combinaciones?
Juan y María cuentan ahora con un teclado de 28 teclas (una con cada letra del alfabeto castellano) en el que se basaron para crear un "idioma de máquina" para denominar las infinitas tareas de una máquina imaginaria. Lo llamaron JUANMARIANO	
P3) ¿Crees que en base a estas mismas 28 letras se podría construir otro "idioma de máquina" diferente al JUAN MARIANO (es decir que estos dos "idiomas" difieran en el menos una combinación de letras) que también sea infinito? SI - NO - NO SE	¿Hay <u>distintas</u> colecciones infinitas?
P4) La combinación de teclas ANANA, ¿estará necesariamente en el "idioma de máquina" JUANMARIANO? SI - NO - NO SE	Son infinitas, ¿deben estar <u>todas</u> las posibles?
Otro día, Juan y María inventaron otro "idioma de máquina" en base al alfa beto castellano (que llamaron BARILOCHENSE), y cumple con las siguientes reglas: *<u>Regla I</u>: En BARILOCHENSE están todas las combinaciones de dos letras (por ejemplo SI, NO, AB, RR, TT, TE, ST, GO, etc.).* *<u>Regla II</u>: Si una combinación está en BARILOCHENSE, también estará esa combinación con una A al final (por ejemplo, si está PP está PPA y también PPAA, si está PERRO está PERROA y PERROAA).*	
P5) ¿Podrías asegurar que BARILOCHENSE tiene infinitas combinaciones para designar tareas? SI - NO - NO SE	¿Inductivamente, puedo obtener infinitas combinaciones?
P6) Si retiramos de BARILOCHENSE todas las combinaciones que tengan a lo sumo 20 letras ¿tendremos todavía un "idioma de máquina" con infinitas combinaciones? SI - NO - NO SE	Si quito una cantidad finita ¿todavía son infinitas?
Juan y María se juntaron una vez más y jugaban a inventar "idiomas de máquinas" para maquinas imaginarias. Juan propuso arreglárselas sólo con tres teclas (M, A, P), mientras que María propone 15 000 000 de teclas.	
P7) El primer "sistema" que propone Juan (JUAN1) es el siguiente: JUAN1: "Todas las combinaciones posibles con estas tres letras (M, A, P), sin que puedan repetirse las letras en una determinada combinación". (por ejemplo: AMP, PAM estarán en JUAN1, mientras que MAPA y MMP no están permitidas). Piensas que este sistema tendrá Pocas combinaciones (menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas) Infinitas combinaciones	Extensión del conjunto de todas las combinaciones de pocos elementos, <u>sin repetir</u>
P8) María propone un sistema similar pero basado en sus 15 000 000 de teclas (MARÍA1), es decir: MARÍA1: "Todas las combinaciones posibles de los 15 000 000 de teclas, sin que puedan repetirse las teclas en una determinada combinación" Piensas que este sistema tendrá Pocas combinaciones (menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas) Infinitas combinaciones	Extensión del conjunto de todas las combinaciones de muchos elementos, <u>sin repetir</u>
P9) Juan decide, entonces que su sistema estará constituido por todas las combinaciones de las tres letras (M, A, P) pero ahora pueden repetirse las letras sin restricciones. Piensas que este sistema tendrá: Pocas combinaciones (menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas) Infinitas combinaciones	Extensión del conjunto de todas las combinaciones de pocos elementos, <u>repitiendo</u>
P10) María insiste en utilizar 15 000 000 de teclas y que su sistema esté constituido por todas las combinaciones de esas letras y pueden repetirse sin restricciones. Piensas que este sistema tendrá: Pocas combinaciones (menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas) Infinitas combinaciones	Extensión del conjunto de todas las combinaciones de muchos elementos, <u>repitiendo</u>

APÉNDICE III: Referencias de los ítems planteados en los cuestionarios

Propuestos	Referencias
1. Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos y explica tu respuesta: **a)** Número de estrellas **b)** Número de granos de arena en la Tierra **c)** Números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ **d)** Número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm. de lado **e)** Número de células que forman el cuerpo humano **2.** Ordena de menor a mayor, según el número de elementos que contienen, los siguientes conjuntos: $A = \{x\in \mathrm{N}: 1 \leq x \leq 10\}$ $B = \{x\in \mathbb{Q}: 1 \leq x \leq 10\}$ $C = \{x\in \mathbb{R}: 1 \leq x \leq 10\}$ $D = \{x\in \mathbb{R}: 1 \leq x \leq 100\}$ $E = \{x\in \mathbb{N}: 1 \leq x < \infty\}$	**1.** ¿Hay más números que granos de arena? Explica tu respuesta. (FALK y BEN-LAVY, 1989) **2.** Ordena de menor a mayor el cardinal de los conjuntos siguientes: $I_{\mathbb{N}} = \{x\in \mathbb{N}: 3 \leq x \leq 10\}$ $I_{\mathbb{Q}} = \{x\in \mathbb{Q}: 3 \leq x \leq 10\}$ $I_{\mathbb{R}} = \{x\in \mathbb{R}: 3 \leq x \leq 10\}$
1. Imagina el siguiente juego entre dos personas. Cada una dice, cuando es su turno, un número. Gana aquél que diga el número más grande. **a)** ¿Preferirías ser tú el que comenzase el juego?, ¿por qué? **b)** ¿Cuánto durará el juego?, ¿por qué?	**1.** Juego por parejas: cada uno de vosotros dirá un número; aquel quedita el más grande ganará. ¿Os gustaría ser el primero o el segundo en decir el número? (FALK, 1994)
1. Imagina el siguiente juego entre dos personas. Cada uno dice, cuando es su turno, un número distinto de cero –pueden ser números enteros o decimales, pero siempre positivos-. Gana aquel que diga el número más pequeño. **a)** ¿Preferirías ser tú el que comenzase el juego?, ¿por qué? **b)** ¿Cuánto durará el juego?, ¿por qué? **2.** Considera la siguiente sucesión de números: 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001,... Si continuamos escribiendo números, ¿crees que se llegará a alcanzar el 0? □ Sí. ¿Cuándo? □ No. ¿Por qué?	**1.** ¿Tiene límite la sucesión 0.1, 0.01, 0.001,...? (MONAGHAN, 2001)
1. Es posible encontrar un número decimal que multiplicado por 9 de cómo resultado 1? Si es posible indica qué número es ese y cómo lo has obtenido; de lo contrario, justifica tu respuesta.	**1.** Así como con frecuencia se escribe 1/3 como $0,\widehat{3}$, podemos escribir 1/9 como $0,\widehat{1}$. ¿Se puede definir 1/9 como $0,1 + 0,01 + 0,001 + \cdots$? (MONAGHAN, 2001)
1. Si observas el proceso siguiente, parece que rotando sucesivamente un par de rectas paralelas se puede obtener un círculo. ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta. 	**1.** Consideremos la serie de polígonos de la figura. Cada vez que dibujamos un nuevo polígono, lo hacemos con un lado más. **a)** ¿Tiene fin este proceso? Explica tu respuesta **b)** ¿Podrías dibujar la "última figura"? Explica tu respuesta 

<table>
<tr><th>Propuestos</th><th>Referencias</th></tr>
<tr><td>
1. Imagínate que del conjunto de todos los números naturales {1, 2, 3, 4, 5, ...} quitamos un millón de números
a) ¿Cuántos quedan?, ¿por qué?
b) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que contendrá más números:
{1, 2, 3, 4,...} ó {1 000 001, 1 000 002, 1 000 003,...}?, ¿por qué?
c) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que contendrá más números:
{1, 2, 3, 4,...} ó {3, 6, 9, 12...}?, ¿por qué?

2. Considera el siguiente número periódico: $2,\overline{131} = 2{,}131131131...$
a) ¿Cuántas veces aparecerá el 1 a lo largo de toda su parte decimal?,¿y el 3?
b) ¿Aparecerá alguno de ellos más veces que el otro?. Explica tu respuesta

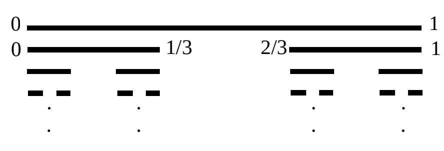
3. a) ¿Cuántos valores (x, y), reales, satisfacen la ecuación $x + 2y - 3 = 0$? ¿Qué significa dicho resultado?
b) Si x sólo pudiese tomar valores en el intervalo [3, 5], ¿cuántas soluciones tendría ahora dicha ecuación?
c) ¿En cuál de los dos casos anteriores se obtiene un número mayor de soluciones, en a) o en b)?

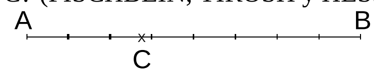
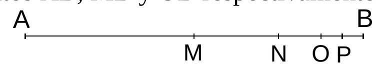
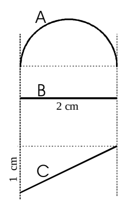
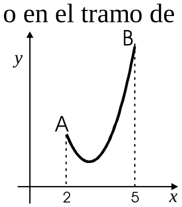
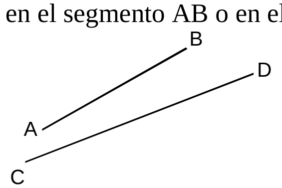
4. Lanzamos un dado infinitas veces y anotamos el resultado. ¿Cuántos unos habrán salido?, ¿y doses?, ¿y múltiplos de 2? ¿Cuál de los tres conjuntos anteriores contine más elementos?. Justifica tus respuestas
</td><td>
1. Si consideramos todos los números naturales, su cantidad es muy grande, pero
a) finita ☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe
b) infinita ☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe
Si consideramos todos los cuadrados perfectos, su cantidad es muy grande, pero
a) finita ☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe
b) infinita ☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe
Considera todos los números naturales
a) hay más qu cuadrados
b) hay tantos como cuadrados
(MORENO Y WALDEGG, 1991; TURÉGANO, 1996)

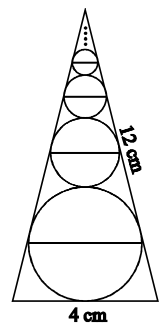
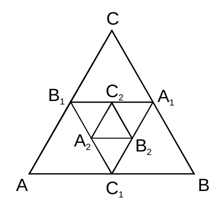
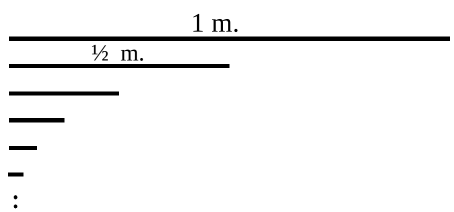
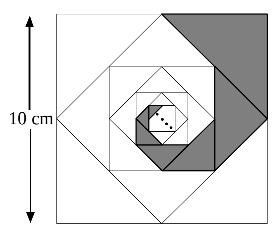
2. La tarjeta A contiene los números naturales; la tarjeta B contiene los números divisibles por 4 ¿Hay la misma cantidad de elementos en las tarjetas A y B?. Explica tu respuesta. (TSAMIR, 1996; TSAMIR y TIROSH, 1999)

3. Considera las dos sucesiones de números 1, 2, 3, 4, ... y 2, 4, 6, 8, ... Entonces:
- hay más en la primera
- hay más en la segunda
- hay los mismos en ambas
- no se pueden comparar
(MONAGHAN, 2001)
</td></tr>
<tr><td>
1. ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, ∞)? ¿Por qué?
</td><td>
1. Considera el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$ que corresponde al intervalo [0, 1]. Ahora definimos el conjunto $B = \{y \,/\, y = 2x,\ x \in A\}$ donde cada elemento de A es trasladado a la posición $2x$ de la recta numérica.
a) ¿Tiene el conjunto B todos los puntos del intervalo [0, 2]
☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe
b) ¿Tienen los conjuntos A y B el mismo número de puntos?
☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe
(TALL, 1980; MORENO y WALDEGG, 1991)

2. Considera todos los números decimales entre 0y 1 y todos los que hay entre 0 y 10. Entonces, hay
☐ más entre 0 y 1 ☐ más entre 0 y 10
☐ los mismos en ambos ☐ no se pueden comparar
(MONAGHAN, 2001)
</td></tr>
</table>

Propuestos	Referencias
1. Escribe, al menos, tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puedes realizar un dibujo sobre el infinito **2.** ¿Cómo introducirías el concepto de infinito a un estudiante de 2º de ESO? ¿Y a uno de 2º de BTO? **3.** Intenta escribir una definición, lo más rigurosa posible, de infinito **4.** ¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos; en caso contrario, justifica tu respuesta.	**1.** ¿Qué significa "infinito" para ti? ¿Existen cosas que sean infinitas para ti? (DUVAL, 1983; MURA y MAURICE, 1997) **2.** Explica si te resulta conocida la palabra infinito ¿Has utilizado la palabra infinito alguna vez?, ¿en qué situaciones la has utilizado? Di palabras asociadas a infinito Describe con tus propias palabras lo que entiendes por infinito ¿Conoces ejemplos de conjuntos infinitos?, ¿cuáles? (PENALVA, 1996) **3.** Describe la idea de infinito con tus propias palabras (SINGER y VOICA, 2003)
1. Supón que divides un segmento por la mitad y te quedas con una de las partes. Si esta operación la repites todas las veces que desees, ¿qué obtendrás al final?. Justifica tu respuesta **2.** Considera un número positivo cualquiera; a continuación lo divides entre dos, el resultado lo vuelves a dividir entre dos, el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final?, ¿por qué? **3.** Una máquina divide entre 2 el número que introduzcas –distinto de cero-, el resultado lo vuelve a dividir entre 2 y así sucesivamente; sólo se detiene cuando alcanza el resultado más pequeño posible. ¿Cuál es resultado?, ¿estará funcionando durante mucho tiempo?, ¿por qué? **4.** ¿Puedes situar infinitos segmentos dentro de un segmento dado, AB, de longitud l?, ¿cómo? **5.** Si realizamos el proceso indicado en la figura un número infinito de veces, **a)** ¿cuántos segmentos quedarán y cuál será su longitud? **b)** ¿cuántos segmentos se habrán borrado? **c)** ¿es comparable el conjunto de segmentos que quedan y el de segmentos que se han borrado?, ¿cuál tendrá mayor número de segmentos?  **6.** Cuando falta un minuto para las doce de la noche, una lámpara se enciende durante ½ minuto, se apaga ¼ de minuto, se vuelve a encender durante 1/8 de minuto, se apaga por 1/16 y así sucesivamente. A las doce en punto se presiona un interruptor que deja la lámpara fija en el estado en que se encuentre en ese momento final. ¿Estará encendida o apagada? Explica tu respuesta.	**1.** Sean AB y CD segmentos de diferentes longitudes, tales que AB es más largo que CD. Dividimos el segmento AB y llamamos al punto medio H_1. Dividimos el segmento CD y llamos al punto medio H_2. A los puntos H_1 y H_2 los llamamos puntos correspondientes. Continuamos dividiendo los segmentos resultantes. Llamamos P_1 y P_2 a los puntos medios de AH_1 y H_1B, respectivamente, y P_3 y P_4 a los puntos medios de CH_1 y H_1D, respectivamente. Continuamos realizando estge proceso. ¿Llegaremos a una situación tal que para un punto de división en el segmento AB no habrá más puntos correspondientes en el segmento CD? Explica tu respuesta. (FISCHBEIN, TIROSH y HESS, 1979; TURÉGANO, 1996) **2.** Dividimos el segmento AB en dos partes iguales. Sea H el punto medio. Ahora dividimos AH y HB. Los puntos P y Q representan los puntos medios de dichos segmentos, respectivamente. Continuamos dividiendo de la misma manera. Con cada división, los fragmentos se hacen cada vez más pequeños ¿Llegará un momento en que los fragmentos sean tan pequeños que ya no podamos dividirlos mas? (FISCHBEIN, TIROSH Y HESS, 1979) **3.** Imagina que queremos ir desde este lado de la mesa hasta el otro. Se nos dice que primero debemos avanzar la mitad del trayecto, en seguida continuar con la mitad de lo que queda, luego con la mitad de lo que queda y así sucesivamente ¿Llegaremos alguna vez al otro lado de la mesa? (NÚÑEZ, 1997)

Propuestos	Referencias
1. Sea C = $\sqrt{2}$. Dividimos el intervalo [1, 2] en cuatro partes iguales y nos quedamos con aquel subintervalo que contenga a C. A continuación repetimos este proceso con el nuevo intervalo y así sucesivamente. ¿Llegará un momento en que no de los puntos de las divisiones coincida con C? Justifica tu respuesta.	**1.** C es un punto arbitrario del segmento AB. Dividimos el segmento AB primero en dos mitades y a continuación vamos dividiendo cada una de ellas también por la mitad. ¿Llegará un momento en que una de las divisiones coincida con el punto C? (FISCHBEIN, TIROSH y HESS, 1979)  **2.** Observa la siguiente figura. Nos muestra un esquema en que se biseca cada vez el segmento de la derecha, es decir los puntos M, N, O, P son los puntos medios de los segmentos AB, MB y OB respectivamente  Si se siguen haciendo más y más bisecciones, ¿crees que es posible llegar a la situación en que un punto de la bisección coincide con el punto B? Explica tu respueta (GARBÍN, 2000)
1. Compara las líneas, A, B y C de la figura. ***a)*** ¿Cuál de ellas es más larga, A, B o C? ***b)*** ¿Cuál de ellas contiene más puntos A, B o C? Justifica tu respuesta  **2.** Supón que teines que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con punto ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían? ¿Y en uno de 30 cm de lado? Explica tu respuesta **3.** Dada la función $y = (x - 3)^2 + 1$, definida en el conjunto de los números reales, de la cual se ha representado el tramo de curva AB en la figura adjunta, ¿dónde hay más puntos, en el intervalo [2, 5] de la variable *x* o en el tramo de curva AB? Justifica tu respuesta  	**1.** Considera un segmento AB de longitud 1 cm y un cuadrado cuyo lado es de 1 cm ¿Es posible encontrar para cada punto del cuadrado un punto correspondiente en el segmento? (FISCHBEIN ET. AL. 1979) **1.** Considera un segmento AB que mide 4 cm y otro CD que mide 6 cm ***a)*** ¿Crees que ambos segmentos están constituidos por puntos? ☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe ***b)*** Si tu respuesta es afirmativa, habrá un gran número de ellos, pero - finito ☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe - infinito ☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe ***c)*** Si comparas los puntos de ambos segmentos - CD tiene más puntos que AB ☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe - CD tiene tantos puntos como AB ☐ Sí ☐ No ☐ No se sabe (MORENO Y WALDEGG, 1991) **3.** ¿Dónde hay más puntos, en el segmento AB o en el segmento CD?  (SBARAGLI, 2004)

Propuestos	Referencias
1. ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños? **a)** una cantidad finita, ¿cuál? **b)** una cantidad infinita, ¿por qué? **c)** no se puede saber, ¿por qué? 	**1.** ABC es un triángulo equilátero. Divide cada lado en dos partes iguales y marca los puntos medios A_1, B_1 y C_1. A continuación considera el triángulo $A_1B_1C_1$. Continúa el proceso de la misma manera. ¿Tendrá un final este proceso?, ¿cuál será el área de la última figura? (FISCHBEIN, TIROSH Y HESS, 1979) 
2. Si tienes el conjunto de segmentos de la figura, donde la longitud de cada uno es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, obtendrás un segmento más largo. ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos? **a)** 2 metros **b)** 3 metros **c)** Infinito **d)** una longitud tan grande que no se puede medir 	
3. La suma de las áreas delos triángulo sombreados de la figura es: **a)** finita **b)** infinita **c)** no se puede calcular 	

Propuestos	Referencias
1. ¿Existe algún número entre $1,\overset{\frown}{9}$ y 2? 9 Si. Escribe alguno 9 No. ¿Por qué? **2.** ¿Cuál es el resultado de $0,\overset{\frown}{9} \times 0,\overset{\frown}{9}$? **<u>Justifica tu respuesta</u>**	**1.** $0,\overset{\frown}{9} = 1$ ¿es verdadero o falso? (SIERPINSKA, 1987) **2.** Se presentan dos demostraciones sobre la veracidad de la igualdad anterior y se vuelve a plantear la misma pregunta. (BAGNI, 1998)
1. Dada la suma $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$, **a)** crece indefinidamente **b)** decrece indefinidamente **c)** se acerca indefinidamente a un cierto número **d)** otra respuesta; indicar cuál **2.** Considera la suma $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots$; su resultado **a)** es un número finito, ¿cuál? **b)** es un número infinito, ¿por qué? **c)** no se puede calcular, ¿por qué?	**1.** Considera la suma: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$. ¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta. (GARBÍN, 2000) **2.** ¿Puedes sumar 0,1 + 0,01 + 0,001 + ⋯ y dar un resultado? (MONAGHAN, 2001)

APÉNDICE IV: Cuestionario para el profesorado

Por favor, indica en qué curso/s haces referencia al concepto de infinito y en qué términos (definiciones, ejemplos, gráficos, figuras geométricas, imágenes, conjuntos, etc.). Escribe, asimismo, la editorial del texto que utilizas en cada curso. Gracias por tu colaboración.

1º ESO	*TEXTO UTILIZADO:*
2º ESO	*TEXTO UTILIZADO:*
3º ESO	*TEXTO UTILIZADO:*
4º ESO	*TEXTO UTILIZADO:*

1º BCHTO	*TEXTO UTILIZADO:*
1º BCHTO	*TEXTO UTILIZADO:*

Por favor, marca con una X en la columna de la izquierda aquellos temas que hayas impartido

1º ESO

▼	CONTENIDOS	ACLARACIONES
	Los números naturales	
	Divisibilidad	
	Los números enteros	
	Números decimales y fraccionarios	
	Proporcionalidad	
	Lenguaje algebraico	
	Ecuaciones	
	Tablas y gráficas	
	Polígonos	
	El círculo	
	La medida	
	Azar y probabilidad	

2º ESO

▼	CONTENIDOS	ACLARACIONES
	Repaso de aritmética	
	Divisibilidad	
	Raíces y potencias	
	Proporcionalidad	
	Lenguaje algebraico	
	Ecuaciones	
	Gráficas lineales	
	Semejanza	
	El círculo	
	Cuerpos geométricos	
	Áreas y volúmenes	
	Estadística y probabilidad	

3º ESO

▼	CONTENIDOS	ACLARACIONES
	Repaso de aritmética	
	Potencias y raíces	
	Proporcionalidad	
	Progresiones	
	Lenguaje algebraico	
	Ecuaciones	
	Sistemas de ecuaciones	
	Funciones y gráficas	
	Funciones lineales	
	Otras funciones	
	Polígonos	
	Figuras en el espacio	
	Transformaciones geométricas	
	Estadística	
	Azar y probabilidad	

4º ESO

▼	CONTENIDOS	ACLARACIONES
	Repaso de aritmética	
	El número real. La recta real	
	Polinomios y fracciones algebraicas	
	Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	
	Aplicaciones de la semejanza	
	Transformaciones en el plano	
	Organización del espacio	
	Funciones elementales	
	Características de las funciones	
	Las muestras estadísticas	
	Distribuciones bidimensionales	
	El azar y la probabilidad	

APÉNDICE V: Tablas de resultados porcentuales

6PRIC1P03 (*a*)	Nivel Muestra (n)	6PRI 103	1ESO 104	2ESO 114	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 161
N es infinito		53,4	57,7	62,3	62,8	84,2	89,2	86,1	90,1
Muchos, millones, bastantes, …		20,4	21,2	21,9	11,2	2,6	0,8	1,7	0,0
No se sabe, porque son infinitos		23,3	21,2	21,9	18,4	18,4	10,0	7,0	2,5
Un millón menos, infinito menos un millón		1,9	5,8	6,1	12,2	21,1	26,7	13,9	6,8
No se sabe + un millón menos		25,2	26,9	28,1	30,6	39,5	36,7	20,9	9,3
Quedan infinitos		28,2	26,0	30,7	27,6	46,5	52,5	58,3	82,0
Se refieren a un número concreto		7,8	3,8	1,8	5,1	0,9	0,8	0,9	0,0
Error conceptual o no comprende el enunciado		4,9	2,9	6,1	1,0	2,6	2,5	4,3	0,0
No responde		6,8	9,6	4,4	17,3	3,5	0,8	4,3	4,3

6PRIC1P03 (*b*)	Nivel Muestra (n)	6PRI 103	1ESO 104	2ESO 114	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 161
El primero contiene más		37,9	39,4	39,5	42,9	40,4	41,7	40,0	20,5
"Porque empieza antes" o "empieza desde el 1"		11,7	22,1	20,2	24,5	19,3	17,5	20,0	8,7
"Porque contiene un millón más"		3,9	1,9	3,5	2,0	8,8	5,8	5,2	3,1
"Porque contiene al segundo"		0,0	0,0	0,0	1,0	2,6	5,0	4,3	5,0
Error conceptual o no comprende el enunciado		5,8	5,8	1,8	2,0	1,8	2,5	1,7	1,2
El segundo contiene más		26,2	23,1	21,9	15,3	7,9	5,0	4,3	1,9
"Porque son números más grandes"		3,9	9,6	5,3	2,0	1,8	2,5	2,6	0,0
Son iguales		24,3	22,1	21,9	24,5	32,5	30,8	35,7	52,8
"Porque los números son infinitos"		12,6	12,5	13,2	17,3	21,9	21,7	26,1	37,9
"Porque los dos pueden llegar hasta donde quieras"		4,9	5,8	7,0	5,1	7,0	5,0	4,3	1,9
Establece una correspondencia biyectiva		0,0	0,0	0,0	1,0	2,6	2,5	2,6	10,6
Los dos conjuntos tienen infinitos elementos (sin mención a la igualdad)		1,9	2,9	3,5	4,1	3,5	10,0	8,7	12,4
No responde		4,9	6,7	3,5	3,1	4,4	1,7	1,7	7,5

6PRIC1P03 (*c*)	Nivel Muestra (n)	6PRI 103	1ESO 104	2ESO 114	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 161
El primero contiene más		41,7	42,3	42,1	46,9	47,4	43,3	43,5	23,6
“Porque va de uno en uno” o “no se salta números”		21,4	22,1	24,6	25,5	21,1	19,2	19,1	8,1
“Porque empieza antes”		3,9	7,7	5,3	7,1	5,3	8,3	7,0	1,2
“Porque contiene al segundo”		0,0	0,0	0,0	0,0	0,9	4,2	3,5	8,1
El segundo contiene más		25,2	18,3	10,5	11,2	6,1	3,3	5,2	2,5
“Porque son números más grandes”		6,8	3,8	1,8	2,0	1,8	1,7	0,9	0,0
Son iguales		16,5	21,2	25,4	23,5	27,2	28,3	31,3	41,6
“Porque los números son infinitos”		10,7	13,5	18,4	15,3	18,4	20,8	19,1	24,8
Establece una correspondencia biyectiva		0,0	0,0	0,0	0,0	1,8	1,7	0,9	10,6
Los dos conjuntos tienen infinitos elementos (sin mención a la igualdad)		1,0	1,0	5,3	6,1	11,4	14,2	13,9	14,3
No responde		9,7	8,7	7,0	2,0	3,5	2,5	3,5	8,7

6PRIC1P06	Nivel Muestra (n)	6PRI 103	1ESO 104	2ESO 114	3ESO 104	4ESO 113
No se pueden ordenar, no se pueden contar		18,4	17,3	16,7	9,6	10,6
"porque son todos infinitos"		7,8	6,7	7,9	2,9	3,5
Son todos iguales: infinitos”, “son todos infinitos”		3,9	3,8	1,8	2,9	5,3
El menor es d): "puntos en un cuadrado"		37,9	37,5	36,8	50,0	55,8
El menor es c): "números naturales"		1,0	5,8	3,5	6,7	8,8
El menor es b): "granos de arena"		1,9	3,8	5,3	3,8	1,8
El menor es e): "número de células"		6,8	6,7	8,8	9,6	10,6
El mayor es a): "número de estrellas"		8,7	11,5	11,4	12,5	8,0
El mayor es c)		35,9	37,5	45,6	50,0	58,4
El mayor es d)		4,9	5,8	5,3	6,7	1,8
c) son infinitos		12,6	19,2	28,9	39,4	46,0
c) son infinitos (incluidos "no se pueden ordenar" y "son todos iguales: infinitos”)		35,0	40,4	47,4	51,9	61,9
d < e < b < a < c		15,5	22,1	21,1	30,8	32,7
Dan una ordenación		52,4	60,6	58,8	73,1	76,1
No responde		13,6	8,7	13,2	6,7	0,9

3ESOC2P10	Nivel Muestra (n)	3ESO 104	4ESO 113
Los dos aparecen infinitas veces		45,2	62,8
Los dos aparecen las mismas veces: infinitas		9,6	15,9
El 1 aparece más veces que el 3		41,3	37,2
“El doble de veces”		26,9	29,2
No responde		14,4	1,8

6PRIC2P06	Nivel Muestra (n)	6PRI 102	1ESO 107	2ESO 113
“A” alcanza el valor más grande		2,0	0,9	0,9
“*B*” alcanza el valor más grande		22,5	18,7	14,2
"Porque va de 4 en 4"		7,8	12,1	8,0
“A” y ”B” tan grande como queramos		65,7	68,2	71,7
"Porque las dos llegarán a infinito"		21,6	28,0	30,1
"Porque podemos llegar hasta donde queramos"		11,8	15,0	17,7
"Porque podemos parar cuando queramos"		2,0	3,7	3,5
"Pero una llega más rápida que la otra"		2,0	2,8	4,4
No responde		4,9	2,8	1,8

1BTOC2P01	Nivel Muestra (n)	1BTO 111	2BTO 120
No se pueden ordenar		22,5	21,7
"porque son todos infinitos"		18,0	18,3
Son todos iguales: infinitos, son todos infinitos		8,1	8,3
"El menor es (*e*)" -número de puntos en un cuadrado-		23,4	18,3
"El menor es (*a*)" -número de decimales de π-		17,1	18,3
"El menor es (*c*)" -número de granos de arena-		10,8	18,3
"El mayor es (*f*)" -números reales-		36,0	36,7
$e < [a, b, c] < d < f$		13,5	10,8
$a < [b, c, e] < d < f$		11,7	9,2
$c < [a, b, e] < d < f$		6,3	10,8
No dan una ordenación		32,4	29,2
Dan una ordenación		56,8	58,3
No responde		8,1	3,3

1BTOC1P11	Nivel Muestra (n)	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 88
Infinitos en los tres casos		35,0	35,7	45,5
"pero los múltiplos de dos más"		10,8	11,3	10,2
Los mismos en los tres casos: infinitos		10,8	8,7	8,0
Los mismos (sin referencias al infinito)		0,0	0,9	1,1
El conjunto de los múltiplos contiene más elementos		10,8	15,7	12,5
No se puede saber		21,7	16,5	10,2
"porque es al azar"		8,3	9,6	4,5
No responde		12,5	18,3	13,6

6PRIC1P07 (*a*)	Nivel Muestra (n)	6PRI 205	1ESO 211	2ESO 227	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 166
Muchos, bastantes, miles, millones, …		14,6	19,0	18,9	9,2	7,0	5,8	3,5	1,8
Infinitos		10,7	12,8	17,2	17,3	28,1	42,5	48,7	69,9
No los puedes saber		35,1	41,7	41,4	42,9	43,0	44,2	41,7	24,7
“porque son infinitos”		4,4	4,7	5,3	2,0	5,3	11,7	11,3	8,4
“porque hay muchos”		5,4	7,1	5,7	6,1	2,6	2,5	3,5	0,6
“porque depende del tamaño de los puntos”		21,5	24,2	30,4	33,7	34,2	30,0	26,1	15,7
Depende del tamaño de los puntos		27,3	28,0	36,1	36,7	42,1	42,5	32,2	27,1
Da una definición de punto		1,5	0,5	1,3	4,1	2,6	10,0	11,3	14,5
No responde		16,1	15,6	11,5	13,3	3,5	5,8	5,2	3,0

6PRIC1P07 (*b*)	Nivel Muestra (n)	6PRI 205	1ESO 211	2ESO 227	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 166
En el de 30 cm. hay más		27,3	27,0	29,5	32,7	28,9	26,7	24,3	15,5
Dan una cantidad: 100 y 300, 100 y 900,…		25,9	22,3	23,3	25,5	24,6	14,2	10,4	6,2
“El triple”		10,7	9,5	10,6	12,2	9,6	9,2	6,1	3,7
“Nueve veces más”		5,9	5,2	4,4	13,3	10,5	8,3	10,4	6,8
Hay los mismos (incluidos “infinitos”)		1,0	1,9	0,4	1,0	2,6	3,3	4,3	8,1
Hay los mismos en ambos: infinitos		0,0	0,5	0,0	0,0	0,9	1,7	2,6	6,2

3ESOC2P01	Nivel Muestra (n)	3ESO 104	4ESO 113	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 75
La línea A es la más larga		87,5	82,3	82,5	85,2	92,0
"Porque es curva", "porque si la estiras..."		77,9	54,0	33,3	24,3	4,0
Efectúa los cálculos de las longitudes		0,0	8,8	15,0	24,3	48,0
La línea A es la que más puntos tiene		59,6	59,3	43,3	36,5	20,0
"porque es la más larga"		38,5	31,9	26,7	24,3	10,7
Las tres líneas tienen infinitos puntos (iguales o no)		1,9	8,8	30,8	34,8	58,7
Las tres tienen los mismos (sin especificar cuántos) (1)		7,7	9,7	16,7	18,3	16,0
Las tres tienen los mismos: infinitos (2)		0,0	2,7	9,2	10,4	13,3
Referencias a una biyección entre las tres líneas		0,0	0,0	0,8	0,9	4,0
(1) + (2)		7,7	12,4	25,8	28,7	29,3
No responde		16,3	9,7	6,7	7,8	5,3

1BTOC2P10	Nivel Muestra (n)	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 91
Hay más puntos en la curva		27,9	20,0	13,3
“porque tiene mayor longitud”		20,7	13,3	6,6
Hay más puntos en el intervalo [2, 5]		4,5	2,5	4,4
Hay infinitos en ambos		29,7	48,3	58,2
Hay los mismos en ambos		33,3	47,5	60,4
“porque son infinitos”		9,0	19,2	23,1
“porque hay una correspondencia entre ellos”		6,3	14,2	33,0
Hace referencias al tamaño de los puntos		4,5	1,7	1,1
No responde		18,9	18,3	8,8

1BTOC2P13	Nivel Muestra (n)	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 91
No está de acuerdo con la afirmación		25,2	20,0	6,5
“porque la mayor tiene más puntos”		11,7	13,3	3,9
Sí está de acuerdo con la afirmación		35,1	44,2	53,2
“porque ambas tienen infinitos puntos”		29,7	33,3	28,6
“porque se puede establecer una correspondencia”		4,5	5,0	10,4
No se puede demostrar		9,9	6,7	2,6
No responde		27,9	24,2	31,2

1BTOC1P10	Nivel Muestra (n)	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 89
Hay los mismos en ambos		25,0	21,7	23,6
“porque son infinitos”		22,5	20,0	20,2
Hay infinitos en ambos		42,5	50,4	65,2
“pero hay más en la semirrecta”		4,2	5,2	6,7
Hay más en [0, ∞)		43,3	40,0	19,1
“porque va hasta el infinito, “porque no tiene fin”, …		17,5	13,9	4,5
“porque contiene o abarca a [0, 1], “porque [0, 1] tiene principio y fin”		12,5	10,4	11,2
No responde		9,2	7,0	5,6

1BTOC2P12	Nivel Muestra (n)	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 90
Hay infinitos en ℝ		40,5	53,3	74,4
Representan una recta		3,6	2,5	6,7
Hay infinitos en [3, 5]		29,7	42,5	54,4
Hay infinitos en ambos		17,1	24,2	31,1
“pero en ℝ hay más”		6,3	14,2	21,1
Hay los mismos en ambos: infinitos		10,8	15,0	20,0
Hay más en ℝ		23,4	32,5	38,9
“porque [3, 5] está contenido en ℝ”		1,8	7,5	12,2
“porque hay infinitas soluciones”		4,5	4,2	4,4
No responde		39,6	28,3	16,7

1BTOC2P09	Nivel Muestra (n)	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 178
Sí		25,2	22,5	33,1
“+ ∞ y - ∞”		9,9	8,3	3,9
“ℕ es menor que ℝ”		1,8	0,8	9,0
No		70,3	69,2	59,0
“porque es algo incalculable”, “no puede medirse”, “no se conoce”		16,2	16,7	5,6
“porque es algo ilimitado”, “indeterminado”, “no acaba”		11,7	13,3	9,0
“porque infinito representa lo más grande”		7,2	5,8	6,2
“porque un infinito no puede ser mayor que otro”		14,4	13,3	11,8
"porque + ∞ y - ∞ serían el mismo infinito"		4,5	4,2	6,7
No responde		3,6	6,7	5,1

6PRIC2P02	Nivel Muestra (n)	6PRI 102	1ESO 107	2ESO 113	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 89
El proceso "no acaba"		17,6	21,5	23,9	22,1	36,8	45,0	56,5	67,4
"Un/os segmento/s cada vez más pequeño/s"		2,9	3,7	4,4	8,0	8,8	10,0	11,3	38,2
"Siempre hay una parte más pequeña"		4,9	7,5	7,1	8,0	12,3	23,3	18,3	9,0
Asocia el término "infinito" con el proceso		3,9	4,7	8,8	8,8	14,9	24,2	32,2	36,0
El proceso "acaba"		60,8	54,2	51,3	49,6	48,2	45,0	35,7	28,1
"Un segmento"		11,8	12,1	5,3	4,4	2,6	5,8	4,3	4,5
"Un segmento pequeño" o "muy pequeño"		6,9	13,1	16,8	13,3	14,0	5,0	2,6	4,5
"Un punto"		0,0	2,8	4,4	7,1	9,6	21,7	22,6	11,2
"Muchos segmentos"		15,7	12,1	9,7	6,2	3,5	2,5	0,0	2,2
"Nada", "desaparecerá", "0"		21,6	13,1	14,2	14,2	12,3	9,2	3,5	5,6
Establece una equivalencia numérica		2,9	1,9	5,3	3,5	10,5	10,0	9,6	12,4
No responde		16,7	15,9	9,7	15,0	6,1	5,0	0,9	1,1

1BTOC1P08	Nivel Muestra (n)	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 88
Sí, es posible		55,8	67,0	76,1
"dividiendo por la mitad y así sucesivamente" o "dividiendo indefinidamente"		10,0	13,0	19,3
"porque un segmento tiene infinitos puntos"		6,7	8,7	5,7
"con segmentos infinitamente pequeños"		8,3	9,6	26,1
No es posible		25,8	24,3	14,8
"porque llegas al extremo del segmento" o "el segmento acabaría llenándose"		18,3	9,6	3,4
No responde		18,3	8,7	6,8

6PRIC1P02	Nivel Muestra (n)	6PRI 103	1ESO 104	2ESO 114	3ESO 104	4ESO 113
El proceso "no acaba"		19,4	15,4	22,8	28,8	43,4
"Se hace muy pequeño", "se acerca a cero"		5,8	5,8	7,9	10,6	13,3
"Es infinito"		2,9	1,9	5,3	17,3	27,4
"porque es un número con infinitos decimales"		1,0	1,0	2,6	8,7	15,0
Asocia el término "infinito" con el proceso		7,8	9,6	11,4	28,8	44,2
El proceso "acaba"		25,2	26,0	24,6	26,0	23,9
"Da cero o nada"		1,9	1,0	1,8	4,8	3,5
"Da un número decimal" o escribe un resultado con decimales		19,4	19,2	15,8	14,4	15,0
"Da un número negativo"		1,9	5,8	7,0	5,8	5,3
No se puede saber		3,9	6,7	11,4	16,3	13,3
Sólo se refiere a la división entera		32,0	31,7	20,2	8,7	6,2
No responde		17,5	10,6	8,8	15,4	6,2

3ESOC1P03	Nivel Muestra (n)	3ESO 113	4ESO 114
El proceso “no acaba”		31,9	42,1
“Se acerca a cero”, “infinitamente pequeño”, “muy pequeño”		10,6	11,4
“Es infinito”		8,0	11,4
“Siempre se puede dividir entre 2”		11,5	19,3
Asocia el término infinito con el proceso		21,2	36,8
El proceso “acaba”		10,6	7,9
“Da cero”		2,7	3,5
No se puede saber		28,3	34,2
Sólo se refiere a la división entera		13,3	7,0
No responde		11,5	7,0

6PRIC2P01	Nivel Muestra (n)	6PRI 102	1ESO 104	2ESO 113
Prefiero ser el segundo		34,3	31,7	31,9
“porque así puedo superar a mi contrincante”, “puedo ver el número que dice el otro”		19,6	17,3	20,4
Prefiero ser el primero		44,1	42,3	33,6
“porque así dices el número más pequeño”		26,5	26,0	18,6
“porque tienes más oportunidades de ganar”		9,8	8,7	10,6
Da igual quién comience el juego		10,8	21,2	31,0
El juego “no acaba”		17,6	30,8	44,2
El juego “acaba”, “tiene un final”		62,7	53,8	38,9
Arbitrario: “hasta que se cansen o quieran”, “hasta que uno no sepa decir un número”		5,9	6,7	5,3
Indefinido: no se sabe, mucho, poco, tiempos arbitrarios (5 min., 10 min., …)		33,3	22,1	18,6
“hasta que digas el más pequeño”		22,5	23,1	15,0
Asocia el término “infinito” al proceso		8,8	20,2	31,0
El “más pequeño” es un número concreto: 1, 0.1, 0.01,…		19,6	26,9	18,6
El juego “no acaba” + “prefiero ser segundo”		8,8	7,7	11,5
No responde		5,9	5,8	2,7

6PRIC2P05	Nivel Muestra (n)	6PRI 102	1ESO 107	2ESO 113	3ESO 79	4ESO 85
Sí, llegará a cero		5,9	3,7	3,5	3,8	2,4
No llegará a cero		90,2	93,5	95,6	92,4	94,1
“porque puedes poner infinitos ceros”		1,0	4,7	3,5	3,8	3,5
“porque siempre hay un 1 al final”		37,3	31,8	34,5	25,3	27,1
“porque siempre se añaden ceros o todos los decimales que uno quiera”		11,8	16,8	20,4	17,7	18,8
“porque es infinito o los números son infinitos o los decimales son infinitos”		8,8	13,1	19,5	24,1	25,9
“Siempre hay un 1” + “siempre se añaden ceros”		49,0	45,8	58,4	40,5	57,6
No responde		2,0	1,9	0,9	3,8	2,4

3ESOC2P06	Nivel Muestra (n)	3ESO 104	4ESO 114	1BTO 111	4BTO 120
No es posible		37,5	44,7	43,2	39,2
“porque hay infinitos ceros, decimales o números”		20,2	28,1	29,7	25,0
“porque nunca acabas de poner ceros”, “siempre hay otro más pequeño”		10,6	8,8	9,0	6,7
“porque es 2,000…1”		5,8	7,0	4,5	3,3
Si es posible		43,3	37,7	44,1	43,3
“2,1” ó “2,01”		20,2	7,9	5,4	2,5
“2,000…1”		19,2	16,7	38,7	37,5
No responde		15,4	10,5	8,1	10,8

6PRIC1P04	Nivel Muestra (n)	6PRI 205	1ESO 211	2ESO 227	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 77
Sí, existe		28,3	22,7	21,1	23,9	21,1	18,9	16,7	7,8
No existe		62,9	69,2	73,1	69,9	75,4	80,2	83,3	88,3
“porque 2 es el siguiente”		16,6	18,0	16,3	19,5	23,7	21,6	19,2	19,5
“porque hay infinitos nueves” o “es periódico”		20,0	28,9	31,7	30,1	33,3	42,3	40,8	40,3
“porque son el mismo número”		0,5	0,5	0,4	1,8	4,4	2,7	5,8	9,1
“porque al sumarle algo llega a 2 o se pasa”		4,4	5,2	4,8	3,5	7,0	8,1	7,5	7,8
“porque 2 es una aproximación o un redondeo”		0,5	0,5	1,3	0,9	2,6	1,8	3,3	7,8
No responde		8,8	8,1	5,7	4,4	3,5	0,9	0,0	3,9

3ESOC2P03	Nivel Muestra (n)	3ESO 104	4ESO 113	1UNI 73
Sí se puede		18,3	30,1	58,9
"1/9 ó 0,111…"		10,6	24,8	54,8
No se puede		60,6	55,8	23,3
1 no, pero próximo si [0,111…]" (A)		11,5	11,5	11,0
"porque sólo te puedes aproximar" (B)		11,5	8,0	5,5
"sólo te puede aproximar a 1" (A + B)		23,1	19,5	16,4
"porque nunca puede salir 1 al multiplicar por 9", "ha de ser mayor que 1"		19,2	17,7	5,5
No responde		18,3	11,5	15,1

6PRIC1P08	Nivel Muestra (n)	6PRI 205	1ESO 211	2ESO 227	3ESO 104	4ESO 113	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 77
2 metros		17,6	18,5	17,6	23,1	22,1	16,2	31,7	6,5
"porque el mayor es 1 m y los demás suman otro metro"		1,0	1,4	1,8	4,8	4,4	6,3	7,5	6,5
Se acercará a 2 m pero nunca llegará		0,5	0,5	1,3	1,9	1,8	10,8	23,3	62,3
Una longitud tan grande que no se puede medir		14,6	13,3	11,0	6,7	9,7	6,3	4,2	0,0
3 metros		10,2	9,5	10,6	7,7	6,2	5,4	2,5	0,0
Infinito		44,4	41,7	45,8	45,2	47,8	50,5	30,0	23,4
"porque nunca se acaba, siempre se puede dividir, etc."		19,5	22,7	28,2	26,0	30,1	30,6	15,0	10,4
"porque siempre se suma algo		1,0	2,4	7,0	9,6	10,6	17,1	10,0	7,8
No se puede saber, no se puede hacer		7,8	7,6	7,9	6,7	7,1	5,4	4,2	1,3
Da un resultado finito		43,4	44,1	41,4	42,3	42,5	41,4	64,2	72,7
No responde		3,4	6,6	4,8	4,8	2,7	0,0	0,0	0,0

3ESOC1P08	Nivel Muestra (n)	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 89
Resultado finito		23,0	27,2	28,3	35,7	44,9
"porque el triángulo tiene fin o está limitado", "se acaban los círculos"		8,0	11,4	10,0	12,2	9,0
"la altura del triángulo"		1,8	0,9	5,8	8,7	11,2
"aunque es una suma indefinida"		1,8	2,6	3,3	4,3	11,2
Resultado infinito		27,4	35,1	39,2	31,3	29,2
"porque se sigue sumando", "porque siempre habrá otro círculo"		13,3	19,3	15,0	13,0	9,0
"porque hay infinitos círculos"		6,2	7,9	15,8	13,9	15,7
No se puede saber		38,1	30,7	22,5	22,6	10,1
"porque no se sabe el diámetro de todos los círculo", "no se puede ver"		18,6	17,5	10,8	11,3	3,4
"porque hay infinitos círculos"		5,3	7,0	3,3	3,5	2,2
Considera que hay limitaciones materiales		12,4	7,9	2,5	4,3	2,2
No responde		10,6	5,3	8,3	10,4	13,5

3ESOC2P09	Nivel Muestra (n)	3ESO 104	4ESO 113	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 91
Resultado finito		37,5	37,2	37,8	41,7	48,4
“porque es una figura finita”, “se acabarían los triángulos”		14,4	14,2	11,7	14,2	11,0
“25 cm^2 o ¼ del cuadrado inicial”		0,0	2,7	4,5	5,0	7,7
“se acerca a un cierto valor”		0,0	0,0	0,9	2,5	13,2
“considera un número finito de triángulos: 6 ó 7		9,6	6,2	5,4	5,0	2,2
Resultado infinito		42,3	39,8	42,3	34,2	34,1
“porque nunca acaba”, “siempre se suma”		28,8	26,5	30,6	20,0	19,8
“porque hay infinitos triángulos		3,8	3,5	5,4	9,2	9,9
No se puede calcular		15,4	18,6	14,4	19,2	7,7
“porque los triángulos se hacen o son muy pequeños”		8,7	10,6	4,5	7,5	3,3
Establece una conexión aritmética		1,0	6,2	3,6	5,0	2,2
No responde		3,8	2,7	5,4	2,5	6,6

3ESOC1P07	Nivel Muestra (n)	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 75
Crece indefinidamente		53,1	53,5	44,2	32,2	24,0
“porque se añade”, “porque se suma”		27,4	30,7	29,2	18,3	14,7
“porque hay infinitos números”		8,8	9,6	7,5	4,3	6,7
Decrece indefinidamente		23,9	26,3	23,3	8,7	8,0
“porque el denominador es cada vez mayor”		15,0	16,7	10,8	2,6	4,0
Se acerca a un número		12,4	10,5	25,8	53,9	65,3
“porque cada vez sumas números más pequeños”		2,7	1,8	8,3	20,0	25,3
Se acerca a 4		0,9	4,4	13,3	28,7	29,3
“porque cada vez se le suma una cantidad más pequeña”		0,0	1,8	6,7	9,6	10,7
No responde		7,1	4,4	2,5	2,6	0,0

3ESOC2P07	Nivel Muestra (n)	3ESO 104	4ESO 113	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 91
Resultado finito		3,8	6,2	9,9	14,2	27,5
“0,12345…”		0,0	0,9	2,7	3,3	9,9
Resultado infinito		53,8	52,2	57,7	51,7	46,2
“porque siempre se suma”, “no acabas de sumar”		25,0	30,1	41,4	30,0	25,3
“porque hay infinitos números o términos”		17,3	9,7	10,8	5,0	8,8
“0,12345…”		1,0	2,7	1,8	5,8	8,8
No se puede calcular		31,7	31,9	27,0	24,2	17,6
“porque sigues sumando”, “porque va aumentando”		0,0	19,5	9,0	12,5	4,4
“porque hay infinitos números”		6,7	3,5	6,3	5,0	5,5
“porque el resultado es infinito”		2,9	3,5	3,6	1,7	2,2
“0,12345…”		1,0	0,0	0,9	3,3	2,2
La suma es 0,12345…		2,0	3,6	5,4	12,4	20,9
No responde		10,6	6,2	3,6	7,5	6,6

6PRIC1P05	Nivel Muestra (n)	6PRI 103	1ESO 104	2ESO 114
No se puede		43,7	45,2	36,8
“porque no se acaban los números”		15,5	11,5	9,6
“porque los números son infinitos”		14,6	17,3	15,8
“porque no sabemos cuántos números hay o faltan números”		11,7	11,5	5,3
Sí se puede		42,7	45,2	54,4
“4,272727”		30,1	23,1	18,4
“4,272727…”		10,7	13,5	19,3
No responde		13,6	8,7	8,8

3ESOC2P05	Nivel Muestra (n)	3ESO 104	4ESO 113	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 91
Da un resultado finito		54,8	53,1	61,3	60,0	68,1
“0,999… “ u otros resultados periódicos que comiencen por 0,9… (1)		17,3	25,7	36,9	28,3	23,1
“0,818181…” (2)		20,2	11,5	10,8	7,5	2,2
Decimal periódico (1) + (2)		37,5	37,2	47,7	35,8	25,3
“0,9999998” u otro resultado con un número finito de decimales (3)		6,7	4,4	1,8	1,7	1,1
“0,81” (4)		8,7	4,4	1,8	2,5	0,0
Decimal finito (0,9999998 ó 0,81) (3) + (4)		15,4	8,8	3,6	4,2	1,1
“1”		1,0	5,3	0,9	10,8	19,8
“Un número muy próximo a 1”		1,0	1,8	8,1	9,2	20,9
No se puede calcular		14,4	14,2	11,7	10,8	3,3
Da un resultado infinito		15,4	11,5	9,0	9,2	4,4
No responde		12,5	15,0	13,5	14,2	17,6

3ESOC1P06	Nivel Muestra (n)	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 91
P(5) = 1/∞		15,9	36,0	35,1	38,3	36,3
P(5) = “Una entre las bolas que hay en el bombo”		3,5	5,3	5,4	7,5	12,1
P(5) es pequeña o muy pequeña		25,7	23,7	25,2	32,5	33,0
No responde		24,8	7,9	7,2	9,2	7,7
P(x) = 10 000 000 / ∞		9,7	22,8	21,6	24,2	26,4
P(x) = 1 / 10 000 000		15,9	16,7	18,9	17,5	14,3
P(x) es pequeña o muy pequeña		9,7	14,0	14,4	17,5	20,9
No responde		27,4	11,4	10,8	13,3	11,0
P(5) = P(x) = 0 ó “es imposible”		1,8	0,9	1,8	7,5	14,3
P(5) = P(x)		6,2	5,3	4,5	14,2	20,9
P(5) < P(x)		22,1	17,5	16,2	16,7	5,5
Hace referencia al término “infinito”		23,0	61,4	60,4	63,3	64,8
Experimento irrealizable físicamente		8,0	8,8	9,0	6,7	7,7

3ESOC1P09	Nivel Muestra (n)	3ESO 113	4ESO 114	1BTO 120	2BTO 115	1UNI 75
No tiene origen		58,4	61,4	54,2	45,2	45,3
“porque hay infinitos números”		15,9	18,4	19,2	15,7	9,3
“porque es infinito”		8,8	7,0	9,2	6,1	1,3
“porque es 1/∞”		0,9	4,4	5,0	7,0	9,3
“Se acerca a 0”		0,0	0,9	1,7	6,1	18,7
Sí tiene origen		15,0	26,3	42,5	45,2	46,7
“∞”		8,8	17,5	17,5	14,8	8,0
“1/∞”		2,7	4,4	16,7	14,8	9,3
“0”		0,0	1,8	4,2	8,7	17,3
“es un número que se acerca a 0”		0,0	0,0	0,8	6,1	10,7
No tiene final		26,5	30,7	29,2	23,5	20,0
Sí tiene final		39,8	51,8	58,3	67,0	74,7
“1”		21,2	33,3	30,8	33,9	40,0
“0”		2,7	9,6	2,5	4,3	2,7
“1/0”		4,4	1,8	3,3	4,3	16,0
“– ∞”		0,0	1,8	7,5	4,3	14,7
No responde		16,8	6,1	3,3	3,5	5,3

1BTOC2P11	Nivel Muestra (n)	1BTO 111	2BTO 120	1UNI 75
Sí, la expresión es correcta		62,2	65,0	62,7
“porque sumes lo que sumes da infinito”		9,0	10,8	4,0
Es un resultado aproximado		5,4	7,5	14,7
No, la expresión no es correcta		24,3	16,7	6,7
Sí, se podrían alojar 5 personas más		32,4	28,3	33,3
“porque como hay infinitas habitaciones nunca estarán ocupadas todas”		17,1	10,0	8,0
No, no se podrían alojar 5 personas más		40,5	45,0	24,0
“porque no se puede construir este hotel”		6,3	5,8	6,7
“porque están todas las habitaciones ocupadas”		11,7	10,8	4,0
“La expresión es correcta” + “no se pueden alojar a 5 personas más”		15,3	30,0	17,3
No responde a la primera pregunta		4,5	7,5	16,0
No responde a la segunda pregunta		23,4	15,0	10,7

6PRIC1P09	Nivel Muestra (n)	6PRI 205	1ESO 211	2ESO 227	3ESO 104	4ESO 113	1BTO 231	2BTO 235	1UNI 91
Sin fin, sin final		10,2	12,8	36,1	32,7	31,9	28,6	27,2	19,8
Interminable o/e inacabable		52,7	55,5	62,6	60,6	58,4	38,5	31,1	18,7
Interminable + inacabable		13,2	16,1	23,3	17,3	15,0	6,5	5,5	4,4
Grande: inmenso, millones, enorme, extenso, mucho,…		15,6	12,8	7,9	7,7	8,0	7,4	9,4	17,6
Referencias temporales: eterno, perpetuo, duradero, inmortal		4,9	4,3	6,6	8,7	10,6	9,5	8,1	18,7
Referencias espaciales: inalcanzable, lejos, largo, universo, inmedible, ilimitado,…		36,1	37,0	37,4	34,6	26,5	26,0	20,0	19,8
Indefinido, indeterminado		3,4	5,2	3,1	3,8	8,8	15,6	17,4	12,1
Inimaginable		3,4	2,8	3,1	5,8	0,9	1,7	5,1	1,1
∞		3,9	7,6	15,4	8,7	14,2	6,5	6,4	13,2
Referencias numéricas: incontable, innumerable, incalculable, número muy grande, numeroso,…		10,7	15,6	16,3	19,2	23,9	20,8	19,6	12,1
Inagotable		1,0	2,4	3,1	2,9	1,8	1,3	2,6	1,1
Trascendente: Dios, el más allá, sobrenatural,…		2,9	3,3	3,5	6,7	8,0	6,9	5,5	13,2
Como proceso: sigue y sigue, continua, periódico, sucesión,…		2,4	3,3	5,3	7,7	8,8	4,8	6,8	7,7
No responde		10,7	9,5	6,2	11,5	8,8	12,1	12,3	14,3
Adverbio		19,0	18,0	20,3	14,4	15,0	13,0	13,6	8,8
Adjetivo		31,7	46,9	49,8	49,0	46,9	48,5	48,9	44,0
Sustantivo		18,0	10,9	9,3	10,6	8,8	9,5	9,4	6,6
Verbo		20,0	15,2	15,0	12,5	15,0	13,0	13,2	11,0

1UNIC1P13 / 1UNIC3P08	Nivel Muestra (n)	1UNI 89	1UNI 89	1UNI 87
		Definición para 2º de ESO	Definición para 2º de BTO	Definición formal
Sin fin		11,2	5,6	0,0
Interminable		18,0	3,4	0,0
Muy grande		25,8	7,9	5,6
Referencias espaciales		27,0	12,4	3,4
Indefinido		7,9	6,7	7,9
Referencias numéricas		9,0	7,9	12,4
Mediante el concepto de límite		0,0	9,0	10,2
“Es un valor al que te acercas pero no llegas”		4,5	5,6	7,9
“Algo que crece indefinidamente” o “algo que crece y continúa”		11,2	13,5	9,0
Es una representación		0,0	0,0	13,5
No responde		12,4	22,5	26,5

6PRIC2P04	Nivel Muestra (n)	6PRI 102	1ESO 107	2ESO 113
Una cantidad concreta: en cm, miles, millones, etc.		14,7	11,2	8,0
“Mucho”, “muchos metros”		6,9	6,5	3,5
Infinito		33,3	45,8	51,3
“porque siempre se puede continuar”, “nunca acaba”, etc.		17,6	17,8	20,4
Lo que tu quieras		2,9	4,7	3,5
No se puede saber		31,4	28,0	30,1
“porque depende de dónde la dibujes”		15,7	13,1	12,4
“porque es infinita”		13,7	13,1	16,8
No responde		8,8	3,7	2,7

6PRIC1P01	Nivel Muestra (n)	6PRI 103	1ESO 104	2ESO 114
Prefiero ser el segundo		46,7	51,0	50,9
“porque así puedo superar a mi contricante”, “puedo ver el número que dice el otro”, etc.		28,2	34,6	38,6
Prefiero ser el primero		29,1	20,2	19,3
“porque así dices el número más grande” o “porque puedes decir infinito”		4,9	9,6	6,1
“porque tienes más oportunidades de ganar”		13,6	3,8	1,8
Da igual quién comience el juego		18,4	26,0	27,2
El juego tendrá un final		46,6	38,5	30,7
Arbitrario: “hasta que se cansen, hasta que quieran, hasta que no no sepa decir un número”		23,3	6,7	4,4
Indefinido: “no se sabe”, “mucho”, “poco”, etc		8,7	13,5	15,8
“hasta que digas el más grande”		13,6	13,5	5,3
El juego nunca acabará		39,8	51,0	54,4
“Durará hasta que nos cansemos” o “hasta que queramos”		5,8	10,6	15,8
Asocia el término “infinito” al proceso		34,0	44,2	55,3
El infinito como número: “dices infinito y ganas”, “hasta que uno diga infinito”		1,9	8,7	7,0
No responde		0,0	1,0	0,0

1BTOC1P12	Nivel Muestra (n)	1BTO 120	1BTO 115
“Se acercan cada vez más al eje X”, “tienen una asíntota” (1)		17,5	13,0
“Tienden a que y sea cero” (2)		13,3	8,7
“Se acercan a 0” (3)		14,2	33,0
“Tienden a...”, “se acercan a...” (1) + (2) + (3)		45,0	54,8
“Las tres son infinitas”, “tienden a infinito” o “llegan a infinito”		8,3	13,0
No tienen nada en común		4,2	1,7
No responde		25,8	16,5

1BTPC2P15	Nivel Muestra (n)	1BTO 111	2BTP 120	1UNI 73
Sí está de acuerdo, se puede obtener un círculo		64,9	67,5	83,6
“pero es un proceso inacabado”		15,3	15,0	27,4
“en el infinito”, “con infinitas rectas”		11,7	19,2	31,5
No está de acuerdo, no se puede		22,5	15,8	13,7
No responde		12,6	13,3	2,7

APÉNDICE VI: Guiones y transcripción de las entrevistas

ENTREVISTA Nº: 1	FECHA: 5 – IV - 2005	HORA INICIO:	HORA TERMINO:
CENTRO: IES ENRIQUE TIERNO GALVÁN		CURSO: 2º B	NIVEL: Bachillerato
ALUMNOS: Ana (C1) y Hector (C1)			

PREGUNTAS INICIALES Y COMENTARIOS

1. ¿Qué es un punto? ¿Podrías responder de nuevo a la pregunta de los puntos contenidos en un cuadrado? ANA y HECTOR opinan que depende del tamaño.
7. Compara las líneas A, B y C... ANA: "A porque si la estiramos es la mayor y también contiene más puntos" y HECTOR: "A porque es media circunferencia y mide más que B y C; A tiene más puntos porque es la más larga"
----
2. Tras quitar un millón de números... ANA: "quedan infinitos y entonces no podemos saber con exactitud cuántos quedan" y HECTOR: "quitemos la cantidad que quitemos seguirá habiendo números indefinidamente"
Pero ¿seguirán quedando más o menos números que antes?... entonces ¿hay dos tipos de infinito en este caso?
Comparar conjuntos infinitos... Los conjuntos de ambas parejas ¿son infinitos?, ¿se pueden comparar?, ¿hay diferentes tamaños de infinito?
11. Lanzar un dado infinitas veces y apuntar el número de unos, doses y múltiplos de dos... ANA: "No se puede saber porque saldrán infinitos" y HECTOR: "No se puede saber ya que según el azar y la suerte no se sabe cuándo y cuál saldrá.
----
3. Dividir un segmento por la mitad sucesivamente... ANA: "la parte que queda será muy pequeña pero se podrá seguir dividiendo" y HECTOR: "no tendría final, seguiría siendo una sucesión de números, pero muy pequeños"
¿Cuál será la naturaleza de "lo que queda al final"?... ¿un punto?, ¿un segmento?...
8. Situar infinitos segmentos en un segmento finito... ANA: "No es posible porque el segmento tiene una longitud determinada" y HECTOR: "Sí, porque como no sabemos la longitud del segmento, sería indefinido" La suma de una cantidad infinita de objetos, ¿puede dar un resultado finito?
9. La suma de infinitos diámetros en el interior de un triángulo... ANA: "No se puede saber, porque no sabemos el diámetro de cada círculo, pero sería una cantidad finita" y HECTOR: "Una cantidad finita, ya que el triángulo tiene fin"
----
6. 2+1+1/2+1/4+1/8+ … ANA: "Se va aproximando al número cero" y HECTOR: "crece indefinidamente porque se le van sumando números aunque sean cada vez más pequeños"
----
10. ¿Dónde hay más números reales en [0, 1] ó en [0, ∞)? ANA: "En los dos hay infinitos números reales y no se puede saber en cuál hay más ya que hasta llegar al uno hay muchas cifras decimales y en el otro intervalo hay infinitos números" y HECTOR: "Hay muchos más en [0, ∞) que en [0, 1] ya que este intervalo tiene principio y fin". Incidir en las justificaciones dadas.
15. ¿Qué imagen te sugiere el infinito?, ¿con qué lo asocias?

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

VIOLETA:
1. "el número de puntos en el interior de un cuadrado depende del grosor, distancia entre ellos, ..."
7. "A porque recorre más espacio; A porque es de mayor longitud"
2. "Quedan ∞ - un millón = ∞"; "los dos tienen infinitos, por tanto tendrán los mismos números pero el primero tendrá más por empezar antes"; "tienen más los naturales que los múltiplos de tres".
11. "Habrán salido infinitos unos, doses y más múltiplos de dos".
3. "Al final se obtiene un punto (·) porque es la parte más diminuta"
8. "No, porque el segmento tiene unos límites y podrías situar un número determinado de segmentos"
9. Aplica Pitágoras. Pero entonces la suma de infinitos objetos da un número finito, contradicción con la cuestión 8
6. "Se acerca a 4 con algo o incluso 5 pero la progresión será muy pequeña e irá creciendo indefinidamente"
10. "Hay más en [0, ∞) porque es un espacio mayor".

ENTREVISTA Nº	FECHA: 12 – IV - 05	HORA INICIO:	HORA TERMINO:
CENTRO: IES JUAN DE MAIRENA		CURSO: 2º B	NIVEL: ESO
ALUMNOS: Mª Carmen (C2) y Sergio (C2)			

PREGUNTAS INICIALES Y COMENTARIOS

1. El juego; gana el número más pequeño. Mª CARMEN: “Estrategia: poner números decimales como 0.0001", “prefiero ser la segunda”; “Mucho tiempo”. SERGIO: “Estrategia: poner en la cifra decimal muchos ceros y luego un uno”; “prefiero ser el segundo”; “Mucho, una hora o más poniendo ceros”. Pero, ¿porque prefieres ser el segundo?, ¿cuánto es mucho tiempo?

----

2. Dividir un segmento sucesivamente por la mitad. Mª CARMEN: “Quedaría muy poco o casi nada del segmento”. SERGIO: “Un átomo ya que un átomo no se puede dividir”. ¿Qué ocurre si trabajamos con números en lugar de con segmentos?

----

3. Números entre 1.9 y 2; entre 1.999... y 2. Mª CARMEN: “1.09"; “No, porque es periódico”. SERGIO: “1.97"; “No, porque el decimal es periódico y si le añado lo más mínimo se convierte en 2". ¿Son iguales 1.999... y 2?.

----

4. La línea más larga. Mª CARMEN: “Depende del sitio donde la pueda dibujar”. SERGIO: “Sería infinita, ya que nos podemos tirar toda la humanidad haciéndola”. ¿Podría tener cualquier forma?

----

5. El fin de la sucesión 0.1, 0.01, 0.001,... Mª CARMEN: “No, porque siempre tendremos el 1 detrás”. SERGIO: “No, porque siempre va a seguir existiendo ese uno”.

----

6. A: 1, 2, 3, 4, 5, 6,.... y B: 4, 8, 12, 16, 20, 24,.... Mª CARMEN: “B alcanzará un valor mayor”. SERGIO: “Las dos alcanzarán un valor tan grande como queramos porque podemos seguir las sucesiones hasta el infinito”.

----

7. Puntos en el interior de un cuadrado. Mª CARMEN: “No se podría saber, cabrán infinidad de puntitos”. SERGIO: “Trillones en los dos cuadrados, ya que los podemos hacer minúsculos para que quepan muchos”. ¿Qué forma tienen los puntos?

----

8. Unir alambres. Mª CARMEN: “Infinito, porque hasta que no se terminara no se sabría la longitud”. SERGIO: “Infinito, porque podemos pegar un infinito de trocitos de alambre”. ¿Siempre que sumemos infinitas cantidades el resultado será infinito?

ENTREVISTA Nº:	FECHA: 13 – IV - 05	HORA INICIO:	HORA TERMINO:
CENTRO: IES JUAN DE MAIRENA		CURSO: 2º Y	NIVEL: BCHTO
ALUMNOS: Víctor (C1) y José (C1)			

PREGUNTAS INICIALES Y COMENTARIOS

1. Puntos en el interior de un cuadrado. VICTOR: "Ambos se pueden rellenar con infinitos puntos, ya que unpunto no tiene dimensiones, pero el de 30 cm tendrá nueve veces más que el primero". JOSÉ DAVID: "En ambos casos caben infinitos puntos" Efectuar una crítica mutua. ¿Qué es un punto?
7. Comparar las líneas A, B y C. VÍCTOR: "Calcula las longitudes, A"; "Todas tienen la misma cantidad de puntos, pero en A habrá un infinito mayor". JOSÉ DAVID: "Calcula las longitudes, A"; "Todas tienen igual ya que contienen infinitos puntos".

----

2. Borrar un millón de números. VÍCTOR: "Quedan infinitos, pero $\infty-10^6 < \infty$"; "ambos tienen infinitos pero el primero tiene más" y JOSÉ DAVID: "Infinitos, ya que $\infty-10^6 = \infty$"; "Igual en ambos"; "Igual en ambos". ¿Hay distintos tamaños de infinito?
11. Unos, doses y múltiplos de dos en el dado. VÍCTOR: "Todos los números del dado habrán salido un mismo número de veces, infinitas". JOSÉ DAVID: "Todos contienen el mismo número de elementos"

----

3. Dividir un segmento por la mitad indefinidamente. VÍCTOR: "Infinitas divisiones del segmento". JOSÉ DAVID: "Un punto, ya que un punto no se puede dividir". ¿Qué ocurre se convertimos el problema geométrico en aritmético?
16. Límite de $1/2^n$. VÍCTOR: "0". JOSÉ DAVID: "0"
8. Infinitos segmentos dentro de otro segmento. VÍCTOR: "Sí, menores que AB". JOSÉ DAVID: "Sí, haciendo, por ejemplo, los segmentos $l/2$, $l/3$, $l/4$,..."

----

4. Origen y final. VÍCTOR: "Su origen sería $1/\infty$ y este tendería a 0 y su final sería $1/1=1$". JOSÉ DAVID: "Origen $1/\infty$, que es infinitamente pequeño pero mayor que 0 y final ∞ "

----

5. Dividir 5 entre 0. VÍCTOR: "No se puede dividir entre 0 pero sí se puede calcular un valor aproximado mediante límites". JOSÉ DAVID: "∞, ya que el denominador es infinitamente pequeño".
13. $f(x)=1/x$ cuando $x=0$. VÍCTOR: "La función se aproximará a infinito".JOSÉ DAVID: "si $x=0$ entonces $y=\pm\infty$"

----

6. 2+1+1/2+1/4+1/8+…. VÍCTOR: "Se acerca a 4 por la izquierda". JOSÉ DAVID: "Crece indefinidamente, pero cada vez más lento"
9. Círculo en un triángulo. VÍCTOR: "Por Pitágoras, suman $\sqrt{140}$ ". JOSÉ DAVID: "Una cantidad infinita, porque existen infinitas circunferencias"

----

10. Mas números en [0, 1] o en [0, ∞). VÍCTOR: "En ambos hay infinitos números reales". JOSÉ DAVID: "En ambos hay los mismos, ya que hay infinitos números en ambos intervalos"

ENTREVISTA Nº	FECHA: 26 – IV - 05	HORA INICIO:	HORA TERMINO:
CENTRO: CENTRO ESCOLAR AMANECER		CURSO: 2º A	NIVEL: ESO
ALUMNOS: Juan Carlos (C1) y Diego (C2)			

PREGUNTAS INICIALES Y COMENTARIOS

1. El juego; gana el número más grande/más pequeño.
JUAN CARLOS: “No prefiero ser el primero, ya que si dice 20, yo podría decir 50 y ganarles”; “duraría un tiempo infinito, ya que los números son infinitos”.
DIEGO: “No hay estrategia”; “Me da igual quien empiece”; “Duraría una infinidad de tiempo”

----

2. Dividir un número/segmento sucesivamente por la mitad.
JUAN CARLOS: “Se obtendría una fracción cuyo denominador sería infinito: 2/2, 1/2, 1/4, 1/8,...”
DIEGO: “Siempre te va a quedar un trozo, aunque cada vez más pequeño”

----

3. Borrar un millón.
JUAN CARLOS: “Los que había menos un millón”; “El primero”; “El primero”

4/3. Números entre 1.9 y 2; entre 1.999... y 2.
JUAN CARLOS: “Sí, 1.927"; “No, porque si después del 1.9 va el 2, al ser 1.999...., el número decimal es infinito y no habría otro número entre esos dos”
DIEGO: “Sí, 1.91"; “No, porque el nueve es periodo y eso significa que es infinito”

----

4. La línea más larga.
DIEGO: “Infinita o hasta que el que la dibuje se muera”

----

5. Restar 7.424242.... - 3.1515151...

JUAN CARLOS: “ $4,\overline{27}$ ”

----

5. El fin de la sucesión 0.1, 0.01, 0.001, ...
DIEGO: No, puedes seguir poniendo 0.00000....1 hasta que te aburras, pues los ceros no se van a acabar”

----

6. Ordenar conjuntos.
JUAN CARLOS: “El menor es el de los puntos en el interior de un cuadrado y el mayor es $\mathbb{N}$”

----

6. A: 1, 2, 3, 4, 5, 6,.... y B: 4, 8, 12, 16, 20, 24,....
DIEGO: “Las dos alcanzarán un valor tan grande como queramos, ya que puedes seguir poniendo números hasta hartarte, porque son infinitos”

----

7. Puntos en el interior de un cuadrado.
JUAN CARLOS: “Sabiendo las dimensiones del punto se podría calcular mediante distintas operaciones”
DIEGO: “Los puntos no existen”

----

8. Unir alambres.
JUAN CARLOS: “Infinito, ya que se podría dividir entre 2 tantas veces como quiera”
DIEGO: “Infinito, pues si sigues uniéndolos no vas a terminar nunca”

1º ESO

Entrevista nº: 4	Tipo: C1 / C2	Curso: 1º ESO	Cinta: 2	Cara: A	#: 150
Centro: IES Enrique Tierno Galván		Alumnos: Álvaro / Jesús			

JL: Álvaro, con respecto a la primera pregunta del cuestionario, en la que debías responder si existía una estrategia para ganar, tú escribiste que tal estrategia consistía en sumar cierto número al que diga el otro; a mi me gustaría preguntarse si crees que este juego se acabará en algún momento
A: No
JL: ¿Por qué?
A: Bueno, sí, pero cuando se canse el otro
JL: Bien, pero supongamos que sois dos robots y disponéis de pilas para rato
A: Entonces, nunca acabaría
JL: pero ¿por qué?
A: Porque si yo sumo cierto número, el otro también puede sumar otro número y así constantemente
JL: Entonces, ¿los números nunca se acaban?
A: No
JL: ¿Cuántos números hay?
A: Infinitos
JL: ¿Y qué significa infinito para tí?
A: Es que no lo puedo definir
JL: En tu caso, Jesús, el juego consistía en obtener el número más pequeño y tú decías entonces que la estrategia era escribir todos los ceros posibles
J: Sí, delante
JL: delante ¿de qué?
J: de cualquier número
JL: Por ejemplo si yo digo 100, ¿cuál dirías tú?
J: cero cien... bueno... es que no se lo que puse
JL: Sí, lo que escribiste fue “poner todos los ceros posibles antes del 1"
A: Sería cero coma cero, cero, cero, cero,...
J: Sí, a eso me refería a la coma
JL: En efecto, si yo digo 0.5...
J: yo diría 0.05
JL: muy bien, entonces ¿tampoco se acabaría este juego?
J: No, es que los números son infinitos y...
JL: ¿nunca acabarían?
J: no

JL: Respecto de la segunda pregunta, Álvaro, se trataba de dividir un número entre dos repetidas veces,...; tú decías que en tal caso el resultado sería un número impar por que al dividir entre dos la división no saldría exacta, ¿me podrías explicar esto?
A: pues, por ejemplo, 70 entre 2 da 35; 35 entre 2 da 17 y pico y ahí ya no podría continuar
JL: ¿por qué?
A: ¡hombre!, sí podrías continuar pero sacando decimales
JL: pero no te decían que no pudieras
A: ...
JL: si seguimos entonces, ¿qué ocurriría?
A: pues que sería infinito, llegaría muy lejos
JL: bien, pero al resultado ¿qué le ocurriría?
A: pues que se haría más pequeño
JL: pero ¿llegaría a algún valor, superaría algún valor,...?
A: sí, pasaría por debajo de cero
JL: ¿por debajo de cero?, ¿tu crees que el resultado se haría negativo si seguimos dividiendo?
A: sí
JL: Jesús ¿tú piensas lo mismo?
J: es que no entiendo la pregunta
JL: sí, tu imaginate que coges un número y lo divides entre 2, por ejemplo 4, ¿4 entre 2?
J: 2
JL: 2 entre 2
J: 1
JL: 1 entre 2
J: 0.5
JL: 0.5 entre 2
J: 0.25,.... se pararía en el 0
A: es verdad, no sería negativo
JL: ¿se pararía en el 0?, ¿no podría pasar nunca de cero?
J: No, porque no dividimos números negativos
JL: muy bien, ¿y conseguiríamos alcanzar el cero si efectuáramos muchísimas divisiones entre 2?
J: depende si es impar no y si es par si
JL: ¿Por qué?, ¿cojamos el 3, por ejemplo?, 3 entre 2 da 1.5, 1.5 entre 2 da 0.75,...
J: ¡ah!, sí, claro
JL: ¿entonces?
J: sí, porque si... ah no, no se puede porque impar entre par siempre va a dar impar
JL: ya, pero ya hemos pasado a los decimales,...
J: sí, sí se puede llegar
A: llegaría hasta las diezmilésimas
JL: ¿y más allá de las diezmilésimas?
A: sí también se puede
JL: pero si seguimos dividiendo ¿llegaríamos al cero?
A: no
JL: ¿por qué?
A: no se
JL: ¿y tú Jesús?
J: no se, yo creo,..., es que no se qué creer
A: no, porque los decimales son infinitos
JL: pero ¿qué quieres decir con que los decimales son infinitos?, ¿que después del cero hay infinitos decimales?
A: sí, puede haber infinitos decimales y nunca llegaría al cero exacto, sería siempre cero coma algo

JL: En tu caso, Jesús, tenías que imaginar que dividías reiteradamente un segmento entre dos, ... ¿qué crees que quedaría después de dividirlo muchas veces?
J: nada
JL: ¿Quieres decir que llegaría un momento en que ya no podríamos cortar más segmentos porque nos habríamos quedado sin segmento?
J: sí
JL: entonces, observa lo que hemos hecho en el caso de Álvaro, con los números me habéis dicho que siempre podríamos dividir y nunca acabaríamos, nunca llegaríamos a cero; con los segmentos ¿no pasa lo mismo?
J: no, porque si te dan un segmento y me dices que es así, entonces es limitado y llega un momento en que ya no se puede dividir más
A: No, pero pasaría lo mismo, tu mides el segmento y si te da 5 lo vas dividiendo entre 2 y así te daría también cero coma no se qué como en el caso anterior
J: No, porque si tu, por ejemplo, una regla la estás partiendo entre dos llegará un momento en que ya no la puedas partir más...
JL: ¿por qué?
J: porque ya no hay más trozos... ah no, sí se puede
JL: ¿por qué has cambiado de opinión?
J: porque sacando decimales sí se puede
JL: claro porque midiendo el segmento ¿qué le podemos atribuir?
A: la medida, un número

JL: En otro ejercicio, que era común a ambos, se os preguntaba si había algún número entre 1.9(periodo).... y 2
J: ¿qué es periodo de nueve?
A: 1.9999....
JL: en efecto; aquí Álvaro dijo en su momento que no era posible porque 1.999... es el último número para pasar al 2, ¿sigues pensando lo mismo?
A: sí
JL: pero para ti estos dos números son el mismo número o son distintos?
A: dos números distintos
JL: pero entre dos números distintos ¿siempre podemos poner otro distintos?, ¿porqué tú no puedes?
A: porque es el último paso
JL: ¿por qué el último paso?
A: porque si le sumas a 1.9999... un número
JL: ¿qué número?
A: cero coma cero, cero, cero,... no sé cuánto, pasarías al 2
J: yo sabía qué quería decir lo del gorro encima del nueve, pensaba que era un fallo del ordenador
JL. Creo que te lo aclaré en su momento, y respondiste lo mismo que Álvaro, más o menos, y tú ¿qué opinas ahora?, ¿piensas lo mismo?
J: No, no hay números entremedias, porque si tu quieres sacar sólo dos décimas, por ejemplo, sería 1.99 y el siguiente sería el 2, no habría números entremedias
JL: entonces entre 1.99 y 2, ¿no habría números?
A: sí, si habría, por ejemplo 1.995
J: no, porque es periódico
JL: pero tu has dicho 1.99
J: ah, sí, si se podría
JL: y entonces, ¿1.9(periodo) y 2 no son el mismo número?
J: no, hay un paso... pero es un paso, por ejemplo a 1.99 le tienes que sumar 0.01... o sea es como si en tres números para llegar del 1 al 3 está el 2, pero aquí del 1 al 2 no hay...
JL: pero ese paso... si ponemos infinitos nueves, ¿cuál es el paso?
A: no hay paso
J: nunca
JL: entonces, si no hay paso, ¿no sería el mismo número?
J: no, porque se escriben distintos
A: no, porque lo que va después de la coma es muy grande, por ejemplo 1.99999.... para llegar al 2 falta 0.1, ..., pues eso...

JL: En la cuestión 7 de ambos, se os preguntaba por los puntos que caben dentro de un cuadrado. No os diré qué escribisteis; me gustaría que me dierais ahora vuestra opinión
A: cabrían infinitos
JL: ¿por qué?
A: porque lo rellenarías y después de rellenarlo todo con puntos estaría todo lleno de color y luego seguirías escribiendo por encima de esos puntos
JL: Bien, pero imagínate que el cuadrado es una caja y cuando ya está oscuro ya no puedes echar más...
A: pues entonces depende de lo grande o pequeños que sean los puntos
JL: y ¿qué es un punto para tí?
A: pues... un círculo... que tiene... el área coloreada pero que sea así de pequeño (lo marca con el rotulador)...
JL: pero si lo marcamos con un rotulador de punta gorda... ¿también sería un punto?
A: pues que sería un punto más grande
JL: Jesús, ¿tu está de acuerdo con eso?
J: Sí, dependiendo de...
JL: entonces ¿podría haber un punto todo lo grande que quisiéramos?
J: sí, claro, lo que quieras
JL: por ejemplo, un CD ¿también podría ser un punto?
J: de lejos sí
A: claro de lejos
JL: y si lo vemos aquí, de cerca...
J: es que si lo vemos de cerca... sería un círculo
A: para ser un punto así de grande, pues yo creo que no hay puntos tan grandes
JL: tú Jesús, ¿qué opinas de los puntos que caben dentro de un cuadrado?
J: pues que dependiendo de su tamaño cabrían más o menos

JL: en la pregunta 8, tenemos una serie de segmentos que ibamos uniendo y se os preguntaba sobre la longitud total
J: yo creo que lo contesté mal
JL: ¿por qué?
J: porque puse una cantidad y no hay ninguna cantidad porque no se termina nunca...

JL: ¿tendría final?, ¿pero cuántos segmentos tienes aquí?
A: infinitos
J: ah, pero estos puntos ¿no son...?
JL: esos puntos significaban que seguíamos cortando por la mitad
J: ah, yo pensaba que era otra cosa... pues, entonces mediría infinito
JL: ¿por qué?
J: porque no acabarías de añadirle segmentos
JL: y tú Álvaro, ¿estas de acuerdo?
A: Sí, porque para llegar al tamaño de un átomo le falta muchísimo y sería 0.0000....1 cm lo que mediría el segmento siguiente y así el siguiente...
JL: Entonces, si sumamos infinitos segmentos, la suma ¿será infinita, por pequeños que sean?
A: Claro, siempre se va a ir alargando
J: sí, aunque lentamente

JL: En el ejercicio 3 de Álvaro, Jesús le puedes echar un vistazo, se trataba de borrarle un millón al conjunto de los números naturales...
A: No se puede
JL: ¿por qué no se puede?
A: porque no es una cantidad fija
JL: Bueno, es cierto que no conocemos el valor del último pero imagínate que todos escritos y vamos borrando el 1, el 2,...
A: pero no hay infinitos
J: claro, nunca termina
JL: ¿no hay infinitos?
A: sí, si hay infinitos
JL: entonces, ¿porque no podemos borrar un millón?
A: porque no conocemos el fin
JL: ya, pero un millón está antes del fin ¿no?
A: hombre, sí
JL: estonces hasta un millón sí podríamos borrar
A: sí, pero entonces también podríamos borrar todos
JL: ya, pero si borramos un millón, ¿cuántos quedarían?
A: pues quedarían infinitos, porque nunca se acaban
JL: y en tal caso, ¿cuándo habría más números, antes o después de borrar un millón de números?
A: en los dos casos hay infinitos
J: pero es que has quitado un millón
A: da igual, también sería infinito,... es como si al espacio le quitaras un planeta, sería más pequeño o más grande,... sería igual porque es infinito
JL: pero tendría un planeta menos
A: claro, pero como habría infinitos planetas ese planeta no se ha dado cuenta
JL: Jesús, ¿tu opinas lo mismo?
J: pues yo pienso que si los números son infinitos pues si hay un punto final, no se, cualquier número, y uno tiene un millón menos pues es más pequeño
JL: ¿quieres decir que aunque sean infinitos uno es más pequeño que otro?
J: pues, ... es que yo, ... si yo tengo dos filas de números y voy 1, 2, 3, 4, ... , los dos a la vez, y si a uno le quito un millón pues este es más grande... si van a la misma altura,... si uno va más rápido subiendo de números lo puedo volver a coger
JL: Álvaro y en el caso en que comparamos los naturales y los múltiplos de tres... ¿qué te parece?
A: pues también infinitos, aunque esta (la de los naturales) sería aquí hasta llegar al 12, doce números y en cambio, en la otra hasta el 12 serían cuatro, la otra avanzaría más rápida pero llegarían las dos a infinito
JL. Entonces, imagínate que en una bolsa echamos bolitas con los números naturales y en la otra bolitas con los múltiplos de tres...
A: depende de la capacidad del recipiente dónde se metan
JL: Una bolsa gigante
A: entonces cabrían muchísimas
JL: ¿dónde habría más canicas?
A: en las dos habría los mismos, porque si en una echas el 1 y en la otra el 3, en esta el 2 y en la otra el 6,... habrían infinitos
J: hombre el mismo número de canicas sí, pero del número de esto... de 3 y 1... no... porque si tú tiras...
JL. Entonces si jugamos con canicas del 1 al 100....
A: ah, entonces habría más en esta (en los naturales)
JL: y sin embargo, si jugamos del 1 al infinito ¿habría las mismas?
J: sí
A: sí, porque no acabarían

JL: Jesús, en el ejercicio 6 se te pide comparar dos series de números, los naturales y los múltiplos de 4...
J: es que la puse mal... yo se que las dos no van a llegar al final porque son interminables... (lo vuelve a leer).... si llegamos hasta el 24 las dos llegan igual....
JL: luego ¿ambas llegan a un número tan grande como queramos?
J: llegar van a llegar, si van al mismo tiempo, llegar van a llegar, una más pronto y otra más tarde, eso si hay un número límite
A: pasa lo mismo que con las canicas
JL: pero la pregunta es algo distinta... en el caso anterior se os pregunta sobre la cantidad de números que había y ahora se os pregunta si ambas series de números van a llegar al mismo número
A: es que aquí se saltan números, pero llegarían al mismo
J: es que si yo el número más grande que me imagino es un millón, y vamos en parejas llegaría más lejos el B...
JL: ¿más lejos o antes?
J: antes, antes

JL: En tu ejercicio 6, Álvaro, se te pedía comparar una serie de cantidades... granos de arena, número de estrellas, ... y te recuerdo que escribiste que no se podían ordenar esas cantidades porque no sabías...
A: porque no sabía la cantidad exacta
JL: bien, pero ¿te parece que todos esos conjuntos son infinitos o lo son sólo algunos o ninguno?
A: No, unos son finitos y otros infinitos
JL: ¿y cuáles serían los infinitos?
A: pues el número de estrellas, los números naturales y el número de puntos que caben en... no, no ese sería finito
JL: ¿esos dos serían infinitos?
A: Sí, y luego el número de granos de arena, aunque los contaras todos pero serían muchísimos

JL: pero ¿no sería infinitos?
J: claro, porque si tú los cuentas serían una barbaridad pero alguna vez se terminarían

JL: y la última cuestión sobre la que quería hablar es la número 5 de Álvaro... se os daba la resta 7.4242... - 3.1515...
J: no se puede dar un resultado porque los números son infinitos y la resta siempre sigue
A: claro, es que no se sabe donde termina
JL: pero, ¿no se podría hacer un cálculo simplificado...?
J: ¿cómo simplificado?.... ¿que le quitemos hasta aquí por ejemplo?
JL: si dejamos 7,42 menos 3.15, ¿esto lo podríamos hacer?
J: no
A: sí
J: ah, sí
JL: a ver Jesús hazla
J: 4.27
JL: 4.27, y a partir de aquí ¿no serías capaces de...?
J: sí, sería 4.272727...
A: claro
JL: luego ¿podemos hacer la resta?
J: sí, pero nunca terminaría
JL: entonces...
A: si ponemos así (marca un arco sobre el 27)
JL: y eso ¿todo el mundo entendería lo que significa?
A: no terminaría... hemos hecho el infinito
J: hombre así sí, el que vea esto va a decir que eso va a dar 4.272727 pero no terminaría

JL: Cuando escucháis la palabra infinito que os viene a la cabeza
A: el universo
JL: ¿y a ti?
J: no se... me sale como unas nubes,... no como unas nubes sino como un polvillo blanco que se ve así... bueno que se ve blanco pero luego se ve azul... no se...

Entrevista nº: 14	**Tipo:** C2	**Curso:** 1º ESO	**Cinta:** 4	**Cara:** A+B	**#:** 272
Centro: IES Juan de Mairena		**Alumnos:** Mario / Lorena			

JL: En la primera cuestión se trataba de encontrar el número más pequeño para ganar en el juego que ahí se os describe... ¿Hay alguna estrategia para ganar en este juego?
M: No... porque los números son infinitos
JL: ¿Qué número dirías tu?
M: Pues cero coma... no se, serían infinitos
JL: Pero cero coma ¿qué?
M: Pues cero coma cero, cero, cero...
JL: Y con eso ¿te asegurarías que Lorena no lo superaría?
M: No, porque ella podría decir más ceros
JL: Entonces, Lorena, ¿tu preferirías ser la primera en comenzar este juego?
L: No, yo prefiero ser la segunda porque yo diría un cero más e iría ganando, pero da igual porque el luego me volvería a ganar
M: Es que si hay un sólo turno pues sí, pero como hay más turnos es indiferente
L: Es que el juego no se puede acabar, lo tendrías que parar tu
JL: Claro como nos han prohibido el cero...
L: Sí, entonces puedes añadir todos los ceros que quieras

JL: En la segunda pregunta, tomamos un segmento y lo vamos partiendo por la mitad sucesivamente...
L: Pues habría que mirarlo con lupa pero se podría seguir partiendo infinitamente
JL: ¿No se acabaría nunca?
L: No
M: No se, estoy pensado en Tecnología, en lo del átomo y todo eso... llega un momento en que ya no lo puedes partir más
L: No, pero ahora se ha visto que el átomo se puede partir más, sigues ampliando y puedes seguir partiendo...
M: Pero es que llega un momento en que ya no se puede partir más
L: Pero es que amplías el punto de vista...

JL: ¿Hay algún número entre 1,9 y 2?
L: Hay muchísimos... 1,99, 1,99999,... se pueden poner muchísmos
JL: En el segundo apartado se refieren a 1.999... y 2
M: Hay no hay ninguno, porque no... porque en cuanto subas un número aquí (señala el 1.999...) en cualquier unidad pues ya llega a 2
L: Sí, yo estoy de acuerdo porque el periodo significa poner todos los nueves que puedas y como son infinitos no puedes poner más...
JL: Pero entonces estos dos números ¿son iguales?
L y M: no, no
JL: Pero nos han enseñado que entre dos números distintos siempre podemos poner uno en medio...
L: Sí, pero es que este es un caso... es que con subir un puntito ya llega a 2...
JL: Pero, si consideramos distancias... entre este punto y este otro yo puedo poner otro, y entre estos dos más cercanos también,... entonces parece que entre dos números... ¿no podríamos encontrar un huequecito entre esos dos?
L: es que el nueve es periódico, no se acaba, enseguida va el 2
JL: y ¿por que no podemos decir que son iguales?
L: porque queda un poquito muy pequeño entre los dos

JL: En la pregunta 4, nos pregunta sobre la línea más larga.
M: No existe la línea más larga porque siempre puedes estar dibujando
JL: Pero ¿mediría mucho o poco?
M: Pues infinito
JL: ¿Y no podríamos medirla?
L: No, porque puede ser tan larga que no se podría medir
JL: ¿Podría tener cualquier forma?
L: claro, mientras no se cierre ni se corte
JL: Y si yo tomase un folio en blanco e hiciese una línea curva que de vueltas y vueltas, que se cruza una y otra vez, ¿podría ser infinita?
L: No, porque luego hay cosas más grandes que esto
JL: En la pregunta 5, nos dan 0,1, 0,01, 0,001,... ¿llegará a cero en algún momento?
L: No, no, porque podemos seguir poniendo ceros y ceros y luego el 1
JL: ¿Ni aunque lo hagamos muchísimas veces?
L: no, porque nunca se acaba

JL: En la pregunta 6, nos dan dos series A y B y nos piden compararlas...
M: Yo creo que sería la c), ya que podemos escribir números hasta el valor que queramos
L: Sí, estoy de acuerdo
JL: ¿No "ganaría" la B?
L: No, porque si con la B paramos y seguimos con la A alcanzamos la B
JL: Entonces si nos proponemos llegar a cien millones, ¿podemos llegar con ambas?
M y L: Sí
JL: ¿y no habrá diferencia entre las dos?
L: Hombre habrá que parar en la B hasta que la alcance la A ya que esta es menor
JL: ¿y dónde habría más números?
L: En la A
JL: Pero ¿hasta dónde llegas estas dos colecciones de números?
L: Hasta el infinito, todos los números son infinitos
JL: ¿Estás de acuerdo Mario que la A tiene más números que la B?
M: Sí, si
JL: Consideremos el siguiente experimento... Escribimos en bolas de billar los números de ambos conjuntos,... los introducimos en dos bolsas gigantescas... y las ponemos en una balanza
M: Pero hasta llegar a diez millones o...
JL: No, no todos los números
M: Pero eso es imposible porque los números son infinitos
JL: Bueno podemos imaginarnoslo... ¿Pesarían las dos bolsas igual?
M: ¡¡Si es que los números no se pueden medir porque son infinitos?!!
L: Vamos a ver, esto va a ser... la A tiene que tener 4 veces más bolas que la B...
JL: Luego la bolsa A va a pesar más
L: ¡Es que los números son infinitos y entonces no se puede acabar, no se puede acabar!
JL: Pero si lo que hacemos es ir echando una bola a cada bolsa... un número natural a una bolsa y un múltiplo de cuatro a la otra bolsa y así sucesivamente...
L: ¿Hasta qué número?
JL: Todos, un montón gigantesco... Cuando las hemos echado todas ¿dónde habrá más?
L: Es que si llegamos hasta una cifra exacta, va a haber más números... pero si llegamos al infinito no tiene porqué haber más números
M: Pero, vamos a ver tu has dicho lo de las canicas... entonces, si pones en una el 1 y en otra el 4 van a pesar lo mismo en el caso de antes...
L: Pero es que Mario estamos hablando del número de canicas
JL: No, no, se refiere al caso anterior
M: Pesan igual, pesan igual
L: Pero si llegamos a una cifra exacta pesaría 4 veces la A más que la B
JL: Sí, pero si vamos echando simultáneamente bolas...
L: Si eso es lo que yo quiero decir... mira si echamos tres aquí y tres aquí... pues
JL: Claro, cuando tu hayas echado hasta el cien habrás echado 100 bolas y Mario también habrá echado 100 bolas, sólo que las suyas llegarán hasta el 400...
L: Entonces echaríamos las mismas bolas pero pesarían cuatro veces más... bueno, el va a tener una cifra cuatro veces mayor que la mía, pero...
JL: Bien, esto es si echamos cien, si echamos mil ocurrirá lo mismo... pero y si las echamos todas ¿qué ocurrirá?
L: Siguen pensando igual aunque esta tenga más cifras...
JL: Ya pero ahora no me refiero a la pregunta que aparece en el cuestionario... Os pregunto por la cantidad de canicas...
L: No lo entiendo
JL: Sí, si llego hasta el 12, ¿cuántos naturales hay?
L: 12
JL: ¿Y múltiplos de 4?
L: 3
JL: Luego, si nos paramos en el 12 hay más naturales que múltiplos de 4, ¿no?
L y M: sí
JL: Si nos paramos en el 100
L: también
JL: Pero si seguimos con los números hasta el final, ¿creéis que habrá más de unos de que de otros?
L: Es que no se acaban y entonces ¿cómo va a haber más de uno que de otro?

JL: En la pregunta 7 nos preguntan sobre la cantidad de puntos que caben en el interior de un cuadrado
L: Depende del tamaño del punto y del cuadrado
JL: El cuadrado de 10 cm de lado
L: Bueno, si son puntitos, puntitos pues serían millones, es infinito, por ejemplo...
JL: si fueran ¿de qué tamaño serían los puntos?
L: mini, minienanos.... serían infinitos
JL: ¿como la punta del rotulador habría infinitos?
L: sí

JL: ¿y en el de 30 cm?
L: depende del tamaño...
JL: como los anteriores
L: Pues habría más
JL: Pero ¿habría también infinitos?
L: Claro, claro
JL: ¿y serían dos infinitos iguales o uno mayor que otro?
L: Es que... en los dos casos son infinitos... depende los que quieras poner en cada uno
M: Yo pienso lo mismo pero no serían infinitos... tu pondrías muchos pero llegaría un momento en que no cabrían más
JL: Pero estás de acuerdo con Lorena en que depende del tamaño de los puntos
M: Sí, si los haces más pequeños cabrán más y si los haces más grandes cabrán pocos
JL: Entonces, un punto tamaño ¿y forma?
M: ¿?
JL: (dibujos círculos de distintos tamaños). Todos estos ¿serían puntos?
L: Pues claro... pero así llenas el cuadrado en un segundo... además van a quedar espacios... aunque podríamos meter puntitos más pequeños
JL: Entonces, un punto tiene tamaño, ¿pero hasta cuándo? Un círculo del tamaño de un CD ¿es un punto?
L: Sí, mientras que sea todo así... relleno, que no sea una circunferencia... será un punto
M: Yo no creo que todo sea un punto... Un punto es como una mancha redonda...
JL: Pero si lo ves con una lupa...
M: No se, depende con qué lo mires... si miras esto con unos prismáticos pues se ve muy grande... pero un CD no es un punto
L: Pero es que depende del tamaño que quieras utilizar; puedes hacer uno como esta clase

JL: En el ejercicio siguiente unimos una serie de segmentos cada uno la mitad del anterior...
L: La d)
JL: O sea, ¿mediría infinito?
L: Sí, porque como cada vez unimos la mitad y la mitad...
M: Sí, yo digo lo mismo
JL: Bien, me gustaría plantearos esta otra cuestión. Consideremos un segmento de 1 metro. Situamos en su interior un segmento de medio metro que llegaría hasta por aquí, a continuación situaríamos otro de un cuarto de metro que llegaría hasta aquí... y así sucesivamente... ¿Creéis que nos saldríamos del segmento de 1 metro?
L: No, claro que no
JL: Entonces todos estos segmentos de aquí los podríamos meter dentro de un segmento que mediría...
L: ¡Un metro!
JL: y con este otro metro que tenemos aquí arriba tendríamos un segmento que mediría...
L: ¡Dos metros!
JL: Luego, ¿qué me decís de vuestra respuesta anterior?
L: A ver...
JL: Sí, antes habéis dicho que al juntarlos todos mediría infinito el nuevo segmento y ahora decís que mediría dos metros...
-Silencio-
M: No se... yo creo que...
L: Ah, pero si luego la mitad la seguimos partiendo y poniendo y poniendo... entonces... no se
M: Pero sí pasaría del extremo...
L: Pero si ya los has metido todos... ¿cómo vas a pasar?
M: ¿?

JL: ¿Qué se os ocurre al pensar en la palabra infinito?
M: Un círculo
L: Algo que no se puede medir... algo que no se acaba

Entrevista nº: 30	**Tipo:** C2	**Curso:** 1º ESO	**Cinta:** 7	**Cara:** B	**#:** 41
Centro: IES José de Churriguera		**Alumna:** Laura			

JL: En la cuestión 1 se planteaba un juego en el que ganaba aquél que dijese el número más pequeño. ¿Crees que habría alguna estrategia para ganar?
L: Claro, el que empieza dice el número más pequeño, el cero coma cero infinitos uno y ya está
JL: Y ese número ¿existe?
L: Sí
JL: En cambio, antes mientras hablábamos esperando a tu compañera (que no ha venido) me decías que la serie 0,1, 0,01, 0,001,... nunca llegaría a 0...; en cambio, ¿si llegaríamos a un número que sería el más pequeño?
L: No, nunca
JL: ¿Y cómo se podría decir el más pequeño para ganar en este juego?
L: Pues, cero coma cero infinitos uno; porque no existe un número más pequeño que ese
JL: Bien, imagina que yo soy tu contrincante y digo, tras la coma, un cero más de los que tu has dicho y luego un uno...
L: Pues yo diría cero coma ceros infinitos mas ceros infinitos y uno
JL: Entonces, el juego ¿acabaría alguna vez?
L: No
JL: Entonces, ¿es importante quién comience a jugar?
L: Pues no, da igual, es indiferente
JL: En la pregunta 2 dividimos un segmento sucesivamente por la mitad... ¿qué quedaría al final?
L: Pues otra mitad diminuta que tendrías que volver a partir por la mitad y otra vez por la mitad y otra vez por la mitad...
JL: Pero si eso lo hacemos indefinidamente ¿nos quedará algo concreto o no?

L: Depende... a lo mejor se te acaba el segmento o a lo mejor te queda una parte muuuuy diminuta que la tienes que volver a partir
JL: O sea que nunca llegaríamos a un punto, ¿siempre quedaría un segmento?
L: Claro... creo... es que si te quedas con un punto lo tienes que volver a dividir
JL: ¿Qué es un punto para ti?
L: No se... coges un boli y lo marcas
JL: Pero los puntos ¿pueden ser todo lo grande que queramos?
L: Sí
JL: Un punto del tamaño de un CD...
L: Eso es un círculo
JL: Pero ¿es un punto?
L: Depende... Si tú tienes una letra, por ejemplo la A, así de grande y pones un punto pues este sería del tamaño de un CD pero si la letra es más pequeña pues no, sería un círculo
JL: En la pregunta 7, nos preguntan por los puntos que caben dentro de un cuadrado de 10 cm de lado
L: Caben infinitos... aunque depende del tamaño... es que si dibujas un cuadrado así y empiezas a hacer puntos muy gruesos acabas muy rápido pero si los haces con el boli muy pequeños pues nunca acabas...
JL: Dices que en los dos cuadrados hay infinitos... pero ¿en uno más que en el otro?
L: Es que si son infinitos no se sabe...
JL: Entonces, infinito es un número que no se sabe
L: Claro es que si en una división te sale 1,3333... pues el 3 es infinito porque no sabes cuántos 3 hay
JL: Pero este número te parece que es infinito
L: Hombre, el 3 sería infinito pero...
JL: Y como cantidad, tu ¿qué entiendes por cantidad infinita?
L: Pues, por poner un ejemplo, diría la estrellas, son infinitas, nunca acabas de contarlas...
JL: Volviendo al caso de los cuadrados... los dos infinitos de los que hablabas ¿son iguales?
L: No, porque un cuadrado es más pequeño que el otro... por más que sean infinitos tienen que haber más en el grande que en el pequeño
JL: En el ejercicio 8 tenemos que unir una serie de segmentos y opinar sobre la longitud total
L: Infinito o bien que es una cantidad tan grande que no se puede medir que es lo mismo que infinito
JL: Consideremos la siguiente construcción (situamos sobre el segmento de 1 m todas las demás mitades)... ¿crees que aquí entrarían todas estas mitades?
L: Vamos a ver... es que el de 1 metro no lo has puesto
JL: Ya, ya, pero lo que te pregunto es si podemos situar sobre un segmento de 1 metros todas las mitades que hay aquí, quitando el del 1 metro que lo dejamos aparte
L: No... porque te pasarías de aquí... sería más largo...

JL: ¿Que te sugiere la palabra infinito?
L: El Universo... es que el Universo es infinito...

Entrevista nº: 34	**Tipo:** C2	**Curso:** 1º ESO	**Cinta:** 8	**Cara:** A	**#:** 149
Centro: Centro Escolar Amanecer		**Alumnos:** Azael / Rodrigo			

JL: En la pregunta 2 se os pedía dividir un segmento por la mitad indefinidamente... ¿qué queda al final si es que queda algo?
R: Yo pienso que si sigues cortando te quedan cada vez trocitos más pequeños hasta que consiguieses trocitos del tamaño del átomo de largo, lo mínimo
JL: Y ¿tu crees que llegados ahí se acabaría?
R: Sí
A: Pues yo no, yo pienso que por muy pequeños que sean los trozos siempre puedes seguir dividiendolos
JL: pero ¿siempre tendríamos segmentos o llegaríamos a un punto?
A: No, no aunque sea microscópico y no se vea nada, nada siempre se podría dividir
R: Pero es que se supone que la recta está hecha de un montonazo de átomos y tu los cortas y los cortas y te quedan trozos con 2000 átomos, luego otro trocito de 1000 átomos y así hasta llegar a un átomo
A: Pues no, porque el átomo ¿por qué no se puede partir?, aunque sea muy pequeño se podría partir
JL: Convirtamos este problema geométrico en otro numérico. Consideremos que el segmento mide 1 metro. Entonces si dividimos 1 entre 2 daría
R: 0,5
JL: ¿Y de nuevo entre 2?
R: 0,25
JL: y así sucesivamente... este proceso, Rodrigo, ¿se acabaría alguna vez?
R: No... porque te van dando decimales... y como los decimales no se acaban... pues no
JL: Pero esos valores son las longitudes de los segmentos que antes íbamos cortando ¿no?
R: Sí
JL: ¿Y qué diferencia encuentras entre ambos problemas?
R: Pues... que si lo calculas con números como no se acaban... pues... pero si lo calculas materialmente pues llegas al átomo y se acaba

JL: En la pregunta 7 se os pregunta por los puntos que cabrían en un cuadrado
A: Pues infinitos... porque para rellenar toda una recta se necesitan... muchísimos... no se pueden contar
R: Pues lo rellenas con puntitos lo más pequeños posibles y luego los cuentas...
A: Pero ¿cómo vas a hacer un punto lo más pequeño posible si se supone que no tiene un límite un punto?... hombre... en realidad puedes hacerlo más pequeño

R: Pero es que tu puedes hacer un punto microscópico, de un átomo de tamaño y eso es un punto y rellenas el cuadrado con puntos del tamaño de un átomo
JL: Pero vamos a ver si yo marco en el papel con un boli ¿esto es un punto?
R y A: Sí
JL: Y si lo hago con un rotulador de 3 m de diámetro, una mancha como esta ¿también?
R: Sí, también que a su vez se compone de puntitos más pequeños
JL: Pero un punto ¿no es la parte más pequeña que nos podamos imaginar?
R: A ver... el punto que yo dibujo es lo mínimo; si tu ahora dibujas un punto de esos pues ese punto es tantas veces el mío
A: Pero el punto que para ti es lo mínimo está compuesto de muchos puntos
JL: Si tomamos el segmento que va de 0 a 2, ¿cuántos números hay?
A y R: Infinitos
JL: ¿Por que entonces si yo dibujo un cuadrado no hay infinitos puntos en su interior?
R: Es que si se calcula con números es una cosa y si se calcula como puntos es distinto
A: Es que igual que un número se puede dividir, un punto también se puede dividir
R: Es que si tu sabes lo que mide un átomo pues puedes medir otras cosas en función del átomo

JL: En la pregunta 8 tenemos una colección de segmentos, cada uno la mitad del anterior, que vamos uniendo y nos pregunta sobre la longitud final
A: Dará infinito; es que es el mismo caso que los demás porque tienes que seguir dividiendo y aunque sea muy pequeñito siempre hay un poco más que añadir
R: Es que cuando llegas a un segmento que mide un átomo pues se acabó y entonces medirá algo... quizás casi dos metros...
A: Yo creo que pasaría de dos metros... que podría llegar a cualquier número... porque puedes seguir dividiendo y sumando

JL: ¿Qué imagen os sugiere el infinito?
R: Pues que no acaba y no puedes llegar nunca al punto donde no acaba
A: Pues yo muchas veces me lo pregunto... así como el espacio y eso... aunque pienso que tiene que haber un final pero pienso en el espacio...

Entrevista nº: 8	**Tipo:** C1	**Curso:** 1º/2º ESO	**Cinta:** 3	**Cara:** A	**#:** 96
Centro: IES Arquitecto Peridis		**Alumnos:** Marina / Marcos			

JL: En la primera cuestión se os pregunta si existía alguna estrategia para ganar en el juego de encontrar el número más grande posible...
MARINA: Bueno, pues los números son infinitos y aunque uno dice un millón el otro va a decir un millón y medio y así...
JL: ¿Nunca se podrá acabar este juego?
MARINA: no
JL: y tú, Marcos, ¿estás de acuerdo?
MARCOS: sí, al ser infinito, no puedes decir... tu puedes decir un número más alto que otro pero nunca se acaba
JL: pero ¿es preferible ser primero en este juego?
MARCOS: da igual, da igual

JL: en la cuestión 2, se trata de dividir un número positivo entre dos repetidamente...
MARCOS: al final sería infinito, porque los números negativos también son infinitos... seguirías dividiendo y nunca acabarías
JL: y tú, Marina, ¿estarías de acuerdo?
MARINA: Sí
JL: ¿Crees que el resultado podría ser negativo?
MARINA: Sí
JL: entonces, si elegimos el 3 y dividimos entre dos y lo que obtengamos entre dos y así sucesivamente, ¿el resultado podrá ser negativo?
MARCOS: no, no puede ser negativo
MARINA: es verdad, no puede ser negativo
JL: pero ¿qué le va ocurriendo al resultado?
MARINA: que se va haciendo más pequeño
MARCOS: sí
JL: pero, ¿acabará en algún momento?
MARCOS: No, no acabará nunca
JL: pero los diferentes resultados ¿se acercarán a algún valor o sencillamente se van haciendo cada vez más pequeños y ya está?
MARCOS: a cero, pero al final tampoco se acercan porque vas bajando y al haber muchos decimales es muy difícil
JL: y ¿nunca llegaremos a cero?
MARCOS: sí, yo creo que sí se llega a cero
JL: ¿Sí?
MARCOS: sí, yo creo que sí
JL: ¿en qué momento?, ¿cuántas divisiones crees que se deberían realizar para llegar a cero?
MARCOS: no se, muchísimas...
JL: pero ¿cuántas?
MARCOS: no se, un número indeterminado
JL: y tú, Marina...
MARINA: no, yo creo que no llegará a cero, siempre va a quedar algún decimal...

JL: en la pregunta 3, borramos un millón de números al conjunto de los números naturales...

MARINA: quedarán infinito de números, porque todavía queda un billón, un trillón, ... aunque borres el primero
JL: pero antes de borrar el millón, ¿cuántos números había?
MARINA: infinitos
JL: y borramos el millón, ¿cuántos quedan ahora?
MARINA: puf, infinito
JL: entonces, en ambos casos ¿quedan infinitos?
MARINA: sí
JL: pero, ¿alguno de esos infinitos va a ser más grande que el otro o los dos infinitos serán iguales?
MARINA: hombre, uno tendrá un millón menos pero no será mucha diferencia
JL: y tú, Marcos, ¿qué te parece?
MARCOS: yo creo que son iguales, ya que al ser infinitos, el infinito es igual, da igual que quites un millón
JL: entonces, en el apartado c) de esta pregunta nos piden comparar los naturales y los múltiplos de tres...; ¿te parece que estos dos conjuntos tienen la misma cantidad de números?
MARCOS: no, igual
JL: pero...
MARCOS: infinitos los dos
MARINA: yo también creo que los dos tienen infinitos
JL: pero cuando dos conjuntos son infinitos, ¿son iguales, tienen la misma cantidad de números?
MARINA: ... bueno, como este va de tres en tres a lo mejor tiene menos números, pero como son infinitos no se nota...
JL: Marcos, si agrupamos en canicas los dos conjuntos de números, en uno de esos conjuntos escribimos los naturales y en el otro los múltiplos de tres, y llenamos con ellas dos grandes bolsas, ¿habrá la misma cantidad de canicas en las dos bolsas?
MARCOS: sí, porque al ser infinito siempre hay... es que no se podrían contar las bolas y nunca terminarían
MARINA: yo pienso lo mismo...

JL: en la cuestión 4, os preguntaba si hay algún número entre 1.9 y 2 y tú, Marina, no respondiste entonces, ¿qué opinas ahora?
MARINA: pues que podrían ser 1.97, 1.98,...
JL: Marcos...
MARCOS: claro, hay infinitos números
JL: pero, y entre 1.9(periodo) y 2 ¿habrá algún número?
MARINA: no
JL: y estos dos números ¿son distintos o son el mismo número?
MARINA: no, no, son distintos
JL: y tú, Marcos,...
MARCOS: claro, no cabe ninguno, porque es periódico y es como si 2 fuera el último número después de todos los nueves
JL: pero si son distintos, ¿cómo no cabe ninguno en medio?
MARCOS: son distintos, siempre hay una separación entre los dos
JL: y si hay una separación ¿no puede haber algún número en medio?
MARCOS: no, no puede haberlo
MARINA: no, no puede haber

JL: en la cuestión 5 nos dan la resta 7.4242... - 3.1515... y nos preguntan si es posible hacer esa resta...
MARINA: yo la hice
MARCOS: no, no se puede hacer
JL: Marina, intenta convencer a Marcos de que se puede hacer...
MARINA: bueno, yo resté estos números...
JL: lo puedes hacer para que lo vea Marcos a ver qué le parece... a ver, has escrito tres periodos y ahora estás restando...
MARINA: sale 4.272727
JL: Marcos, ¿le quieres hacer alguna objeción a lo que ha hecho Marina?
MARCOS: hombre, si pones ese resultado tienes que poner el 27 periódico... sería infinito porque el periodo nunca termina sería siempre 27
JL: entonces, después de ver esto, ¿has cambiado de opinión?
MARCOS: sí, yo creo que sí se puede hacer

JL: en el ejercicio 6 se os pedía ordenar algunas cantidades... Marina dijo entonces que todas las cantidades son infinitas pero Marcos dio una clasificación en la que el más pequeño era el número de células del cuerpo humano y el más grande el conjunto de los números naturales... A mi me gustaría, Marina, que me dijeras si dentro de que opines que son todos infinitos crees que habría alguno claramente más grande que todos los demás...
MARINA: quizás el más pequeño sería el número de células... porque, no se, caben menos que en el universo hay estrellas o en la Tierra granos de arena y hay muchos más números naturales...
JL: entonces, ¿habría, para ti, uno que fuera el más grande?
MARINA: el de los números naturales, no se... porque son infinitos...
JL: pero los demás ¿no son infinitos?
MARINA: hombre,... el número de estrellas siempre va a tener una aproximación a un número y granos de arena, por mucha arena que haya, pues no habrá infinita.
JL: y, tú Marcos, ¿te afirmas en la respuesta que diste entonces?
MARCOS: Sí, sí
JL: pero ¿consideras que todos esos conjuntos son infinitos?
MARCOS: no, todos infinitos no; infinitos serán los números naturales... los demás no son infinitos porque se acaban
JL: uno de los conjuntos a comparar es el número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm de lado, ¿cuántos creéis que pueden haber?
MARINA: no se, no tengo ni idea, no lo se hacer
MARCOS: hay que saber el tamaño del punto
JL: ¿qué es un punto para ti, Marina?
MARINA: depende, una cosa así o así
JL: o sea ¿puede tener distintos tamaños?
MARINA: sí

JL: pero, ¿hasta qué tamaño lo podremos considerar un punto?
MARINA: pues, así más o menos
JL: entonces, un CD ¿ya no puede ser un punto?
MARCOS: Sí, puede ser, un punto puede ser gigantesco
JL: entonces, los puntos que caben en un cuadrado serían...
MARCOS: es que podrían ser desde.... no se, desde luego infinitos no serían pues siempre se acabaría llenando el cuadro, puede ser desde un punto hasta millones de puntos
JL: y por muy pequeños que fueran los puntos ¿no podrían caber dentro más de una cantidad determinada?
MARCOS: claro, no podrían ser infinitos
MARINA: yo creo también que sería una cantidad determinada dependiendo del tamaño del punto

JL: en la cuestión 8 nos hablan de una serie de alambres, cada uno la mitad del anterior, ...
MARINA: yo puse infinito, porque siempre cada número tiene una mitad, aunque tenga decimales
MARCOS: yo creo que es una longitud tan grande que no se puede medir..., sí, porque como es un metro y vas hallando la mitad y hasta que llegues a cero pues,..., pues es casi imposible de medir
JL: pero, ¿por qué crees que no va a llegar?
MARCOS: porque siempre se acaba, cuando llego a cero...
JL: en el caso de dividir un número entre dos repetidamente decías que sí se acababa de dividir, entonces...
Imaginaros la siguiente situación: si vamos situando los distintos segmentos en el interior de un segmento que mida un metro, uno junto a otro, a partir del de 0.5 metros, ¿creéis que se llegará al otro extremo de dicho segmento?
MARCOS: no
MARINA: no se
MARCOS: bueno, si llegaría justo... entonces mediría dos metros
MARINA: no se... creo que mediría dos metros...

JL: cuando escucháis la palabra infinito...
MARCOS: las estrellas
MARINA: las estrellas también
MARCOS: el espacio
MARINA: la cantidad de gente que hay en el mundo, no se, algo así...

2º ESO

Entrevista nº: 12	Tipo: C2	Curso: 2º ESO	Cinta: 4	Cara: A	#: 12
Centro: IES Juan de Mairena		Alumnos: Mª Carmen / Sergio			

JL: En la primera pregunta de vuestro cuestionario se os planteaba un juego en el que ganaba aquél o aquella que dijese el número más pequeño... M. Carmen, ¿qué opinas tú, ahora, sobre la estrategia ganadora si es que la hubiese?
MC: Bueno, yo preferiría no ser la primera en este juego
JL: ¿Por qué?
MC: Por que así podría ver el número que dice la otra persona y yo lo podría decir más pequeño
JL: Pero, ¿se puede ganar en este juego o no?
MC: Yo creo que no..., quizás poniendo muchos decimales...
JL: ¿Por ejemplo?
MC: pues cero coma cero... poniendo muchos ceros...
JL: y, ¿por qué no podría ganar nadie?
MC: porque sería un número muy infinito... se podrían poner muchos ceros
JL: entonces, ¿por qué prefieres ser la segunda si crees que no se puede ganar?
MC: Bueno, es indiferente
S: Yo también prefiero ser el segundo
JL: pero, entonces ¿es importante ser el segundo en este juego?
S: Sí, porque si eres el primero tu dices un número y el otro te puede superar
JL: pero luego te toca a ti otra vez....
S: Ah... entonces no ganaría nadie... porque cada uno va diciendo uno más pequeño cuando le toca
JL: ¿y cuál es el más pequeño que se te ocurre a ti?
S: No se, es infinito... o sea, que nunca se puede decir el más pequeño... puedes decir el...
JL: a ver ¿puedes poner un ejemplo?
S: 0,0001
JL: y después de ese ¿habría otro más pequeño?
S: sí
JL: pero como no nos dejan decir el cero... ¿duraría mucho este juego?
S: sí, todo lo que quisieran
MC: sí, sí

JL: En otra cuestión se supone que vamos cortando un segmento por la mitad, y esta mitad por la mitad,... y nos preguntaban si quedaba algo al final...
MC: Yo creo que debería quedar algo... porque si van quedando mitades...
JL: aunque cortemos muchísimas veces...
MC: quedaría algo pero si sigues cortando entonces ya no quedaría nada
JL: pero ¿a partir de qué número de cortes no quedará nada?
MC: depende cómo sea de largo el segmento
JL: digamos que un metro
MC: pues hasta que llegues a la última mitad
JL: y ¿cómo sabrías que has llegado a la última mitad?
MC: pues cuando ya no te quede nada, se ha acabado

S: yo creo que cuando llegues a un átomo ya no se puede cortar más
JL: Pero para ti un átomo ¿es lo mismo que un punto o son dos cosas distintas?
S: No se, yo creo que un átomo es algo que no se puede dividir
JL: Imaginaros ahora que en lugar de un segmento se trata de un número, como aparecía en el cuestionario C1 de vuestros compañeros, y entonces lo dividimos entre dos y así sucesivamente con los resultados que vamos obteniendo... Así, uno entre dos ¿cuánto da?
S: 0,5
JL: y esto entre dos
S: 0,25
JL: y si seguimos dividiendo entre dos ¿qué ocurrirá al final?, ¿quedará algo al final o no?
S: yo creo que sí
JL: a ver
S: un número decimal con muchos ceros
JL: pero ¿se acabará de hacer la división?
S: No
JL: Entonces, ¿por qué aquí no se acaba la división y en el caso del segmento si?
S: No se
JL: ¿Crees que son dos problemas distintos?
S: Sí
JL: ¿Por qué?
S: Porque un número se puede dividir todas las veces que quieras y un segmento no
JL: Así, un segmento ¿está formado por átomos?
S: Sí
JL: y tu Mª Carmen ¿quieres añadir algo a lo que ha dicho Sergio?
MC: Yo estoy de acuerdo con Sergio
JL: ¿Crees que con los números acabaríamos de dividir?
MC: No, no se acabaría

JL: ¿Creéis que hay algún número entre 1.9 y 2?
MC: Sí
JL: Por ejemplo
MC: 1,09
JL: ¿Segura?
MC: Quizás no
JL: Puedes intentarlo de nuevo
MC: 1,91
JL: bien, ¿y habría más?
MC: sí, 1,92
S: Sí, habría muchísimos más, 1,95, 1,97,...
JL: En el segundo apartado se nos pregunta si hay algún número entre 1.999... y 2; ¿tú que opinas Mª Carmen?
MC: Que no
JL: ¿Por qué?
MC: Porque el 1,999... no se...
JL: ¿Qué significa que sea periódico?
MC: Que va a haber muchos nueves después de la coma
S: Yo creo que tampoco hay ninguno porque lo más mínimo que le añadamos se pasa de 2
JL: Entonces, ¿se trata de dos números distintos?
S: Sí, claro
JL: Pero siempre entre dos números distintos hay otro número ¿no?
S: Sí
JL: entre 1.999 y 2 ¿hay otro número?
S: Sí, 1.9995
JL: Luego...
S: pero en este caso no porque es periódico
JL: Y tu MC ¿estás de acuerdo que se trata de dos números distintos aunque no podamos poner ningún número en medio?
MC: Sí

JL: En otra cuestión se os preguntaba sobre la línea más larga que podías dibujar... ¿qué opinar Mª Carmen?
MC: Pues que depende del espacio que tengas para dibujarla
JL: En efecto, eso fue lo que respondiste en su momento. Y si dispusiese de todo el espacio que puedas imaginar...
MC: sería infinita
S: sí, si, sería infinita
JL: y esa línea ¿podría tener cualquier forma?
S: sí, sí, podría hacer curvas

JL: En la cuestión 5, se os daba la sucesión 0,1, 0,01, 0,001,... y se os preguntaba si en algún momento llegaría a cero...
MC: Yo creo que no porque siempre tendríamos el uno detrás...
JL: pero el número cada vez es más pequeño
MC: sí, pero vamos añadiendo ceros y al final siempre esta el uno
S: yo estoy de acuerdo

JL: En la cuestión 6, aparecen el conjunto de los naturales y el de los múltiplos de 4; se os daban varias posibles respuestas; MC respondió que B alcanzaría el valor mayor y Sergio respondió que ambas podían alcanzar un valor tan grande como quisiéramos... ¿podrías convences a MC de tu respuesta?
S: Sí, porque las dos las podemos alargar hasta el infinito
MC: Yo creo que no, porque la B va de cuatro en cuatro y aunque las dos alcancen un número muy grande, la B siempre tendrá un valor más grande
S: pero podemos llegar al número que queramos con las dos
MC: Yo sigo pensando que la B alcanza el mayor valor
JL: Sergio ¿podrías ponerle un ejemplo de lo que significa eso de llegar un número tan grande como queramos?
S: Pues no se, por ejemplo, con ambas podemos llegar a cuatro millones...
MC: ya, pero con la B llegaremos antes
JL: sí, sí, pero la pregunta es ¿cuál de esas respuestas es ciertas?, porque si tu dices que la B llega al número más grande, ¿quieres decir que la A se para y la B sigue?
MC: No
JL: ¿Entonces?
MC: Si por ejemplo seguimos estas series hasta, por ejemplo cuatro millones como dice Sergio, la B llegará antes
JL: Bien, llegaremos antes, pero llegar llegamos... ¿no?
MC: Sí
JL: Pero con ambas ¿llegaremos a cualquier número que nos propongamos?
MC: sí, claro
JL: entonces
MC: las dos llegarían pero la B llegaría antes

JL: En la cuestión 7 nos preguntan ¿cuántos puntos caben en un cuadrado?
MC: Bueno, no podríamos contarlos

JL: Pero... ¿muchos?, ¿pocos?
MC: Bueno, haciendo cálculos...
JL: ¿qué tipo de cálculos?
MC: no se...
S: Yo creo que dependerá del tamaño de los puntos
JL: ¿Qué es un punto para ti?
S: La marca que deja un boli
JL: ¿Y también valdría la marca de un rotulador de punta gruesa?
S: Sí
JL: ¿Y qué forma tendría un punto?
S: Podrían ser un círculo, o un cuadrado
JL: pero ¿valen de cualquier tamaño?; por ejemplo, un CD, un círculo de 15 cm ¿sería un punto?
S: Hombre, a partir de cierto tamaño ya no sería un punto
JL: ¿A partir de cuál?
S: Pues no se, según... si estás escribiendo letras así muy grandes pues el punto será más grande... podría tener cualquier tamaño
JL: Tú decías aquí que cabrían trillones de puntos ya que los podríamos hacer minúsculos para que quepan muchos; ¿por qué decides que sean minúsculos para que quepan muchos?
S: No se...
JL: Mª Carmen, ¿qué opinas?
MC: No se... aquí se podría rellenar el cuadrado... pero no podríamos contarlos porque depende de su tamaño... pero no se puede determinar su tamaño
JL: Entonces, si consideramos este círculo enorme, de unos diez centímetros de diámetro, y este otro más pequeño y aún este otro más pequeño, ¿tú crees que los tres son puntos?
MC: Hombre, todos son puntos... depende en qué superficie los quieras poner serán puntos o no
JL: Claro, pero si ponemos puntos circulares en un cuadrado quedarán espacios en blanco... entonces...
S: pues podríamos partir los puntos por la mitad o...
JL: ¿Introduciríamos trozos de puntos?
S: Claro

JL: En la pregunta 8, se os proponía unir una serie de segmentos y se os preguntaba sobre cuál sería su longitud final
MC: No se,... depende de hasta cuándo lleguemos a dividir
JL: Hay puntos suspensivos... Ya antes hemos visto una cuestión en la que se iba dividiendo un segmento por la mitad sucesivamente...
MC: No se, yo creo que no sería una cantidad concreta... Quizás podría llegar a 3 m más o menos...
S: Sí, yo estoy de acuerdo porque ya llegaría un punto en que ya no se podría cortar más
JL: ¿Por qué 3 metros y no 4 ó 5 metros?
S: No se, es que no se lo que mediría pero más o menos...
JL: Pero ¿se te ocurriría algún método para averiguarlo?
S: Pues sumando las mitades...
JL: Lo puedes escribir...
S: Pues sería 1 mas 0,5 mas 0,25 mas 0,125 mas...
JL: ¿Y qué ocurre con el resultado de esas sumas?... ¿se van a cercando a algún número o no?
S: No se...
JL: Pero ¿sumaríamos una cantidad finita de segmentos o una cantidad infinita?
S: Yo creo que tendría fin

JL: Por último, cuando escucháis la palabra infinito, ¿qué imagen os viene a la cabeza?
MC: Algo que nunca se acaba... es que el infinito es algo que no se puede dibujar... no se
S: Yo pienso en el espacio...

Entrevista nº: 13	Tipo: C1	Curso: 2º ESO	Cinta: 4	Cara: A	#: 125
Centro: IES Juan de Mairena		Alumnos: Manuel / Adrián			

JL: Aquí tenéis papel para aclaraciones o comentarios... En la primera cuestión se trataba de ganar diciendo el número más grande. Adrían ¿hay alguna estrategia para ganar en este juego?
A: Pues no, porque aunque digas un número muy alto, el siguiente puede decir otro, por ejemplo, cien veces más grande
JL: Entonces, ¿preferirías ser tu en primero en comenzar este juego?
A: Me daría igual, porque el juego consiste en que el primero que se canse pues ese ha perdido...
JL: ya, ya,... Pero si fuesen robot los que juegan...
A: Pues nunca acabaría
JL: Y tu Manuel, ¿qué dirías?
M: Pues que al haber tantos números pues podría ir diciendo hasta el infinito, el infinito, el infinito y nunca dejarías de decirlo...
JL: y si alguno de los jugadores dijese infinito ¿qué ocurriría?
A: Pues que como no especifica el número...
M: claro no lo especifica
JL: Entonces, ¿ese no valdría?
A: No
M: Claro, porque tiene que decir el número por si hay otro más grande
A: Y si no pues el otro puede decir infinito más uno
JL: Ya
M: Sí, sí
JL: Pero, para ti Adrían, ¿qué es el infinito?
A: Pues algo que nunca acaba
M: Para mi es un territorio muy largo que nunca acaba
JL: Entonces, ¿qué decís sobre la duración de este juego?
M: Pues hasta que se cansen los jugadores

JL: En la segunda cuestión nos plantea la división sucesiva de un número entre dos... ¿qué quedaría al final si es que queda algo?
M: Es que nunca se acabaría... porque después de que acabes con los números positivos vendrían los negativos y nunca se acabaría
JL: Bueno, hagamos una pequeña prueba. Si dividimos 3 entre 2 qué se obtiene
M: 1,5
A: Pero es que nunca llegaríamos a los números negativos... se obtendría 0,000...
JL: ¿Por qué?

A: Porque para que de negativo tendrías que dividir un positivo entre un negativo o al revés
JL: ¿Estás de acuerdo Manuel?
M: Ah, sí, claro
JL: Entonces, ahora ¿piensas que sí se acabaría de hacer divisiones?
M: No, nunca se acabaría
JL: Supongamos ahora un segmento, que mide por ejemplo 3 metros. La cortamos por la mitad y nos quedamos con una de las mitades, esta la volvemos a cortar por la mitad y así sucesivamente... ¿quedaría algo al final?
A: Sí, porque siempre va a quedar la mitad
M: Sí, yo creo que también... pero los trozos que quedarían serían muy pequeños... como miguitas de pan
JL: Ya, ¿y llegaríamos a tener un punto alguna vez o siempre serían segmento?
M: Siempre serían segmentos

JL: En la cuestión 3, borramos un millón de números naturales...
M: Seguirían quedando números
JL: ¿Cuántos?, ¿muchos o pocos?
M: Pues quedarían infinitos porque nunca se acaban
A: Yo creo que al haber siempre números infinitos aunque quites un millón van a quedar teóricamente los mismos porque nunca se terminan...
JL: Pero ¿ni siquiera quedarán algunos menos? A ver, aquí tengo una bolsa con todos los números y aquí otra donde hemos quitado un millón de números... ¿en ambas hay la misma cantidad?
A: Sí, porque el infinito nunca lo podrás tener porque son... son todos
JL: Entonces, en el apartado c) al comparar los naturales y los múltiplos de tres...
M: Hay los mismos
A: Claro porque hay números hasta el infinito pues que nunca se acabarían... es como si quisieras contar los números hasta el infinito... nunca se pueden contar
JL: Pero, a ver, si me paro en el 12 ¿cuántos números naturales habría?
A: 12
JL: ¿Y múltiplos de 3?
A: 4
JL: ¿Y si me detengo en el 100?, ¿de qué conjunto habrá más?
A y M: Naturales
JL: ¿Y si me paro en 1.000.000?
A y M: Naturales
JL: ¿Y si sigo hasta el final?
A: Pues va haber lo mismo que en el otro lado porque el otro puede seguir contando también muchos porque como nunca pararías de seguir contando no podrías llegar a compararlos
JL: Sí, pero consideramos un montón de canicas sobre las que escribimos los números naturales y otro montón en las que escribimos los múltiplos de tres... y las echamos en dos bolsas distintas... ¿cuál pesará más?
M: Pues depende hasta qué número llegues
JL: Hasta el final
M: Pues pesaría más la de los números naturales porque van de 1 en 1 y los otros van de 3 en 3
A: Yo no estoy de acuerdo porque nunca se terminaría... tampoco en una bolsa se pueden meter todos los números

JL: En la cuestión 4 nos pregunta si hay algún número entre 1.9 y 2. Ambos respondisteis que sí, que sí lo había. ¿Me podríais decir alguno?
M: 1,991
A: 1.92
JL: En cambio, en el apartado b) se nos pregunta si hay algún número entre 1.999... y 2
A: No, no lo hay, porque el 1.999... sería como el infinito del 1
JL: ¿Qué quieres decir?
A: Pues que siempre estarías poniendo nueves y como el nueve es el final de la cadena no puedes poner otro
M: Claro, y luego pasaría al 2
JL: Entonces, para ti Manuel, ¿el 1.999... y el 2 son dos números distintos o son iguales?
A: No son iguales porque siempre va a quedar alguna milésima entre los dos o hasta donde llegues
JL: Pero me habéis dicho que no hay ningún numero entre ambos... luego, ¿no puedo decir que son iguales?
A: No, porque siempre van a ser diferentes
JL: Pero entre dos números diferentes yo puedo escribir otro número, por ejemplo, entre 1,88 y 1,92 podemos escribir...
M y A: si podemos escribir otro
JL: Entonces, ¿por qué entre estos dos no?
A: Porque es periodo y llega hasta el infinito
M: Porque el periodo repite infinitamente el nueve hasta que te cansas de escribir

JL: En la pregunta 5 se nos daba una resta... ¿se puede realizar?
M: Sí, si se puede (comienza a escribir en el papel)
JL: Has escrito 7,424242, ¿por qué escribes sólo tres periodos?
M: Bueno sería periodo
JL: Pero ¿podrías escribir 7,42 sólo?
M: Sí, daría igual (continúa realizando la operación). Le resulta 4,272727
A: Pero no da igual porque siempre va a haber otro 42...
JL: Pero, ¿los podemos escribir todos?
A: Pues sí,...
JL: Pero ¿cuántos hay?
A: Pues infinitos
JL: Pero, ¿los podemos escribir todos?
A: Hombre si hubiese un papel infinito
JL: Pero en esta hoja no podemos escribir todos, entonces ¿no podemos hacer la resta?
A: Sí, con poner un periodo pues sería 4,27
JL: Pero parece que os da dos resultados diferentes... ¿entonces?
A: Pero en realidad da 4.27 periodo (marca el periodo)
M: Claro

JL: En la cuestión 6 se os pide comparar algunas cantidades... En este caso Manuel dijo que no se pueden ordenar porque nunca vamos a saber cuánto hay de cada conjunto de estos...
M: Sí
A: Claro porque el Universo es infinito
JL: ¿Sólo el Universo es infinito?
M: Sí
A: Los granos de arena se podrían contar pero depende del tamaño... porque puedes decir que vas a contar las piedras que hay así de grandes en la Tierra pero luego hay más y más...

JL: Pero esa cantidad ¿sería finita o infinita?
A: Pues finita... bueno, depende porque también llegan del espacio rocas... nunca se terminarían...
JL: Bien, bien, pero en este momento...
A: Sí, las que hay ahora se podrían contar
JL: Y ¿hay más cantidades finitas aquí?... ¿qué otras cantidades infinitas hay entre estas que aparecen en la pregunta?
M: El número de estrellas, los números naturales, el número de puntos en un cuadrado y ya está
A: Para mi más o menos igual, pero las células si se muere una nace otra y otra... se podrían contar pero si se congelara el cuerpo
JL: Y de todas estas cantidades ¿cuál sería la más grande?
A: Para mi es que son iguales el número de estrellas, los naturales y los puntos que caben en un cuadrado
JL: ¿Serían igual de grandes?
A: Sí porque son infinitos
M: si, si
JL: ¿Y no se puede distinguir entre un infinito y otro?
A: no porque van a ser siempre lo mismo, infinito

JL: En la pregunta 7, se nos pide cuántos puntos caben en el interior de un cuadrado...
M: No se podría saber... porque te cansarías de poner tantos puntitos
A: Pero es que como un punto es la mínima expresión gráfica pues depende ya que puedes hacer un punto grande, un punto muy pequeño, un punto que sólo se ve con microscopio... nunca lo llenarías
JL: Pero, ¿me podrías dibujar aquí un punto con el bolígrafo?
A: Pues depende puede ser este... o este (dibuja algunos)
JL: Luego, para ti un punto ¿tiene tamaño y forma?
A: Bueno,...
JL: Si dibujo el contorno de una moneda y lo pinto por dentro... ¿eso sería un punto?
M: No
JL: Pero ¿hasta dónde podríamos considerar que algo es un punto?
A: Pues, por ejemplo si lo haces con un rotulador de estos muy grandes esto sí puede ser un punto porque es lo mínimo que puedes hacer con eso, pero con un boli eso es un punto...
M: y con un portaminas pues sería un punto más pequeño
JL: ¿y pueden tener cualquier forma?
A: Normalmente tendría que ser circular, pero...
JL: Luego, si son círculos, ¿cómo podríamos rellenar el cuadrado?, porque quedarían espacios en blanco...
A: Pues,... no se,...
M: Con puntos muy chiquititos
JL: Entonces con puntos muy pequeños ¿cuántos cabrían?
M: No se pueden contar
A: Yo creo que habría infinitos
JL: Pero entonces ¿cómo tendrían que ser los puntos?
M: Claro, tendrían que ser microscópicos
A: Hombre los tendrías que hacer lo que es un punto de verdad, una cosa muy pequeñita... porque por muchos puntos que hagas nunca lo vas a llenar... porque por ejemplo dentro de este mismo punto pueden caber un millón de puntos más pequeños... muchísimos más... ya sería llegar a átomos o así

JL: Y sobre la pregunta 8 en la que tenemos una serie de segmentos cada uno la mitad del anterior... ¿qué podéis decir sobre la longitud del nuevo segmento con todos ellos unidos?
M: Infinito, no se puede medir
JL: Pero, vamos a ver, no termino de entender que sea infinito y no se pueda medir, ¿me puedes aclarar esto?
M: Es que al ser tan grande nunca se podría llegar a medir
JL: Pero ¿podría medir cualquier cosa... un millón de metros o...?
M: Sí, si
A: Pues depende, si el infinito es con números naturales 1, 2, 3, ... pues depende, pero si es con comas, con decimales... pues entonces sí lo podrías medir... pero tendrías que tener una regla... que midiese...
JL: ¿con mucha precisión?
A: Sí
JL: Pero en este caso, juntando todos los trozos... ¿cuánto mediría?
A: 1.555...
JL: O sea ¿tú crees que no pasaría de cierta cantidad?, ¿por ejemplo, no pasaría de 5 metros?
A: No, no, no pasaría de 2, porque siempre va a ser la mitad, luego la mitad,...
JL: ¿Podrías convencer a Manuel que dice que daría una cantidad infinita?
A: Hombre mediría infinito pero dentro de los decimales
JL: Ya, ya quieres decir que el resultado tendría infinitos decimales, pero ¿la longitud?, Manuel dice que sería tan largo, tan largo que no podríamos medirlo... en cambio tu dices otra cosa ¿no?
A: Es que como siempre vamos añadiendo la mitad todo el tiempo, por muchos que hagas siempre van a ser cada vez más pequeños
M: Sí es verdad, cada vez son trocitos más pequeños
JL: Pero estamos toda la vida añadiendo trocitos... ¿no podría llegar a medir 100 metros?
A: No, no creo porque es lo mismo que lo del 1.999... que nunca llegaría a ser 2... Es como en una empresa el primer jefe y su ayudante, que nunca llegaría a jefe... bueno, a no ser que el otro se jubile.

JL: Adrían, cuando piensa en la palabra infinito, ¿qué se te ocurre?
A: Algo negro, una cosa negra muy grande
M: Yo pienso en un espacio grandísimo... no se, que no se podría medir, tu estaría en un punto y no se vería otro punto

Entrevista nº: 22	**Tipo:** C1 / C2	**Curso:** 2º ESO	**Cinta:** 6	**Cara:** A	**#:** 44
Centro: IES Ignacio Ellacuría		**Alumnos:** Irene / José Manuel			

JL: En la cuestión 2 del C1, se trataba de dividir un número repetidas veces... ¿qué se obtiene al final?
I: No se podría saber porque los números son infinitos y podemos seguir sacando números decimales hasta siempre
JL: Ya, pero ¿qué tipo de resultado obtendrías... sería pequeño, se acercaría a un número concreto...?
I: Hombre, si empiezas por el 2, te sale 1, luego, 0,5, luego 0,25, luego 0,125,... y así llegaríamos a un número que tendría miles de decimales y así durante...
JL: Pero los resultados se irían acercando a algún número
I: Se irían alejando del cero, cada vez más pequeño
JL: Pero ¿qué aspecto tiene un número muy pequeño?, pon un ejemplo
I: Es que cuando yo digo un número pequeño no me refiero a que tenga más o menos cifras sino a que esté más o menos alejado del punto inicial, ... o sea de la coma decimal, mayor o menor
JL: Ponme un ejemplo
I: 0,00000 infinitas veces y un 1
JL: ¿Y este sería el resultado que iríamos obteniendo en el ejercicio del que estamos hablando?
I: Sí, claro
JL: ¿Se llegaría en algún momento al cero?
I: No creo... se seguirían sacando decimales
JL: ¿Que te parece José Manuel?
JM: Estoy de acuerdo con ella
JL: En tu caso se trataba de dividir un segmento... ¿qué crees que ocurriría en ese caso?
JM: Pues que cada vez... bueno, que no lo podríamos ver nunca... tendríamos que aumentarlo a escalas mayores
JL: Pero, ¿habría un final?
JM: No, siempre se podría cortar
JL: ¿Y siempre se obtendrían segmentos o bien alguna otra cosa, un punto o...?
JM: No, no, sería siempre igual
JL: En la pregunta 3 del C1, borramos un millón de números... ¿cuántos quedan?
I: No se puede saber, lo único que sabemos es que no estarían ese millón de números
JL: Ya, pero ¿cuántos quedarían muchos o... ?
I: Es que depende del número que partamos
JL: Desde el 1
I: Es que como son infinitos... porque nunca terminan...
JL: Entonces cuando borramos el millón de números, ¿qué ocurre?
I: Pues que se empezaría a contar en lugar desde el 1 pues desde un millón uno, un millón dos,...
JL: ¿Y cuántos quedarían?
I: Pues también infinitos... es como son infinitos no podemos decir si quedan cincuenta mil millones u otra cantidad
JL: Rubén ¿qué conjunto te parece más grande el que había antes de borrar el millón o el que queda después?
JM: Los dos iguales... porque nunca podrás terminar... nunca puedes comparar los dos para ver cuál tiene más números
JL: Y si comparamos los naturales con los múltiplos de 3, ¿qué puedes decir sobre ellos?
JM: Daría igual... es que ninguno de ellos tienen fin...
JL: Pero entonces ¿hay la misma cantidad de números en uno que en otro?
JM: Es que son iguales...
I: Si nos detenemos en algún punto, habría más números naturales que múltiplos
JL: ¿Y si continuamos indefinidamente?
I: Hombre, lógicamente habría más números naturales porque son todos, pero es que como tampoco... al ser infinitos no los podemos comparar
JL: (describimos el caso de las bolas de billar y su peso)
I: Pesará más el de los naturales
JM: Da igual, pesará igual
JL: Pero ¿quién habrá escrito más números?
JM: Da igual porque las escribimos al mismo tiempo...
JL: La pregunta 7 de ambos cuestionarios nos pregunta sobre los puntos que caben en un cuadrado de 10 cm de lado
I: Es que depende del tamaño del punto y como podemos llegar a tamaños inapreciables ni para un microscopio pues habría millones de ellos; y en el de 30 cm pasaría lo mismo pero triplicado
JM: Yo digo lo mismo, depende del tamaño del punto
JL: Entonces, un punto tamaño ¿y forma?
JM: Son circulares y... pueden ser más grandes o más pequeños
JL: (Marco con un bolígrafo y con un rotulador grueso)
JM: Es lo mismo pero un poco más grande
JL: Y si consideramos un punto del tamaño de un CD...
I: Es que se considera un punto la intersección de dos segmentos
JL: Es una definición muy interesante... pero los segmentos ¿tiene espesor?
I: Supongo que sí... Es que al pensar en un punto pensamos en un círculo... pero es que yo lo considero como la intersección de dos rectas
JL: Pero un segmento ¿puede ser todo lo grueso que queramos, 1 cm o más?... Si se cortan dos segmentos de este tamaño...
I: Entonces el punto sería un cuadrado...
JM: Es que un punto tiene que ser algo relleno sin otras formas distintas
JL: Y de clase ¿qué imagen tenéis de un punto?
I y JM: como algo circular
I: Por ejemplo, suelen dibujar un segmento y a cada extremo le llaman punto A y punto B

JL: En la pregunta 8, también común para ambos, se trata de unir una serie de segmentos cada uno la mitad del anterior
JM: No llegaría a los 2 metros... porque es la mitad de la mitad de otra mitad... no se
I: No, da infinito porque...
JM: ¡Ah!... pero ¿es que esto sigue?
JL: Sí, sí
JM: Bueno, entonces sí da infinito, es que creía que sólo eran estos segmentos que están aquí dibujados

JL: No, no; en efecto, los dos respondisteis que daba infinito. Consideremos un segmento de 1 m y debajo de él vamos situando un segmento de ½ m, luego otro de 1/4,... Si continuamos ¿cuántos segmentos se obtendrán así?
JM: Infinitos
JL: Y al unirlos todos... ¿qué ocurre?
JM: Llegaría un momento en que tendría que sobrepasar este extremo...
I: Yo creo que también se sobrepasaría el metro...
JL: ¿Por qué?
I: Porque vas sumando y los números no se acaban
JM: Yo ya me he perdido
I: Bueno, en realidad llegarías... al extremo en algún momento
JL: Pero ¿qué diferencia encuentras entre dividir números y dividir segmentos?
I: Claro... es lo mismo
JM: Es que yo ya no se si se llegaría al extremo o si pasaría
I: Es que con los números se ve más fácil porque tienes ya el concepto realizado de que son infinitos pero cuando consideras un segmento siempre pienso en que llega a un fin, lo único es que ese fin estaría muy lejano

JL: ¿Qué os sugiere la palabra infinito?
JM: Tirarte y no acabar nunca, que no vas a parar nunca... una línea sin fin
I: Un agujero negro... que nunca tiene fin, que sigue y sigue y jamás termina

Entrevista nº: 35	**Tipo:** C1 / C2	**Curso:** 2º ESO	**Cinta:** 8	**Cara:** B	**#:** 0
Centro: Centro Escolar Amanecer		**Alumnos:** Juan Carlos / Diego			

JL: En la cuestión 2, en el caso de Juan Carlos, se trataba de dividir un número entre dos indefinidamente y en el caso de Diego se trataba de dividir un segmento indefinidamente
JC: Yo creo que se seguiría dividiendo entre dos pero no tendría fin
JL: Y el resultado de qué tipo sería
JC: Bueno, sería un número muy grande pero de coma... con muchos decimales... sería muy grande... sería 0,000 muchos ceros y un 1
JL: ¿Nunca llegaría a 0?
JC: No, porque siempre cabría otra décima
JL: Diego, tu ¿que opinas de tu ejercicio?
D: Podrías cortarlo las veces que quisieras pero hasta que no hubiera más aunque siempre te quedaría un trozo... hombre llegaría un momento en que no lo verías pero no se acabaría
JL: ¿Os parece que estos dos problemas son equivalentes?
JC: Sí, es lo mismo sólo que el mismo es numérico y el de Diego es gráfico
JL: En la pregunta 3 de Juan Carlos se nos dice que borramos un millón de números del conjunto de los naturales...
JC: Quedan de un millón para arriba
JL: Y eso ¿son muchos?
JC: Pues infinitos
D: Incalculables
JC: Si, claro, no se podrían calcular
JL: Pero ¿cuándo hay más números?
D: Antes de quitar el millón
JL: Pero antes de borrar el millón ¿cuántos hay?
D: Del 1 al infinito... un millón más
JC: Infinito mas un millón
D: Es que si borras el millón te va a seguir quedando infinitos... si empiezas a poner números de un millón para arriba no vas a acabar
JL: Si tengo en una caja los naturales y en otra los naturales menos un millón de números, ¿en dónde hay más?
JC: Hay menos en la segunda caja. Es que es un infinito pero sin ese millón
JL: Entonces es un infinito mayor que el otro
JC: ... Pues sí... pero es que siempre le va a faltar esa porción de un millón
JL: En el apartado c), se trataba de comparar los naturales y los múltiplos de 3
JC: Yo creo que en los naturales hay más porque... a ver, cualquiera de las dos es infinito, pero aquí te vas saltando tres números y aunque sea infinito tiene más
D: Yo creo que hay la misma cantidad en los dos... porque si este tiene aquí tres números y el otro también si siguen creciendo va a seguir teniendo los mismos...
JL: (Expongo el caso de las bolas de billar que se introducen simultáneamente en sendas bolsas)...
JC: habrá las mismas bolas... pero si lo cuentas como que el 1 es independiente y el 3 es independiente... pues entonces sí... es que si es infinito y no pararas pues tendría más...

JL: La cuestión 6, en el caso de Diego, dan dos conjuntos de números: los naturales y los múltiplos de 4 y se os preguntaba si alguna conseguirá el valor más grande...
D: Si siguen... los dos alcanzarán un valor tan grande como queramos... es que puedes hacerlo así hasta que te aburras...
JL: Pero si paramos en el lugar 1000, ¿cuál tendrá el valor más grande?
D: el segundo
JL: ¿Entonces?
JC: Es que el infinito es algo muy raro... a ver, la primera empieza así 1, 2, 3, ... y la otra es 4, 8, 12, ... y sigue así... pero es que luego está el infinito que está aquí (señala el final de la serie) ... pero que nunca es el final y que nunca se puede saber qué número es
JL: y entonces, ¿cómo podéis saber si uno va a alcanzar un número mayor que el otro?
D: Pero es que eso es si llega a un punto...
JC: Claro
D: Si es indefinidamente nunca sabrás el valor que tiene...
JC: Pero si nos paramos el de los múltiplos de 4 sería más grande... pero al ser infinito nunca se sabe... bueno si uno es infinito el otro sería 4 por infinito...
JL: ¿Y cuánto sería eso?
JC: Pues supongo que infinito... no se... uno es x y el otro es $4x$

JL: En la pregunta 6 de Juan Carlos se pide que se ordenen una serie de conjuntos... Respondiste que el menor es el de los puntos que hay en el interior de un cuadrado y el mayor es el de los números naturales...
JC: Es que los puntos se pueden contar aunque sea difícil, las células también, los granos de arena también... las estrellas también... aunque cueste trabajo pero se podrían contar... pero es que los números naturales no se pueden contar porque son infinitos
JL: ¿Y porque el menor es el de los puntos del cuadrado?
JC: Pues no se... porque... te le limita los 10 cm
D: Yo creo que el más grande sería el de los números naturales... y el más pequeño... es que un punto no existe... no se... es difícil...
JL: pero para ti ¿hay cantidades finitas ahí?
D: Pues... todos menos los números... bueno las estrellas no se sabe... el más pequeño es el de los puntos, no porque te den un límite sino porque en la Tierra caben muchos granos de arena
JL: Has dicho que los puntos no existen... ¿qué quieres decir con eso?
D: Es que un punto es un... un sitio donde se cruzan dos líneas... pues el punto va a ser un sección de línea... en realidad no es un punto sino dos líneas cruzadas...
JC: Un punto puede ser así (marca un punto) o puede ser así (dibuja uno más grueso)... es que depende de las líneas... Las líneas están formadas por puntos... pero no se sabe los que hay porque depende del tamaño... Pero si la línea es más gruesa pues el punto será mayor...
JL: Pero si consideramos el segmento [0, 2], ¿cuántos números hay aquí?
D: Infinitos
JL: Luego si a esos puntos le asociamos un punto, ¿cuántos puntos habría en ese segmento?
D: Infinitos... No había pensado yo en esto... es que ahora los granos de arena también serían infinitos... bueno, no... sería este el conjunto más pequeño...
JC: Entonces en el cuadrado habría infinitos...
JL: En la cuestión 8, común a ambos, se trata de unir una serie de segmentos cada uno la mitad del anterior y nos pregunta sobre qué podemos decir de su longitud
JC: Yo creo que puse infinito porque si tu lo vas dividiendo... y vas poniendo mitades pues siempre puede añadir un trozo por pequeño que sea...
D: Sí, infinito
JL: Pero a mi me gustaría plantearos la siguiente situación (la construcción de situar sobre el de 1 metros todas los demás)... ¿cabrían todos?
JC: Sí... parece que sí...
D: No se...
JC: Yo creo que sobrepasaría...
D: No, no creo
JC: Es que si se llega a este extremo... luego al sumar la siguiente mitad se pasaría aunque sea un poco
D: Puf... sería dos metros, no te pasas... como vamos cogiendo cada vez la mitad... y si lo miras con un microscopio todavía te va a quedar espacio...
JL: A ver Juan Carlos, mirálo desde este otro punto de vista. Considera un segmento de un metro en el que marcamos su mitad, a continuación marcamos la mitad de la mitad derecha, a continuación.... ¿tu crees que pasaremos del extremo de la derecha?
JC: A ver... es que no es lo mismo que antes... antes ibas uniendo segmentos pero ahora no es así... aunque la verdad es que sería lo mismo... claro, es que no te puedes pasar... visto así...
JL: ¿Qué imagen os sugiere la palabra infinito?
JC: El símbolo del infinito... nada... que no termina...
D: Es como si me dijeran otra cosa cualquiera...
JL: Sí, pero si te dicen “el mar”... supongo que te viene una cierta imagen del mar... pero si oyes la palabra infinito...
D: No se... me imagino los raíles del tren que son paralelos y nunca acaban... un espacio en blanco, gigante...
JC: Un círculo
JL: ¿Por qué un círculo es infinito?
JC: Porque hace así, da una vuelta y otra vez... no como un segmento empieza aquí y termina aquí...

3º ESO

Entrevista nº: 3	**Tipo:** C1 / C2	**Curso:** 3º ESO	**Cinta:** 1	**Cara:** B	**#:** 210
Centro: IES Enrique Tierno Galván			**Alumnos:** Sergio / Héctor		

JL: Esta pregunta es para Sergio, ya que aparece en tu cuestionario, ¿cuántos puntos crees que caben en un cuadrado?
S: No se, yo que se, depende del tamaño de los puntos y del tamaño del cuadrado, no se
JL: Pero, entonces, ¿cabrán muchos o pocos?
S: yo creo que infinitos más o menos
JL: ¿por qué?
S: porque siempre puedes seguir poniendo puntos encima o no se
JL: sí, pero si no pudieran estar unos encima de otros, ¿sigues pensando que cabrían infinitos?
S: yo creo que sí
JL: ¿Qué es un punto para ti?, imagina que se lo tienes que explicar a otro chico
S: pues,... una cosa que se pone ahí, un punto, no se
JL: le podrías ayudar tu Héctor
H: una mancha negra... redonda
JL: pero ¿podría tener cualquier tamaño?
H: depende para qué lo quieras utilizar
JL: pero ¿dependerá de con qué lo dibujemos?, por ejemplo con un compás ¿obtendríamos un punto?
H: si no está relleno de negro es una línea
JL: y si lo rellenamos de negro, ¿sería un punto?

H: sí

JL: Héctor, en una cuestión te daba tres líneas y se te pedía que dijeses cuál es la más larga, y cuál de las tres tenía más puntos, ¿qué opinas?
H: creo que era la A
JL: ¿por qué?
H: porque al ser curva ocupa más espacio
JL: Sí, pero si yo os hubiera dibujado otra línea que hiciera varias curvas (la dibujo) o semicírculos, ¿cómo podrías averiguar entonces cuál es la más larga?
H: Yo qué se sería iguales
JL: Lo que te pregunto se te ocurre algún método para que no nos quede ninguna duda de cuál es la más larga
H: Yo qué se
JL: Sergio le podrías ayudar
S: pues estirándolas
JL: Sí, estirándolas, en efecto, si fuese un alambre o un material flexible podríamos compararlas pero estamos con un dibujo...
S: yo qué se... pues midiendo cuánto miden así para abajo...
JL: a qué te refieres con medirlas
S: pues utilizando un metro o algo
JL: bien si ya sabemos cuál es la más larga, en cual de las tres hay más puntos
H: pues en las tres hay infinitos
JL: pero en las tres ¿habría la misma cantidad de puntos?
H: O sí o no
JL: ¿de qué dependería la respuesta?
H: de la longitud de los puntos y de la longitud de la raya

JL: Hay una cuestión en la que al conjunto de los números naturales se le quitaba un millón de números y tú, Sergio, respondiste que “quedaban todos los que había menos ese millón pero aún así es una cantidad infinita”... ¿sigues pensando lo mismo?
S: Sí
JL: bien, si comparas ahora los dos conjuntos, el inicial y el que tiene un millón de números menos, tú dices que ambos son infinitos... pero ¿alguno de los dos es más grande que el otro?
S: pues no, porque como siguen los dos hasta el infinito, pues no...
JL: Pero en cuanto a cantidad de números... imagínate que cada número está escrito en una canica y echamos los del primer conjunto en una bolsa y los que tienen un millón menos en otra bolsa, ¿alguna de las bolsas tendrían más canicas que la otra?
S: Sí, en esta porque empieza en un millón y hasta el un millón no habría
JL: pero hace un momento has dicho que las dos eran infinitas
S: pues que las dos no se acaban, pero que esta comienza con un número más alto
JL: entonces, para tí ¿hay distintos tamaños de infinito?
S: pues no se
JL: piensa en el ejemplo de las bolsas de canicas, ¿te parece que un infinito sería más grande que otro?
S: no, iguales, simplemente que como esta empieza así pues tendría menos, pero las dos llegarían al mismo número
JL: y en el caso en que comparamos los naturales y los múltiplos de tres... ¿alguno de estos conjuntos es más grande que el otro?
S: pero ¿más grande?...
JL: de cantidad, de tener más números, no cifras... piensa en el ejemplo de las canicas... ¿en alguna de las bolsas hay más números?
S: Sí, en esta
JL: ¿en la de los números naturales?
S: sí, porque la de los múltiplos de tres como va de tres en tres hay tres... no tres menos pero siempre hay...
H: cada tres naturales hay un múltiplo de tres
JL: pero si yo te pregunto cuántas canicas hay en la bolsa de los múltiplos de tres, ¿qué me dirías?
S: pues que hay infinitas
JL: en la de los números naturales
S: también
JL: o sea ¿en los dos hay infinitas?
S: Sí
JL: pero ¿en uno hay un infinito mayor que en el otro?
S: pues que en uno van continua pero en el otro van de tres en tres también sería infinito pero habría menos

JL: Tú, Héctor, en la cuestión 10 se daba el número 2.131131131... ¿cuántas veces aparece el 1 y el 3?
H: habría más unos que treses
JL: pero ¿cuántos unos habría?
H: pues infinitos
JL: ¿y treses?
H: también infinitos
JL: entonces, esta cuestión es equivalente a la cuestión de Sergio... tenemos dos cantidades infinitas pero una parece “más infinita” que la otra...
H: no, no es que sea más infinita sino que hay más cantidad de unos que de treses
JL: En la cuestión 3, dividimos reiteradamente un número entre dos y se te preguntaba que ocurriría al final; Sergio respondió entonces que “no se sabe, porque cualquier número por pequeño que sea se puede dividir entre dos y hacerse decimal”, ¿querrías añadir algo a eso?
S: no
JL: pero el tipo de resultado que vas obtener cómo va a ser, ¿se va a acercar a algún número?, ¿va a superar cualquier número?,...
S: se va a acercar al cero, pero cada vez con más decimales
JL: y ¿eso sería un número infinito?
S: yo creo que sí
JL: pero infinito porque...
S: porque nunca se acabaría de poner decimales
JL: pero la máquina ¿nunca llegaría a alcanzar el cero?
S: pues no, porque siempre se puede dividir entre dos
JL: y tu Héctor ¿qué piensas?
H: yo creo que nunca acabaría

JL: En la cuestión 8, Héctor, se planteaba algo semejante... ¿te parece que es el mismo problema?, ¿llegarías a la misma conclusión?
H: sí, el resultado sería infinito
JL: pero ¿te acercarías mucho a algún valor?
H: sí, al cero, pero no pasaría

JL: en la cuestión 10 del cuestionario de Sergio se plantea la posibilidad de partir reiteradamente un segmento por la mitad... ¿qué ocurre al final?
S: se obtiene un punto
JL: pero un punto ¿lo podríamos seguir dividiendo más veces?
S: no se, depende cómo sea

H: claro, hasta un momento en ya no puedas
S: hasta que no lo puedas ver y entonces no puedas hacerlo
JL: pero este problema ¿es distinto al de los números que dividíamos entre dos?, en aquel caso decíais que no se acabaría de dividir nunca y en cambio aquí contestáis que sí se acaba, ¿a qué se debe esa diferencia?
H: hombre, porque en el de los números siempre se puede dividir entre 2
S: pero en el del punto llega un momento en que ya no se puede ver
H: claro, llega un momento en que el punto es tan pequeño que, aunque se podría dividir, ya no tendríamos medios para dividirlo más
JL: entonces, el hecho de dividir un segmento ¿va a depender de los medios técnicos de que dispongamos?
H: sí, claro
JL: y, mentalmente, ¿seríais capaces de imaginaros la división del segmento sin utilizar “herramientas” para dividirlo?
H: Sí, bueno, no siempre...
JL: entonces, si seguimos cortando ¿llegaríamos a un segmento muy pequeño o a un punto?
H: sí un segmento, bueno,...
S: no, sería un punto... bueno si te lo imaginas...
H: sí, bueno, un segmento pequeñito
S: es que un segmento se supone que está formado por puntos por eso llegaría un momento en que te quedarías con un punto

JL: En otra cuestión se preguntaba si existía algún número entre 1.999... y 2
S: pues no hay porque si es periodo no se acaba nunca...
JL: pero... si no hay números...
S: hombre es que al no acabarse siempre le va a poder añadir un nueve
JL: entonces, Sergio, si no podemos situar ningún números entre ambos, estos dos números ¿son distintos o iguales?
S: son distintos
JL: pero si son distintos, ¿no podemos situar uno entre ambos?, por ejemplo, ¿entre 1.4 y 1.5?
S: sí, 1.45
JL: ¿y entre 1.88 y 1.9?
S: sí
JL: y, entonces entre 1.999... y 2 no podemos meter un número en medio?
S: no
JL: y entonces ¿no son iguales?
S: no
JL: y tú, Héctor, ¿qué opinas?
H: que no se puede
JL: pero ¿los podemos considerar iguales?
H: no, no son iguales

JL: en la cuestión 6, Héctor, se te preguntaba cuál es el número más pequeño entre 2 y 3, ¿qué opinas?
H: que también es infinito
JL: ¿a qué te refieres?
H: pues que sería 2.1111...
JL: ¿ese sería el más próximo a 2?
H: sí
S: pues no, sería dos coma periodo de cero
JL: ¿?
H: pues dos coma muchos ceros y al final un 1
JL: ¿y ese sería el más cercano a 2?
H: pues no, porque siempre podrías añadir ceros
JL: pero al decir que es infinito a qué te referías?
H: pues que los ceros van a ser infinitos y no va a haber ningún puesto para poner el 1
JL: pero entonces ¿podemos decir que existe ese número?
H: sí
JL: pero ¿podríamos escribirlo?
H: pues no, mientras haya números infinitos

JL: En la cuestión 4, se unían numerosos segmentos cada uno la mitad del anterior... ¿cuál te parece que sería la longitud del nuevo segmento?
H: pues un valor infinito
JL: ¿por qué?
H: porque sería igual que antes, podrías estar dividiendo eso infinitas veces
JL: entonces, si sumamos infinitas cosas ¿siempre el resultado va a ser infinito?
H: no se,...
S: puede ser,...
H: es que no se pueden sumar dos cantidades infinitas porque no alcanzas el final de esas cantidades
S: claro

JL: En otra cuestión, os preguntaba si era posible encontrar un número decimal que multiplicado por 9 diese uno... ¿qué te parece?
S: ...
JL: te recordaré tu respuesta: “no es posible porque hay que multiplicar 9 por 0.1111... y este número tienen infinitos números y es incalculable”... ¿cuál sería el resultado de esta multiplicación?
S: no se sabe, bueno 0.9999....
JL: y tu dices que eso no es uno
S: no, es que es más pequeño que uno
JL: entonces, ¿qué número habría entre 0.99999.... y 1
S: no se sabe
JL: pero ¿tú crees que existe ese número?
S: sí

JL: En la cuestión 6, hay un bombo gigantesco con todos los números naturales... ¿cuál es la probabilidad de sacar un 5 y acertar?
S: ninguna... es que no se podría hacer el bombo... porque no se acaban
JL: pero hay dos cuestiones distintas; una es la posibilidad de fabricar el bombo, pero vamos a suponer que lo hemos fabricado, ¿consideras entonces que tienes alguna posibilidad de acertar?
S: sí, porque es que no se, es que no estarían todas las bolas, siempre faltaría alguna ya que son infinitas
JL: pero hemos metido todos, el 5 está...
S: pero...
H: pues tendría infinitas posibilidades porque hay infinitos números
JL: ¿infinitas?, ¿tu crees que tendrías muchas posibilidades de ganar si hemos comprado el 5 y hacemos un sorteo con todos los números naturales?
H: las mismas que cualquier número
S: muy pocas
H: infinitas, porque hay infinitos números
JL: pero ¿tú tendrías muchas esperanzas de ganar habiendo comprado el 5?
H: pues no
JL: ¿por qué?

H: porque al haber infinitos números, hay infinitos menos uno que no te pueden tocar
JL: entonces, la probabilidad de ganar ¿sería muchísima, poquísima, regular?
H: poquísima
S: sí, poquísima

JL: Tenemos en otra cuestión una serie de círculos dentro de un triángulo, ¿lo veis? y se os preguntaba qué podíais decir sobre la suma de todos los diámetros...
S: daría una cantidad infinita
JL: en efecto, eso fue lo que respondiste, pero ¿por qué?
S: pues porque, por lo mismo de antes, habría un punto siempre, un círculo así con su diámetro y como no se acabaría entonces no se podrían sumar
H: bueno, es que no se pueden sumar, porque al dividir los círculos aunque sean pequeñísimos siempre van a quedar círculos...

JL: En tu cuestionario había uno con segmentos en el que íbamos añadiendo segmento cada uno la mitad de anterior, ¿para ti la respuesta sería la misma?
H: sí
JL: también el tuyo, Héctor, hay un cuadrado con triángulos cuyas áreas queremos sumar...
H: no se podría calcular, porque al ser tan pequeños no se podrían calcular ni medir...
JL: pero supón que calculamos el área del triángulo grande y que vale, por ejemplo, 8, ¿cuánto valdría el siguiente?
H: 4
JL: y ¿la del siguientes?
H: 2
....
JL: entonces, es como si sumáramos números, ahora ya no tenemos triángulo que no se verían...
H: daría un resultado infinito en ambos casos

JL: en la cuestión 7, Sergio debía considerar la suma 2+1+1/2+ · · ·, ¿qué ocurre con los resultados parciales de esa suma?
S: pues que decrece indefinidamente
JL: ¿por qué?
S: porque sería hasta el 1 dividido por infinito
JL: pero la pregunta es sobre las sumas parciales, 2, 3, 3.5,... ¿qué le ocurre a esos resultados?
S: que crecen, pero muy poco a poco
JL: y ¿tu crees que crecerían y superarían cualquier límite que le pusiésemos o no?
S: no se, yo... sí, yo creo que crecerían
JL: entonces, yo digo que sumes los que sumes no pasarán de 500, ¿tú dices que sí pasarían?
S: sí, yo creo que sí
H: si, yo creo que sí, siempre acabarías llegando

JL: en otro ejercicio, Héctor, tiene otra suma de fracciones...
H: no se puede calcular porque no se pueden calcular cantidades infinitas, porque no se conoce el fin

JL: cuando oís la palabra infinito, ¿qué os sugiere?
S: a mí como que no, que nunca vas a llegar, que nunca se acaba
H: a mí el símbolo de infinito.

Entrevista nº: 7	**Tipo:** C2	**Curso:** 3° ESO	**Cinta:** 2	**Cara:** B	**#:** 256(*)
Centro: IES Arquitecto Peridis		**Alumnos:** Ruth / Patricia			

(*) Se ha grabado desde #242 y continúa en la Cinta 4 hasta #12

JL: En fin, las preguntas anteriores ya no las podemos repetir... Bueno, continuamos..., ¿veis algo raro en que un noveno por nueve de uno y, sin embargo, nueve por 0.1(periodo) no?
R: es que, a ver, si los número no acaban y tenemos 0.9999.... es lo mismo que uno porque no podemos poner ningún número en medio...
P: claro, pero es que no puede dar lo mismo
JL: en cambio, nosotros escribimos que uno noveno es igual a 0.1 (periodo)
P: sí,...

JL: En la pregunta 4, tenemos vamos uniendo segmentos, cada uno la mitad del anterior,...
P: yo creo que... infinito
JL: ¿por qué?
P: porque siempre lo vas dividiendo por la mitad
JL: entonces, siempre que sumes una cantidad infinita de cosas ¿te dará infinito?
P: ... yo creo que sí
R: yo creo que dos metros, porque siempre es la mitad del otro y aunque se siga siempre va a ser cada vez más pequeño y al final dará el metro
JL: ¿qué le dirías a Patricia para convencerla de ese resultado?
R: es que cada vez vamos a sumar muy poco, son trozos muy pequeños, será cero coma,... no se...
JL: pero ¿por qué está tan convencida de que no pasará de dos metros?
R: porque vas sumando la mitad de la mitad... y es como si sumaras otro metro y un metro más otro da dos
JL: y tú Patricia, ¿te ha convencido Ruth?, ¿o si no, podrías convencerla tu a ella?
P: no se, yo creo que es infinito
JL: y a tí Ruth ¿no te parece sorprendente que sumando infinitas cantidades te de una cantidad tan pequeña como 2?
R: no, porque tu imagináte si tienes un metro más cero coma cero, cero, cero,...., seis ¿cuánto le puedes añadir a eso?
JL: sí, muy poquito pero muchas veces
R: claro, también podría dar infinito, pero es que como siempre se va dividiendo entre dos,..., no se

JL: en la pregunta 5, nos pregunta sobre el producto 0.9(periodo) x 0.9(periodo); Ruth dijo entonces que daba 0.9(periodo) y Patricia dijo que podían ser muchos resultados dependiendo de cuántos nueves se pusieran...
P: no se, es que no es lo mismo poner 0.9 que 0.999... el resultado va a ser cero coma muchos nueves y luego un ocho...
JL: pero ¿piensas que el resultado podría llegar a uno?
P: no
R: sí es verdad eso de que siempre termina en ocho... siempre hay un número... pero no llega a uno
JL: pero tu dices que da 0.9(periodo) y no conozco ningún caso, salvo el 1, que al multiplicarlo por sí mismo del el mismo valor, entonces...
R: pero es que como ya hemos dicho en una pregunta anterior aunque sea un poco raro 0.9999... es igual que uno

JL: en la cuestión 6, se nos pregunta por el número más pequeño entre 2 y 3...
P: no entiendo la pregunta...
JL: si excluimos el 2 y el 3, ¿cuál es el número más próximo a 2?
P: yo creo que no existe... hombre, si vale 2.1 pues es ese, o bien 2.0000.... muchos ceros y luego un uno, si vale ese pues es ese
JL: pero se podría escribir
P: claro dos coma periodo de cero y un uno
JL: osea, infinitos ceros y al final un uno
P: bueno, es que infinitos ceros,... bueno, sí, yo creo que sí
JL: entonces, ¿para ti existiría?
P: sí
R: es ese número, pero no lo puedes escribir, sólo te lo puedes imaginar,... no cabría en el papel, nunca terminarías, nunca se acabarían los ceros y al final habría que poner un uno

JL: en el ejercicio 7, se os da una suma tal 1/10+2/100+…
P: yo creo que el resultado es un número infinito
JL: ¿a qué te refieres con esto?
P: pues que va a seguir 5/10000, 6/1000000,...
JL: sí, pero del resultado ¿qué me dices?, ¿podría dar muchísimos millones?
P: sí, yo creo que sí
R: yo creo que no se puede calcular, el número que saldría... no se podría calcular porque no podrías terminar de hacer la suma
JL: pero ¿qué es infinito para tí?, ¿es un número muy grande?, o es otra cosa
R: no es un número grande, es un número que nunca termina, que siempre tiene cifras y cifras
JL: hagamos un experimento, imaginémosnos que pasamos las fracciones a forma decimal... 0.1 mas 0.02, ¿qué daría?
R: 0.12
JL: ¿y si sumamos la siguiente?
R: 0.123
JL: ¿queréis añadir algo a lo que habéis dicho antes?
R: sería todos los números que hay arriba detrás de cero
JL: ¿y seguís opinando que el resultado es infinito?
R: sí, porque si los números naturales son infinitos
P: no, bueno sí, sería 123456789 y todo eso periodo
JL: pero esa suma ¿podría valer un millón?, antes me habéis dicho que sí
P: no
R: ya no, claro sí, porque llegaría a..., no, claro que no
JL: entonces ¿no podría ser un número gigantesto, infinito?
R: sí, con muchas cifras decimales
P: no pasaría de uno

JL: en la cuestión 8 se divide repetidamente un número positivo entre dos...
R: el resultado tendría muchas cifras decimales del cero, detrás del cero... siempre es la mitad... nunca llegaría a cero y el resultado no se puede saber... aunque nos acercaríamos mucho
JL: pero ¿nunca llegaríamos a cero?
R: no, porque siempre hay cifras, tu puedes dividir 1 entre 2 y da 0.5, entre 2 da 0.25 y siempre te da cifras
P: siempre que dividir un número entre otro te va a salir menos pero nunca se va a acabar... sería cero coma cero, cero,... y luego un número

JL: en la pregunta 9, tenemos que sumar las áreas de numerosos triángulos en el interior de un cuadrado...
P: yo creo que daría infinito, por lo mismo de antes porque siempre que dividas por la mitad te va a dar otro número
R: yo creo que sería finita ya que si sólo hay esos triángulos...
JL: no, pero los puntos suspensivos significan que seguiría habiendo triángulos...
R: pues entonces sería lo que te de el área del triángulo más grande y el resultado sería el doble de ese área
JL: Patricia, tu dices que da infinito, pero el cuadrado exterior, ¿qué área tiene?
P: 100 cm cuadrados
JL: entonces, si sumamos las áreas de todos los triángulos, ¿te podría salir más de 100 cm cuadrados?
P: no... el resultado sería finito, porque llega un momento en que no puede ser más grande de 100 cm cuadrados
JL: si ahora volvemos al ejercicio de sumar segmentos, ¿crees que este problema es equivalente?
P: no, es un problema distintos, no se,... antes siempre te iba a salir un número cuando haces la mitad...
JL: pero aquí si el área del triángulo más grande tiene un cierto valor los demás van siendo la mitad...
P: ahora pensándolo... el de los segmentos también se podría... la suma no superaría los dos metros...

JL: en la cuestión 10, tenéis un número periódico y se os preguntaba sobre el número de veces que aparecían las cifras del periodo...
R: se supone que el uno aparecerá más veces si se terminara el número, pero como no se termina...
JL: ¿cuántas veces aparecerá el 1 y cuántas el 3?
R: yo que se
JL: pero ¿muchos o pocos?
R: infinitos... infinitos unos e infinitos treses
JL: pero alguno de ellos aparecerá más veces
R: del uno, porque hay dos unos en el periodo y sólo un tres
P: yo creo que habrá el doble de unos que de treses
JL: pero ¿cuántos hay de cada uno?
P: infinitos
JL: pero para tí ¿hay distintos tamaños de infinito?
P: no, el infinito siempre es igual
JL: ¿por qué dices entonces que hay más unos que treses?
P: porque en este periodo hay dos unos y un tres y siempre habrá el doble de unos que de treses
JL: y tú, Ruth, ¿qué piensas?
R: que todos los infinitos son iguales

JL: pero me acabas de decir que el infinito de los unos es el doble que el de treses
R: claro porque si pensáramos que se llega a terminar el número habría el doble de unos
JL: pero también has dicho que hay infinitos decimales...
R: hombre, a ver, no se puede decir el número exacto pero siempre habrá más unos que treses
JL: por último, ¿qué imagen os viene a la cabeza cuando escucháis la palabra infinita?
P: líneas de números
R: a mí también, como en matemáticas siempre...
JL: y fuera del instituto, alguna imagen, un dibujo,...
P: una escalera que nunca acaba
R: las estrellas,...

Entrevista nº: 16	**Tipo:** C2	**Curso:** 3º ESO	**Cinta:** 4	**Cara:** B	**#:** 173
Centro: IES Juan de Mairena		**Alumnos:** Alexandra / Adrián			

JL: En primer lugar hablaremos sobre la pregunta 2, donde se os pedía clasificar algunas cantidades...
Ad: Es muy difícil de ordenar...
JL: ¿Por qué?
Ad: Es que el número de estrellas es incalculable, los granos de arena prácticamente igual y los números naturales también...
JL: Pero entre cantidades ¿las hay finitas o contables o son todas infinitas...?, ¿qué significa para ti incalculables?
Ad: Pues que no se pueden calcular
JL: Pero entre esas ¿hay cantidades que son finitas y otras infinitas o son todas infinitas?
Ad: Algunas que no lo son... el número de puntos, el número de granos de arena, las células y el número de estrellas...
JL: ¿Por qué el número de granos de arena no es infinito?
Ad: No se, supongo que habrá un número concreto de granos de arena
JL: Y, entonces, ¿alguno de esos conjuntos es infinito?
Ad: Sí, los números naturales
JL: Así, si tuvieras que establecer un orden entre todas estas cantidades...
Ad: El más grande sería el de los números naturales, luego iría el número de estrellas y luego los otros
JL: ¿Y tú, Alejandra, qué opinas?
Al: Yo creo que todos son infinitos... porque, por ejemplo, las células del cuerpo siempre se están reproduciendo y las estrellas puede ser que aparezcan nuevas y la arena es imposible contar...
JL: Pero, para ti que no se pueda contar algo ¿es lo mismo que decir infinito?
Al: No...
JL: Pero ¿tu crees que podríamos llegar a tener infinitas células?
Al: Yo creo que sí
JL: Pero si te tuvieras que decir por alguno de esos cinco conjunto como el mayor, ¿cuál elegirías?
Al: Los números naturales... y el más pequeño el de las células
JL: ¿Por qué crees que hay más granos de arena que células?
Al: Porque granos de arena yo creo que hay muchísimos, pero células creo que no hay tantas

JL: En el ejercicio 4, se toma van uniendo segmentos cada uno la mitad del anterior y se os preguntaba sobre la longitud que tendría el nuevo segmento después de unir todas esas mitades...
Ad: Yo pienso que mediría infinito porque siempre se va dividiendo y no habría un punto en que terminara...sería muy pequeña la cantidad que sumamos pero habría...
JL: Entonces, ¿podría llegar a sumar, por ejemplo, 1.000.000 de metros?
Ad: Si, yo creo que sí, bueno... tanto no, pero sumando y sumando se podría...
JL: Pero entonces, si dices que tanto no, que un millón no, ¿qué significa para ti infinito?
Ad: Que nunca se puede medir... que es indeterminado
Al: Yo creo que siempre se va a poder seguir dividiendo
JL: ¿Y eso qué significa en este problema?
Al: Pues que va a medir infinito
JL: Hagamos el siguiente experimento: situamos sobre un segmento de 1 metro un segmento de ½ metro, a continuación otro de 1/4 de metro y así sucesivamente... ¿Consideráis que esto podrá medir lo que queramos?
Al: Sí...
Ad: Sí, si

JL: En otra cuestión, la número 5, nos preguntan sobre el producto 0.999... x 0.999... Alexandra respondió que no se podía realizar porque son números periódicos y sus cifras son infinitas.
Al: Claro
JL: Pero ¿ni siquiera podrías dar un resultado aproximado?
Al: Sí, si, supongo que sí, pero no podrías escribirlo entero
JL: Ya, pero ¿qué aspecto tendría el resultado?
Al: Un número con muchos decimales
JL: Sí, pero ¿menores que 0,999... ó cercanos a 1, daría un número mayor que 1?
Al: No, no, menor que 1
Ad: Yo creo que sería un número demasiado grande
JL: ¿A qué te refieres con demasiado grande?
Ad: A la cantidad de cifras
JL: ¿Y eso significa que no se puede calcular, que es indeterminado?
Ad: Claro, al ser periódico no se podría...

JL: En el ejercicio 6 se nos pregunta cuál es el número más pequeño entre 2 y 3 excluyéndolos. Ambos dijisteis que no era posible averiguar ese número, si bien dabais razones distintas.
Ad: Porque hay bastantes números entre el 2 y el 3
JL: ¿Por ejemplo?
Ad: 2.5

JL: Y si se tratase de una competición en la que queremos quedarnos lo más cerca posible de 2... ¿qué número dirías?
Ad: Sí, dos con una milésima, 2,001
JL: Alexandra, ¿podrías superar ese resultado?
Al: Sí, 2,00001
JL: Si ese número, el más próximo a 2, existiese, ¿que aspecto tendría?
Al: Sería con muchos decimales... todos ceros... menos el último que sería un 1

JL: En el ejercicio 7, nos dan una suma 1/10+2/100+3/1000+ · · · y nos pregunta sobre la naturaleza del resultado: finito, infinito, no se puede calcular,...
Al: Pues que no se puede calcular porque siempre se pueden poner números porque son infinitos los números
JL: Ya, pero el resultado, ¿podría superar cualquier cantidad, por ejemplo el 100 ó el 1000 ó 1.000.000?
Al: No creo
JL: ¿Habría un tope?
Al: No creo que hubiese un tope...
Ad: yo creo que es el mismo caso de los segmentos que siempre vas a poder sumar una cantidad más pequeña
JL: Convirtamos la fracciones en decimales... ¿cuál es el resultado?
Ad y Al: 0.1234
JL: Entonces, ¿cuántos decimales tendría este resultado?
Ad: Infinitos
JL: Bien, pero al sumar todos ¿podremos superar cualquier cantidad que propongamos?
Ad y Al: No
JL: Luego, el resultado ¿sería infinito?
Ad: No, ya que sería menor que 1... claro que es un número finito pero que no puedes averiguar

JL: En el ejercicio 8, vamos dividiendo un número entre dos sucesivamente...
Ad: Al final queda un número demasiado pequeño... bueno, sería un número infinito
JL: Infinito, ¿en qué sentido?
Ad: Pues que siempre se va a poder dividir
JL: Pero, el resultado ¿podría ser 1.35?
Ad: No, tiene que ser más pequeño
JL: ¿Qué significa para ti más pequeño?
Ad: Con muchos decimales... no se...
Al: Yo también creo que siempre se podrá seguir dividiendo
JL: Pero ¿me podrías decir algo más sobre el resultado?
Al: El resultado va siendo más pequeño...
JL: Pero ¿qué es un número muy pequeño para ti?
Al: Pues 0,000...
JL: Y ¿llegaría un momento en que alcanzáramos el 0?
Ad: No, porque siempre habrá una cifra más pequeña

JL: En la cuestión 9 tenemos un cuadrado con muchos triángulos sombreados dentro... Adrián respondió que el resultado es finito e infinito
Ad: Finito porque si contamos con el tamaño llegará un momento en que ya no podamos meter más triángulos dentro, pero si sí se pudieran meter daría infinito
Al: Yo creo que será infinito porque siempre se pueden seguir metiendo más triángulo
JL: Ya, pero fijaos ¿cuánto mide el área del cuadrado mayor?
Al: 100 cm cuadrados
JL: Luego, si sumamos el área de todos los triángulos que hay dibujados y la de los que faltan, ¿podría superar esa suma el 100?
Al: No creo... bueno, si los juntamos todos sí se podría
Ad: Sí, yo también lo creo
JL: Bien, una cantidad infinita de triángulos sí, pero el terreno que ocuparían esos triángulos ¿podría superar el que ocupa el cuadrado grande?
Ad: Yo creo que sí
Al: (Duda) Parece que no podría ser mayor... pero si los sumas sí podrías llegar

JL: ¿Que os sugiere la palabra infinito?
Ad: Algo que es impensable, no se, no tengo...
Al: El vacío

Entrevista nº: 23	**Tipo:** C1	**Curso:** 3º ESO	**Cinta:** 6	**Cara:** A	**#:** 160
Centro: IES Ignacio Ellacuría		**Alumnos:** Lara / Borja			

JL: En la pregunta 2, se os propone borrar un millón de números
L: Yo creo que puse que quedaba infinito menos un millón
JL: Pero eso ¿es mucho o poco?
L: Es mucho, si infinito es mucho... es infinito menos un millón
JL: Pero sobre esa resta que planteas ¿no podrías concretar algo más?
L: No, es eso
JL: ¿Y tú Borja?
B: Yo pienso igual
JL: Pero ¿quedarían más, menos o los mismos números que antes?
B: Menos
L: Sí, menos... es un número infinito porque no te entra en la cabeza pero es un número
JL: Pero ¿son dos cantidades infinitas pero como dos infinitos de distinto tamaño?
L: Yo creo que sí
JL: Fijaos en el apartado c) donde se os pide comparar los naturales con los múltiplos de 3
B: Yo creo que hay igual en ambos... porque nunca se acaba la sucesión de números
L: Pero hay menos en los múltiplos ya que te has saltado números
B: Ya, pero hasta infinito...
L: Pero es menos
JL: Entonces para ti, Lara, ¿hay más en el primer conjunto que en el segundo?
L: Sí
JL: Imaginemos (ejemplo de las bolas de billar y su peso)

L: Hombre si lo miras de otra manera pues será 3 · 1, 3 · 2, 3 · 3,... que son los números naturales que en realidad es 3 por los números naturales y, por lo tanto, serían iguales
JL: Borja ¿qué opinas del argumento de Lara?
B: Pero eso es lo que he dicho yo
JL: Lara, esto ¿te lo ha sugerido el ejemplo de la balanza?
L: Sí, claro; es que estaba pensando de dónde salen los múltiplos de 3
JL: En el ejercicio 3 tenemos una máquina que divide incansablemente por 2 el número que introduzcamos...
B: Nunca llegará al resultado más pequeño, nunca se parará...
JL: Pero ¿cuál será ese resultado al que se acerca?
B: 0,0000... infinito
L: Sí, infinitos ceros
JL: Pero, ¿llegará al cero en algún pequeño?
B: No
L: No, porque el cero es nada... sería un número exacto, infinito no... sería infinitamente pequeño

JL: En la pregunta 7, nos dan una suma 2+1+1/2+ · · · y según le añadimos fracciones qué ocurre con el resultado de la suma
B: Se acerca a un número... porque cada vez los números son más pequeños y no le añaden mucho valor al resultado ya
JL: Y ¿a qué número se acerca?
L: A 4, porque es 2 mas 1 y lo que queda da 1
JL: ¿Y por qué está convencida de que no pasarán de 1 la suma de todas esas fracciones?
L: Porque son pequeñísimos y cada vez más pequeños... hombre, puedes llegar a 1 pero... yo creo que no llegaría a 1... bueno, depende como lo mires
JL: ¿Podrías dar un argumento más contundente?
L: No se...
B: Es que hay muchos decimales y al sumarlos no va a pasar de...
L: Claro, sería 0,000... y un número y daría por ejemplo 3,9999.... pero no pasaría

JL: En la cuestión 8 tenemos una serie de círculos dentro de un triángulo y queremos sumar sus diámetros
L: Da infinito porque hay infinitos puntos... los diámetros son infinitos porque hay infinitos círculos; es como en el ejercicio anterior...
JL: Entonces porque piensas que ahora el resultado es infinito
L: Es verdad, no se...
B: Yo creo que se acercaría mucho a un número
L: Sí, es igual pero no está planteado de la misma manera... en el otro son números y aquí es geométrico
JL: Pero, ¿podemos convertir el problema en numérico?
B: Pero en este caso los diámetros no son la mitad
L: Sí, si pensamos que son números podríamos... se acercaría a un número...
B: La suma no da infinita...
L: Es que según como lo mires... aquí hay un espacio infinito y podemos poner infinitos círculos...
B: No, porque el triángulo está limitado... no se...

JL: En la pregunta 10 tenemos la división reiterada de un segmento...
L: Es lo mismo que el ejercicio 7... porque si tomo 2 y lo parto por la mitad da 1, 1 por la mitad es 1/2, luego 1/4, 1/8 y así...
JL: Entonces este problema geométrico se puede convertir en uno numérico como el 7, ¿estás de acuerdo Borja?
B: Sí
JL: ¿Y la respuesta sería la misma?
L: Se acercaría a 4... bueno, no aquí no... daría...
JL: ¿Por que ahora veis claro que ambos problemas son equivalentes y el de los diámetros no?
L: No es lo mismo, esto es lineal y lo otro es una superficie... bueno eran diámetros... es que no se partían los diámetros por la mitad... aunque se partirá... será un numero fraccionario...

JL: En la cuestión 4, nos preguntan si hay números entre 1.999... y 2. Lara respondió que no porque si expresas el primero en forma de fracción da 2 y añadía que 1.999... es casi, casi 2 y Borja decía que no porque después del 1.999.... va el 2; ¿qué significa esto Borja?
B: Es que el 2 es el siguiente
JL: ¿Son diferentes ambos números?
B: Sí
JL: Entonces, hemos aprendido que entre dos números diferentes siempre se puede encontrar otro... ¿me podrías decir otro que esté entre ellos?
B: No
JL: Pero entonces son iguales
B: No, no es el mismo
JL: Lara, tras pasar el decimal a fracción parece que te queda alguna duda...
L: Es que tampoco son exactamente iguales
JL: Entonces ¿cómo explicas el cálculo que hiciste?
L: Es que eso da 2... no se... es muy cercano... Es que si a 2 le restas 1.999... da un resultado muy pequeño...
JL: Bien, si esa diferencia la dividimos entre 2 y esto se lo sumamos a 1.999... daría un número intermedio...
L: ya, ya,... no se es que la diferencia es infinitamente pequeña...
JL: Pero entonces, para ti una cosa infinitamente pequeña ¿no existe?+
L: Sí, sí, pero no me entra en la cabeza

JL: En la cuestión 5 se os pregunta por la división por cero
B: A mi eso me suena a nada... es que el cero no existe... al dividir 5 entre 0 que no es nada... no puede dar un resultado... no se...
L: Si tienes 5 cosas y las partes entre 0 es que no lo partes entre nada... Depende como lo mires, si lo piensas como cuando eramos pequeños, 5x0 es 0... entonces del 0 al 5 van 5 entonces es mayor que el divisor y no puede ser... no se... si divides 5 entre cero partes te queda 5 partes, bueno, ... es que como si no dividieses...
B: No se... es una comedura de coco

JL: En la cuestión 9 se os da una colección de fracciones en la que se os pide cuál es el origen y el final
L: Por la izquierda va aumentando el denominador... no se puede saber porque infinito es un número inmensamente grande...
JL: Pero cómo va a ser el resultado
L: que va a ser inmensamente pequeño.... no se, 0,0000....
JL: ¿Y hacia la derecha?
L: Pues quedaría 1/1 que es la unidad
JL: Entonces esa colección de números están entre...

L: 1 por el final pero no tiene un origen... bueno, se acerca mucho a cero...
B: Yo también lo veo así
JL: ¿Cuántos números habrá entre el primero y el último?
B: Infinitos
JL: ¿Qué os sugiere la palabra infinito?
B: Algo como muy pequeño... no se... como el espacio... infinito... muy lejos
L: El universo... aunque supongo que habrá algún fin... Una línea que no tiene fin

Entrevista nº: 28		**Tipo:** C1	**Curso:** 3º ESO	**Cinta:** 7	**Cara:** A	**#:** 174
Centro: IES José de Churriguera			**Alumno:** Álvaro			

JL: En la pregunta 1 se habla de los puntos que caben dentro de un cuadrado...
A: Da igual las dimensiones porque un punto no tiene ni alto, ni ancho, ni largo, ni nada pues según cómo hagas el punto pues puntos caben los que tu quieras (taxativo)
JL: ¿A qué te refieres con lo de que "según cómo hagas el punto"?
A: Pues, a ver, tu con un bolígrafo haces un puntito... pues ese punto es y si lo haces con algo más pequeño pues haber infinitamente más puntos
JL: Y esto ¿cómo se relaciona con lo que has dicho de que un punto "no tiene ni alto, ni ancho..."?
A: Pues que... un punto... pues que no tiene dimensiones...
JL: Pero si el punto lo marcas con un rotulador grueso...
A: Pues también es un punto... bueno sería un círculo... pues, vaya,... no se que decirte
JL: ¿Sientes que hay alguna contradicción?
A: Sí, sí... Es que como a la hora de dibujar un punto con un lápiz tiene un determinado tamaño... pero, claro, en realidad un punto no tiene medidas...

JL: En la cuestión 2, borramos un millón de números del conjunto de los naturales...
A: Quedan infinitos (taxativo)
JL: Pero ¿más o menos que antes de borrarlos?
A: Igual (taxativo)... porque infinito es un número que nunca se acaba por lo que si le quitas unos pocos pues sigue llegando hasta infinito
JL: Pero si nos imaginamos los números en el interior de un recipiente, al quitar el millón de números...
A: Pues nada, sigue habiendo los mismos...
JL: Bien, y si consideramos ambos conjuntos en dos cajas diferentes y las pesamos...
A: ¡! que no se pueden pesar porque serían infinitamente grandes... que no... es que llenarían... si no se acaban nunca para qué los vas a echar a una caja
JL: Entonces, en el apartado c) comparamos los naturales y los múltiplos de 3...
A: Nada, también serían iguales
JL: pero cuando vamos por el 3 ya tenemos tres números naturales... esto ¿no te extraña?
A: Es que, por ejemplo, si llegasen hasta un millón pues habrían más en este que en este pero como no se acaban nunca, siempre hay uno más... pues hay los mismos

JL: En la cuestión 8 tenemos una serie de círculos en el interior de un triángulo y nos piden si podemos decir algo sobre la suma de sus diámetros...
A: Hombre, siempre se puede hacer un círculo más pequeño... se supone que sería infinito pero ya cada vez sería cada vez más pequeño.... hombre, la verdad es que esto... esto sería un poco raro... sí...
JL: ¿Por qué es raro?
A: Porque sería infinito pero al ser siempre más pequeño llegaría un momento en que sería tan minúsculo... a ver... ya tienes esto y ahora la mitad de eso... la mitad y la mitad.... pero llega un momento en que sería un punto microscópico que ya ni sumaría casi...
JL: Entonces, la suma de esos diámetros ¿crees que podría sumar cualquier cantidad... 100 m, por ejemplo?
A: Sí, si, porque siempre puedes seguir añadiendo
JL: Ahora supón que todos los triángulos los giras 90º... ¿qué ocurriría?
A: Es lo mismo... da igual cómo lo mires...
JL: y eso ¿podría llegar a medir 1 km?
A: Mira, por ejemplo,... bueno, esto es un poco confuso... no se yo...

JL: En el ejercicio 10 dividimos un segmento sucesivamente por la mitad... ¿qué se obtiene al final?
A: Pues algo infinitamente pequeño
JL: ponme un ejemplo de algo infinitamente pequeño
A: Lo más pequeño que te puedas imaginar pues lo divides otra vez y así todo el rato
JL: y eso ¿será un segmento u otra cosa?
A: A ver... es que... un segmento lo vas dividiendo hasta que tu mente no de para más pues ya, punto, lo vuelves a dividir y no se acaba nunca
JL: Ya, y si lo miramos con una lupa, ¿qué veríamos?, ¿un segmento?
A: No se podría, siempre sería más pequeño
JL: Pero entonces ¿no podemos saber si lo que queda es un punto o un segmento?
A: No, porque siempre es más pequeño, más pequeño...
JL: Y un punto, ¿se podría dividir por la mitad?
A: No, !que va¡, no tiene división
JL: Pero al ir dividiendo el segmento, ¿qué nos va quedando?
A: Pues otro segmento

JL: En la cuestión 4 nos pregunta si hay algún número entre 1,9999... y 2
A: No
JL: Pero estos dos números son distintos o son iguales
A: Llega un momento en que sería igual... sería la parte más pequeña que te puedas imaginar para llegar a 2
JL: Entonces podemos poner un signo de igual entre ambos
A: No, porque aunque sea infinitamente pequeña la parte que te falta, te falta

JL: Pero si no son iguales siempre entre dos números distintos podemos poner otro...Por ejemplo, entre 1,8 y 1,9 podemos poner números ¿no?
A: Sí, claro
JL: ¿Entonces?
A: Es que no puedes poner nada detrás del 1,999... porque siempre hay más números... faltarían un cachito pero sería infinitamente pequeño...

JL: En el ejercicio 5 os preguntaba sobre la división 5/0
A: Pues 0, porque si tiene 5 cosas y no se las das a nadie pues da 0... A mi me lo han enseñado así, si tiene 5 caramelos y los divides entre 3 personas pues... eso, pero si no tienes a nadie pues eso, 0
JL: y si hiciéramos la división 5 entre 0, ¿a cuánto cabe?
A: Pues 0... ah no... ¡bueno!... yo es que así no me lo planteo... es que no lo divides...
JL. Pero ¿es posible encontrar algún número en el cociente para que multiplicado por 0 nos de 5 o un número próximo a 5?
A: Es que si multiplicas algo 0 veces pues te da 0... no se... ya lo piensas tanto... que te comes la cabeza...
JL: Bien, tú decías que daba cero...
A: La verdad es que ahora lo veo extraño... es raro... es que parece que no hay ninguna manera de dividir algo entre 0

JL: ¿Qué te sugiere la palabra infinito?
A: Pues una línea que no se acaba nunca... no se algo así

Entrevista nº: 29	**Tipo:** C2	**Curso:** 3º ESO	**Cinta:** 7	**Cara:** A	**#:** 278
Centro: IES José de Churriguera		**Alumnos:** Víctor / Pablo			

JL: En primer lugar hablaremos sobre la cuestión 1 en la que se os pedía comparar tres líneas... Ambos escribisteis que la línea más larga era la A y también la que tenía más puntos...
V: Es que la A si se extendiera sería mucho más larga que B y C y al ser la más larga tendrá más puntos
P: Sí, yo pienso lo mismo
JL: Bien, pero si en lugar de que C tuviera esa inclinación tuviera una mayor, ¿cómo podríais decidir cuál es la más larga?
V: Pues calculando las longitudes, con la fórmula de la longitud de una circunferencia y con el teorema de Pitágoras
P: ... sí...
JL: Y en cuantos a los puntos...
P: Es que todos los puntos son iguales...
JL: Pero ¿para ti un punto tiene tamaño?
P: No, pero si pones un punto que sea del mismo tamaño en las tres, al recorrer tendrás que poner más en la A que en las otras
JL: Y para ti, Victor, ¿qué es un punto?
V: Algo que no tiene ni longitud, ni anchura ni volumen, casi nada por así decirlo

JL: En la cuestión 10 se os daba un número periódico, 2,131131131... y se os preguntaba por las veces que aparecía el 1 y el 3
P: El 1 aparecerá el doble de veces que el 3
JL: Pero ¿cuántas veces?
P: El 1 infinitas veces... y el 3... también infinitas... sería el doble
JL: Luego, para ti Pablo ¿hay infinitos mayores que otros?
V: (en voz muy baja) es que uno se va superponiendo a otro
JL: ¿Qué quieres decir?
V: Pues que pones un 3 pero como se sigue siempre 1313... pues se va superponiendo uno a otro y en eso consiste el infinito en que no se acaba y siempre está en la misma línea así es que las dos respuestas serían infinitas
JL: Pero, si en una bolsa vamos echando todos los unos que van apareciendo y en otra los treses... al final...
V: Es que no puedes acabar... no, no, porque por cada uno hay un tres
JL: Y ¿qué le dirías a Pablo que opina que hay el doble de unos que de treses?
V: Sí, pero porque es un periodo y se van repitiendo hasta el infinito que nunca se acaba
P: Pero es que si por cada 3 metes en la bolsa dos unos pues entonces...
V: No, pero la que antes se llene... porque las bolsas no son infinitas, la que antes se llenaría sería la del uno pero luego...

JL: En la pregunta 3, nos preguntaban si había algún número decimal que multiplicado por 9 diese 1
P: No, no se puede porque da un número con decimales... tendría que ser...
V: Tendría que ser un número periódico, 0,3333... bueno, lo voy a hacer con la calculadora...
JL: Tu escribiste que debería ser 0,1111...
V: Ah sí, porque 1 entre 9 da eso
JL. Pero si multiplicas 0,1111... por 9 ¿daría 1?
V: Claro, tiene que dar eso
JL: A ver, ¿lo puedes hacer con la calculadora?
V: En la calculadora no pueden expresarse números periódicos
P: Es que... daría 1 pero redondeándolo
V: Es que no se puede hacer la multiplicación... es una multiplicación infinita
P: Pero el resto no te va a dar nunca 0
JL: Pero ¿nos podemos imaginar todos los unos que hay?
V: No, no se puede

JL: En el ejercicio 5 nos dan la multiplicación 0,999... x 0,999...
V: Tampoco se podría, daría, redondeando 1,8
P: (lo está haciendo con la calculadora) da 0,9801
JL: Bien, pero Pablo ha escrito 0,99 por 0,99
V: Es que hay que poner infinitos nueves y es inimaginable la multiplicación
JL: Pero ¿podemos decir algo sobre el resultado?, ¿podría dar 1?
P: No... porque... tendría que dar un valor más grande que 1
V: Te saldría un número más pequeño

JL: ¿Os parece que 0,999... y 1 son distintos?
P y V: Sí
JL: ¿Y no podemos encontrar uno que esté entre ambos?
V: Son consecutivos
JL: Entonces son distintos, ¿no?
V y P: ....
JL: 0,97 y 0,98 ¿son consecutivos?
V: No, porque hay decimales después
P: Claro, 0,973, 0,974,...
V: Pero es que no son periódicos...
P: Claro, y un periodo nunca se acaba

JL: En la cuestión 4 nos piden sumar una colección de segmentos cada uno la mitad del anterior... Victor opinaba que eso da infinito y Pablo dijo que daba 2 metros.
P: Porque si juntas todas las mitades te da 1 m y con el otro metro te da 2
V: Yo puse infinito porque se supone que aquí seguiría habiendo segmentos... Pablo tendría razón si se acabara en un momento determinado, pero al ser infinitas no paras de sumar...
P: Es que si vas sumando te da 0,5, 0,75 y luego sigues sumando...
V: Pero te pasarías... por muy pequeño que sea lo que sumes, aunque tardes muchísimo tiempo se llegaría y te pasarías
JL: Veamos la siguiente construcción (reconstrucción sobre un segmento de 1 m con todas las mitades)...
V: Llegará un momento en que pasaremos de este extremo aunque se tarde mucho tiempo...
JL: Pero si voy cogiendo la mitad de lo que queda de segmento... ¿cómo lo podremos superar?
V: Porque siempre se suma

JL: En la pregunta 9 nos piden sumar las áreas de una serie de triángulos que hay dentro de un cuadrado de lado 10 cm. Victor opina que el resultado será infinito y Pablo cree que es finita...
V: Es que cada vez tiene triángulos cada vez más pequeños...
P: Infinito no puede ser porque no se va a salir del cuadrado... tienen que ser dentro del cuadrado
JL: Victor, si sumamos las áreas de todos los triángulos ¿podrán superar el área del cuadrado?
V: ... Podría ser... pero en el plano no... (se sonríe)... bueno, de ese modo sí sería finita... claro

JL: Si convertimos este problema geométrico en numérico tendríamos 1/8 de 100 cm cuadrados, luego la mitad de esto,... 12. 5, 6.25, 3.125,... Victor, ¿te parece que este problema es equivalente al ejercicio de los segmentos anterior?
V: No, porque aquí hay un área determinada y en el otro caso tiene una línea que es infinita y nunca se va a acabar
JL: Ya, pero si lo pensamos en la versión de un segmento que vamos completando con mitades de segmentos...
V: Es que si vas sumando segmentos te va a dar infinito y aquí tiene un área que está limitada

JL: En la cuestión 8, dividimos sucesivamente un número entre 2...
V: Es igual que el ejercicio cuatro, el de los segmentos...
JL: No, pero aquí no nos piden sumar sino ¿qué se obtendrá al final del proceso?
V: ¡Ah!... Pues siempre habrá algo más pequeño... te acercarás a cero pero siempre habrá algo más pequeño, no llegarás a 0
JL: ¿Y tú, Pablo, qué opinas?
P: Se quedaría entre 0 y el número que hayas elegido... te saldría un periodo... estaría más cerca del 0 pero depende del número que cojas...
JL: Ya, pero imagínate que has hecho esa división muchísimas veces elijas el número que elijas
P: Te saldría un número como pi... con muchísimos decimales, que no se acaba
JL: Pero el resultado ¿qué aspecto tendrá?
V: Es que siempre hay un número más pequeño
JL: Y ¿qué es un número pequeño para ti?
V: Pues el 1 respecto al 3
JL: ¿Y respecto al 1?
V: el 0,1
JL: ¿Y muy, muy pequeño?
V: 0,00001
JL: Y el resultado de todas las divisiones anteriores ¿se parecería a este número?
V: Podría ser pero es que se podría continuar

JL: ¿Qué os sugiere la palabra infinito?
P: No se... un agobio... depende...
V: Una cuerda que empiezas a tirar y nunca se acaba, el espacio...

4º ESO

Entrevista nº: 6	Tipo: C2	Curso: 4º ESO	Cinta: 2	Cara: B	#: 154
Centro: IES Arquitecto Peridis		Alumnos: Sergio / Desirée			

JL: En la primera pregunta de vuestro cuestionario se os pedía comparar tres líneas... Sergio respondió que la más larga era la C y que la que más puntos tiene es la A, ¿quieres añadir algo a esa respuesta?
S: La A es la que más puntos tiene, porque da mucha vuelta, pero no es la más larga
JL: pero, ¿se te ocurre algún método para averiguar exactamente la longitud de cada una de ellas con el fin de saber cuál es la más larga?
S: podría ser con eso de la hipotenusa y esta otra con lo de dos pi erre y luego dividir por la mitad...
JL: ¿y por qué no lo hiciste entonces?
S: porque, no se, era tarde y estaba cansado

JL: y una vez decidido cuál es la más larga, sea la A o la C, ¿por qué una tiene más puntos que las demás?
S: porque se ve a simple vista; se ve que la A tiene más puntos
JL: y tú, Desirée, ¿qué opinas?
D: es que no se muy bien a qué se refiere
JL: bueno, si suponemos que las líneas están formadas por puntos, se trata de decidir cuál de ellas va a tener más puntos, ¿te parece a tí que alguna de ellas va a tener más puntos que las otras?
D: Sí, la A
JL: ¿Por qué?
D: puf, por lo que ha dicho Sergio, que... no se,... que para el mismo espacio recorre más...
JL: pero entonces, para vosotros los puntos ¿tiene tamaño y forma?
S: los puntos no se pueden ver, pero un punto tras otro va haciendo líneas...
JL: pero aunque no se puedan ver, ¿todos los puntos son iguales? o ¿unos puntos son más grandes que otros?...
S: es que un punto es como es y ya está, es siempre igual y ya está
JL: y tú, Desirée...
S: no se, será del tamaño que cada uno le quiera poner

JL: en la pregunta 2, se os pedía comparar algunos conjuntos....; os recordaré lo que pusisteis: Desirée tu dijiste que el conjunto más grande era el de granos de arena y el más pequeño el de puntos en un cuadrado... si sigues pensando lo mismo, ¿por qué?
D: es que el más grande estaría entre las dos primeras porque, por ejemplo, el número de células estaría determinado y el de puntos del cuadrado también...
JL: Entonces, tu ves ahí que hay conjuntos que son más grandes que otros; ¿habría entre ellos algún conjunto que sea infinito?
D: el de los números naturales
JL: ¿y algún otro?
D: yo creo que no, los demás serían limitados
JL: ¿y tu Sergio?
S: pues que los números naturales es infinito y ese tiene que ser el mayor; en cambio, el número de estrellas, habrá muchísimas pero hay un final, se podrán contar pero...; con los granos de arena pasa igual; el número de puntos en el cuadrado yo creo que será infinito...
JL: ¿por qué?
S: porque siempre habrá una medida más pequeña y te puedes tirar así...
JL: un medida más pequeña ¿te refieres al tamaño de los puntos?, ¿no?
S: sí, lo de micras y todo eso y no acabarías nunca... y lo del número de células lo mismo, habrá muchísimo pero se tendrán que acabar

JL: en la pregunta 3, nos pregunta si es posible encontrar un número decimal que multiplicado por nueve nos diese uno...
S: yo este lo veo fácil...; no recuerdo lo que puse pero ahora lo veo muy fácil
D: yo creo que no... es que no recuerdo lo que hice
JL: no importa, seguro que no es impertinente tu respuesta
D: es que no se si es posible o si no
JL: entonces, Sergio
S: pues multiplicar por un noveno
JL: pero cuál su forma decimal
S: cero como periodo de 1
JL: entonces, nueve por 0.1(periodo), ¿nos va a dar uno como resultado?
S: no, nos va a dar cero coma nueve, infinitos nueves, pero lo que es uno exacto, no
JL: ¿y cómo es posible entonces que si 0.1(periodo) es un noveno la multiplicación uno u otro número no de el mismo resultado?
S: porque los decimales tienen ese problema, que muchas veces son infinitos y los tienes que cortan en algún momento y las fracciones no... puede que eso te dar un resultado con infinitos decimales, pero luego si lo multiplicas por otra fracción puede ser que te de
JL: Desirée, entonces ¿no podemos decir que 0.99999.... sea 1?
D: yo creo que redondeándolo pues sí, pero así dejándolo normal nunca daría uno
JL: entonces 0.9(periodo) y 1 ¿no los podemos igualar?
D: si no los aproximamos, son dos números distintos
JL: la cuestión 4 habla de un conjunto de segmentos, cada uno la mitad del anterior, y se trataba de ir uniéndoles y averiguar su longitud total
D: Infinito
JL: la suma total ¿va a dar infinito?
D: sí, porque siempre podrá haber una mitad más pequeña, no se, como los números son infinitos siempre se podrá seguir dividiendo y...
S: yo puse 3.5 metros porque en vez de uno puse... no me acuerdo lo que hice pero me daba más de 2... pero yo creo que hay que poner infinito por lo mismo que dice Desirée, porque siempre se va dividiendo...
JL: entonces, ¿tú crees que siempre que sumemos una cantidad infinita de cosas va a dar infinito?
S: es que aquí se trata de una medida, tenemos una medida menor y nunca terminará

JL: en el ejercicio 5, nos pedía multiplicar 0.9(periodo) por 0.9(periodo)...
S: no me acuerdo..., lo hice con la calculadora y me daba una cosa muy rara,... y puse que no...
JL: bien, pero qué opinas ahora
S: es que 0.89 periódico no me pega
JL: ¿por qué?
S: porque es como si fuera uno por uno y 0.89 se aleja mucho del uno y puse que no... no tenía mucha idea ...
D: yo creo que sí se podría calcular pero que nunca llegarías a un resultado exacto, ya que no son números decimales que no son exactos, el resultado sería infinito
JL: pero ¿a qué te refieres con infinito?
D: pues que no tiene final

JL: En la cuestión 6, se os preguntaba cuál es el número más pequeño entre 2 y 3...
D: no se
JL: ¿me podrías dar un número próximo a 2 y que no sea 2?
D: pues 2.0000.... no se, con infinitas cifras
JL: ¿con infinitos ceros o infinitas cifras no importa cuáles?
D: principalmente ceros, yo creo
JL: y si sólo ponemos dos coma e infinitos ceros, ese número ¿sería un poquito mayor que 2?
D: no, tendría que haber detrás algún..., por ejemplo un uno que es lo más pequeño después de cero
JL: ¿te parece que podríamos llegar a escribir ese número?

D: no, porque se podrían poner muchos ceros y después un uno
S: yo creo que no se puede porque las cifras decimales serían infinitas, entonces no se puede calcular
JL: pero ¿por qué dices que no se puede calcular si me está diciendo cuál es?, ¿para tí no existe?
S: no, porque no hay final

JL: En la cuestión 7 se tenía una suma de fracciones 1/10+2/100+3/1000+□□□ y se os preguntaba por el resultado de esa suma...
D: yo creo que es un número infinito
JL: ¿por qué?
D: porque se pueden seguir sumando números hasta infinitas veces
JL: entonces ¿es semejante al ejercicio de los segmentos?
D: sí
S: yo estoy entre que es infinito y que no se puede calcular
JL: pero...
S: es que aquí el resultado no va a ser muy grande pero como no tiene fin... no será un número muy grande pero será un número infinito
JL: si lo convertimos en decimales y sumamos los primero términos obtendríamos algo así como 0.1234... ¿te parece, Desirée, que sería un resultado muy grande?
D: no, siempre sería cero coma algo
JL: así, si volvemos a leer las respuestas posibles...
S: yo sigo pensando que no se puede calcular, porque...
D: yo creo que sigue siendo infinito
JL: entonces, ¿quieres decir que si seguimos añadiendo números, podremos llegar a cualquier cantidad, por ejemplo, a siete?
D: no, eso no, infinito se refiere al número de cifras decimales

JL: En el ejercicio 8 se os pregunta que se divide reiteradamente entre dos un número positivo cualquiera y se os pide una respuesta sobre lo que ocurrirá al final...
D: se puede acercar a un valor pero no creo que llegue a un determinado valor, yo creo que seguiría...
JL: pero seguiría ¿hasta dónde?
D: a un número muy pequeño
JL: y ¿qué es un número muy pequeño para tí?
D: con muchas cifras decimales, que lleve muchos ceros a lo mejor
JL: lo podrías describir
D: que lleve muchos ceros seguidos
JL: entonces, según vayamos dividiendo por dos, se acercaría mucho ¿a qué número?
D: a cero coma algo
S: el resultado no se podrá calcular pero estará muy cerca de cero, ya que negativo no puede ser... siempre se va dividiendo entre la mitad pero es que no puede llegar a cero nunca aunque llegue un momento en que sea cero con muchísimos ceros pero alguna cifra tiene que estar ahí

JL: en la pregunta 9 tenemos que opinar sobre la suma de infinitos triángulos...
S: este es como el de antes, entre infinito y que no se puede calcular... no se
JL: pero ¿por qué no lo puedes calcular?; ¿te faltan datos?
S: porque siempre hay una medida menor, empiezas con el microscopio o lo que quieras y no terminas nunca
D: yo creo que es la b) y la c) ya que es infinito y no se puede calcular
JL: entonces, para ti infinito ¿es lo mismo que "no se puede calcular"?
D: pues por lo que ha dicho Sergio, porque siempre habrá una medida menor y nunca tiene final
JL: y ¿podríais hacer una aproximación sobre el resultado final?, ¿la suma de todas esas áreas podrán ser cualquier o no pasará de cierto número, será un número enorme,...?
S: no se puede calcular
D: no superará el cero...
JL: ¿?
D: bueno, superará el cero pero no llegará al uno
JL: pero ¿cuánto vale el área del cuadrado grande?
S: 100 cm cuadrados
JL: entonces, ¿creéis que sumamos las áreas de todos los triángulos podrán dar más de 100?
S: ... no se puede calcular y ya está
D: superarla no, creo que no, siempre va a ser más pequeño que el área del cuadrado...

JL: en la última se os da un número periódico, y se os pregunta cuántas veces aparece cada cifra...
S: el uno aparece el doble de veces que el tres
JL: pero, ¿cuántas veces aparece el uno y cuántas el tres?
S: infinitas veces
JL: ¿infinitas veces el uno e infinitas veces el tres?
S: sí, pero el uno tendrá el doble... es una especie de contradicción pero...
JL: muy interesante, ¿por qué te parece una contradicción?
S: porque supuestamente infinito tiene que ser para todos lo mismo, pero el uno es como si fueran dos infinitos
JL: pero para tí ¿hay distintos tamaños de infinito?
S: supuestamente es el mismo, pero aquí los dos tienen un valor infinito pero el uno tiene el doble que el tres
JL: y, tú Desirée, ¿observas la misma contradicción que Sergio?
D: también lo mismo, pero es que no se, ninguno aparece más veces sino que los dos aparecen infinitas veces
JL: pero uno de ellos ¿mas que el otro?
D: es que si aparecen infinitas veces no puede aparecer más veces uno que el otro
JL: pero parece que hay más unos que treses
D: no se..., infinitas veces los dos, ... no se..., infinitas veces, no se cuál aparecería más veces
JL: pero ¿podrías saberlo cuál aparece más veces?
D: no, porque al salir infinitas veces nunca acaban y no llega hasta un valor determinados y no puedes contar el número de veces que aparece el uno y el tres

JL: por último, cuando piensas en el infinito, ¿qué imagen te viene a la mente?
S: el símbolo de infinito
JL: y después del infinito
S: nada más...
D: yo, algo sin final,... como un camino muy largo sin final

Entrevista nº: 18	Tipo: C2	Curso: 4º ESO	Cinta: 5	Cara: A	#: 195
Centro: IES Juan de Mairena		Alumnos: Patricia / Laura			

JL: En la cuestión 1, se os pedía comparar tres líneas diferentes... Patricia respondió que la más larga era la A porque tenía altura y luego decías que todas tenían el mismo número de puntos. ¿Qué quieres decir con que A es la más larga porque tiene altura?
P: Pues que si la pones recta mediría más...
JL: ¿Y estás segura de que es más larga que la C?
P: Sí
JL: Pero si la C la inclinamos más ya no estaría tan claro que la A es más larga... entonces, ¿se te ocurre alguna manera de poder estar segura de que una es más larga o sólo a simple vista?
P: No, no, se podría hacer con una fórmula... es que no me acuerdo
JL: Bien, suponiendo que A es la más larga, ¿por qué dices que las tres tienen el mismo número de puntos?
P: Porque si los puntos los ponemos así hacia abajo, todos tienen igual...
JL: Es decir, tu trazarías líneas verticales y ¿quieres decir que a cada punto de una línea le correspondería otro en las demás líneas?
P: Sí, sí
JL: Y tú, Laura, ¿qué opinas?
L: La A es la más larga
JL: Decías que medía 3.14 aproximadamente... ¿cómo lo averiguaste?
L: Porque hice la fórmula y la dividí entre dos
JL: Pero en cambio no calculaste el valor de C
L: Claro, es que si giras este extremo coincide con la B y entonces miden lo mismo la B y la C
JL: ¿y se te ocurre otra manera de averiguarlo para comprobar este resultado?
L: Sí, con una regla
JL: Ya. Y con respecto a los puntos, tu dijiste que la que más puntos tiene es la A porque era la más larga... ¿Sigues pensando lo mismo?
L: No. Bueno, si la estiramos sí, si no, no
JL: Pero si se tratan de cuerdas o alambres inextensibles... y la estiramos...
L: Sí, es que es más larga
JL: Pero ¿es más larga si la estiramos que si la mantenemos curvada?
L: Es igual, pero... sí, tendrán las tres los mismos
JL: Pero, ¿qué pensáis que es un punto?
P: Es un circulito pequeño
JL: Si lo dibujo con un lápiz o con un rotulador grueso, ¿ambos serían puntos?
P: Sí
L: Sí
JL: ¿Y cuando deja de ser un punto?; un punto del tamaño de una moneda ¿tendría sentido?
L: Si está relleno sí
P: Sí
JL: Pero, los puntos ¿se pueden dividir, partir?
P: Sí
L: (se sonríe)... no se... es que un punto es un círculo que sirve para separar algo de otra cosa
P: Es un círculo que está relleno
L: Para separar palabras... o segmentos...

JL: En la pregunta 4 se considera una familia de segmentos cada uno la mitad del anterior y los vamos uniendo uno junto a otro... ¿cuánto medirá el nuevo segmento?
L: Sería infinito
P: Sí, mediría infinito
JL: Patricia respondió que daría infinito porque aunque no lo viéramos esas medidas existen y Laura dijo que daría infinito porque siempre que divides entre dos te va a quedar algo aunque sea pequeño. Entonces, esa colección de segmento ¿podría pasar de 10 metros?
L: Sí
JL: ¿Y de un millón de metros?
L: Yo creo que sí
JL: Mirad esto. Consideremos aquí el de un metro y le vamos poniendo encima uno de medio metro, otro de un cuarto de metro, ... entonces ¿seguís pensando lo mismo que antes?, ¿pasaríamos de la barrera que tenemos aquí? (Se sonríen)
L: Yo creo que pasarían de ese extremo porque podemos seguir dividiendo
P: Claro, yo pienso lo mismo
JL: En la cuestión 8 dividimos un número entre dos sucesivamente... ¿qué se obtiene al final?
P: No lo se...
L: Un número muy pequeño... no se,... 0,000 algo
JL: Pero, ¿podría ocurrir que tras haber hecho un número determinado de divisiones se obtuviese 0?
L: No, seguiría
JL: ¿Veis alguna relación entre este problema y el anterior, el de los segmentos?
L: Sí, es lo mismo
P: Sí, si

JL: El ejercicio 9 os propone un cuadrado con muchos triángulos en su interior... y se os pregunta sobre la suma de todas esas áreas sombreadas. Patricia dijo que el resultado sería infinito y Laura, en cambio, dijo que el resultado sería finito porque el espacio se acabará y no se podrán poner más triángulos...
P: Es que aunque no haya espacio siempre queda algo
L: Pero si no te queda espacio aquí cómo te vas a poner a hacer un triángulo, es que no te entra
P: Que sí, que sí, que aunque sea muy pequeño siempre hay algo
L: Pero es que mira el cuadrado, es que no hay espacio
JL: Laura, en la cuestión de los segmentos dijiste que siempre se podían seguir cortando segmento en trozos más pequeños,...
L: es que aquí el espacio está cerrado
JL: Entonces, llegas al triángulo, por ejemplo, número 2000 y ¿ya no puedes hacer otro triángulo?
L: No, claro, es que este espacio está cerrado; en el caso de los segmentos está abierto y hay espacio para seguir poniendo segmentos...

JL: Fijaros, ese cuadrado inicial tiene de lado 10 cm, ¿cuánto mediría su área?
P: 100 cm cuadrados
JL: Entonces, si sumamos el área de todos los triángulos ¿podrían superar los 100 cm cuadrados?
P: No, porque no hay espacio suficiente
JL: Si volvemos al caso del segmento anterior ¿creéis que tiene algo que ver con este problema?
L: Sí, pero... a ver te pregunta lo mismo, pero es que el caso del segmento está abierto y este está cerrado
JL: Pero el hecho de que veamos las fronteras ¿influye en el resultado a la hora de comparar ambos problemas?
P: Es que no puedes seguir porque esto mide 1 metro y no puedes pasar...
L: Es que al ser un cuadrado está cerrado y no se pueden poner más pero al unir segmento siempre podemos seguir

JL: Me gustaría acabar sabiendo ¿que os sugiere la palabra infinito?
L: Todo... por ejemplo, una manifestación donde hay mucha gente
P: Que no se acaba nunca... pero imágenes no se me ocurre ahora...

Entrevista nº: 19	**Tipo:** C1	**Curso:** 4º ESO	**Cinta:** 5	**Cara:** B	**#:** 0
Centro: IES Juan de Mairena		**Alumnos:** Marcos / Cristina			

JL: En la pregunta nº 2, podéis recordar que borrábamos un millón de números naturales... ¿cuántos quedan?
M: Pues quedarían todos los números naturales menos ese millón
JL: ¿No te atreverías a decir si hay más o menos que antes?
M: Hay menos
C: Yo creo que quedan todos los números, como son infinitos, quitamos ese millón pero los demás siguen... habría menos que antes...
JL: Y si, por ejemplo, respondemos al apartado c), naturales y múltiplos de 3...
C: Hay los mismos
M: Yo creo que también
JL: Cuando respondisteis al cuestionario, Marcos escribió que después de quitar un millón quedaban igual porque los números son infinitos y que ambos conjuntos tendrían la misma cantidad de elementos; Cristina en cambio respondió que no se podría saber los que quedaban porque eran infinitos, pero que ambos conjuntos tendrían la misma cantidad de elementos... Pero, si tomamos bolas de billar (etc, etc)... ¿habrá una bolsa que pese más que la otra?
C: Yo creo que pesa más la de los números naturales
M: Yo creo que siguen pesando igual porque es una serie infinita
JL: Pero hemos transformado el problema...
M: Es que no acaban nunca ni los naturales ni los múltiplos de tres
JL: Bien, pero si nos detenemos en un determinado número, por ejemplo en el 99...
M: hay 99 naturales y 33 múltiplos de 3
JL: Muy bien... entonces, sobre el peso de ambas bolsas...
M: Ahora pesarían más los naturales
JL: Y si consideramos todos los números
M: Sí, claro, también, pesan lo mismo
JL: Veámoslo ahora desde otro punto de vista... Cristina va echando una bola con un número natural a una bolsa y tu haces lo mismo, al mismo tiempo, con un múltiplo de 3...
C: Es que es infinito, nunca se acabaría... habría los mismos números, tendrían el mismo peso...
M: Sí pesarían lo mismo porque son infinitos... si nos quedamos con una cantidad finita sí pesarían más los naturales...
JL: En la pregunta 3 nos hablan de una máquina que divide un número entre dos incansablemente... ¿cuál será el resultado más pequeño que puede conseguir?
M: Sigue dividiendo
JL: Pero ¿qué forma tendrá el resultado?
M: Con decimales
JL: Pero, ¿puedes decir algo más?
M: Será cero coma y muchos ceros... un número muy pequeño
C: Yo estoy de acuerdo
JL: Si máquina continuara... ¿llegaría un momento en que esa división diese como resultado 0?
C: No, no puede llegar... porque... habría infinitos números...

JL: En la pregunta 7 tenéis la suma 2+1+1/2+1/4+…, qué ocurre con los resultados parciales?
M: Van creciendo cada vez menos
JL: Pero ¿se podrá superar cualquier barrera?, ¿por ejemplo 100 ó 1.000.000?
M: Sí
C: Sí, si

JL: En el ejercicio 8, hay una serie de círculos inscritos en un triángulo y nos pregunta sobre la suma de sus diámetros
C: No se puede saber... porque no se sabe cuánto mide el círculo más pequeño
JL: Sí, pero la suma de todos esos diámetros ¿podrían sumar más de 100 metros?
C: ...
M: Es que llegará un momento en que dibujes uno que no sepas el diámetro pero sí se podrían sumar todos hasta una cantidad infinita...

JL: En el ejercicio 10 vamos dividiendo un segmento por la mitad sucesivamente... al final...
C: Casi no quedaría segmento... no se... quedaría un punto
JL: Y ahí ¿acabaría el proceso?
C: No, sí podríamos seguir partiendo el punto por la mitad...
M: Yo pienso lo mismo

JL: Si volvemos a la cuestión de la suma anterior... consideremos un segmento que mida 1 m, le añadimos otro que mida ½ metro, ... Si sumamos todos estos números... estamos sumando una cantidad infinita de cosas y he ha dado...
C y M: 2 metros
JL: Entonces ¿tenéis algo que decir sobre el ejercicio de la suma anterior?
M: Se acerca indefinidamente a un cierto punto
JL: ¿A qué punto?
M: A 4
JL: ¿Podrías intentar convencer a Cristina?
M: Es que es lo mismo
JL: Si regresamos al ejercicio de los círculos... donde tenemos un diámetro más otro mas otro... ¿qué pensáis ahora?
C: No, mediría una cantidad finita
M: Claro, es que se acerca a un cierto número

JL: En la pregunta 6, consideramos un gran bombo de lotería y jugamos al 5 o a un número entre 1 y 10.000.000... ¿qué podéis decir sobre la probabilidad de acertar?
C: Para el 5 es sólo una posibilidad...
JL: ¿Una entre cuántas?
C: Entre infinitas
JL: Y eso ¿qué tipo de resultado daría?, ¿sería grande o pequeña la probabilidad?
C: No, sería muy pequeña
JL: ¿Y la otra situación?
C: Sería mayor, tendría más posibilidades
M: Es que hay más números... aunque sigue siendo difícil acertar porque hay infinitos números
JL: Pero ¿la probabilidad sería mayor?
M: Sí, más sí pero no mucha más porque son todos los números

JL: En la cuestión 9 se os daba un conjunto de fracciones y se os preguntaba sobre el origen y el final de las mismas. Marcos decía que el final sería 1/1 y que no tendría origen porque los números son infinitos...
M: Es que por la izquierda aumenta cada vez más el denominador... y llegará un momento en que sea infinito...
JL: ¿y qué tipo de número se obtendrá como resultado?
M: Uno muy pequeño... cero coma cero, cero,...
JL: Parece que se acerca mucho ¿a qué número?
M: A 0
JL: Pero, ¿se llegará a alcanzar?
M: No, no
JL: Cristina escribió que no tiene origen ni final, ¿por qué?
C: No se, ahora pienso como Marcos
JL: Bien, parece que todos estos números están comprendidos entre dos fronteras, entre 0 y 1; ¿cuántos números hay entonces entre ambos?
C y M: infinitos
JL: ¿Os parece razonable que entre 0 y 1 haya infinitos números?
C y M: sí, si

JL: ¿Qué os sugiere la palabra infinito?
M: Algo que no acaba
C: No se, el infinito es todo pero no es nada... se me viene como imagen el cielo.

Entrevista nº: 21	**Tipo:** C2	**Curso:** 4º ESO	**Cinta:** 5	**Cara:** B	**#:** 237
Centro: IES Ignacio Ellacuría	**Alumnos:** Beatriz / Rubén				

JL: En primer lugar hablaremos del cuestión 2 en la que se os pedía comparar algunas cantidades. Beatriz escribió que no hay un número para calcular esos números aunque luego decías que podía ser infinito. En cambio Rubén establecía un orden en el que el más grande eran los números naturales y el más pequeño el de células. Beatriz, a pesar de tu respuesta ¿habría alguno que fuese claramente mayor que los demás?
B: Supongo que el número de estrellas... bueno, es que yo creo que todas esas cantidades son infinitas... aunque el número de células del cuerpo humano no estoy segura... supongo que no serán infinitas porque en algún momento se tendrán que acabar
R: Es que el más grande es el de números naturales porque no tienen límites; las estrellas no se sabe si hay infinitas o no y en cuanto a los granos de arena es que se tienen que acabar... no se podrán contar pero si se pudiesen contar sería una cantidad ...
B: Yo creo que son infinitos... bueno, en realidad serían finitos pero es que se ve una cantidad tan grande... la verdad es que es un poco lío

JL: Me gustaría comentar la pregunta nº 3 en la que se pide buscar un número decimal que multiplicado por 9 de 1...
R: Es que yo divido 1 entre 9 y se obtiene
JL: Pero si multiplicas el resultado anterior por 9, es decir 0,1111... por 9 ¿daría 1?
B: es que son infinitos decimales
R: Hombre, es una aproximación... tendríamos que ver si da 1...
JL: Sí, pero la multiplicación 0,11111... x 9 ¿daría 1?
R: Claro daría un resultado aproximado
B: Yo creo que no existe la solución... porque da 0,9999....
JL: Y ¿entre este resultado 0,999... y 1 habría algún otro número?
R: No, es que después de 0,999... viene el 1
JL: Entonces, ¿no serían iguales ambos números?
B: No, no, sí hay algo entre ambos... es que como 0,999... es infinito no se sabe lo que hay en medio... no se, bueno quizás si...

JL: En el ejercicio 4 tenéis una serie de segmentos, cada uno la mitad del anterior y se os pide que los unáis y digáis algo sobre la medida del segmento que resulta...
B: Daría infinito, sí
R: Sí, daría infinito

JL: Entonces, siempre que sumemos una cantidad infinita de cosas, ¿el resultado será siempre infinito?
R y B: Sí, claro, porque estás siempre sumando
JL: consideremos el siguiente experimento; dejamos a parte el segmento de 1 m; debajo de él vamos situando la ½ metro, la de 1/4 de metro,... ¿pensáis que pasaríamos de este otro extremo?
B: Claro, es que no paramos de añadir segmentos
R: Claro
B: Es que tampoco llegaría a 2 metros... es que si lo piensas de esa manera, que los trozos son tan pequeños pues no llegará pero si supones que la recta tiene infinitos puntos pues no acabará...

JL: En la pregunta 9, se trata de sumar las áreas de una serie de triángulos en el interior de un cuadrado...
R: Dará infinito
B: Esto se supone que continúa
JL: Sí, claro
B: Pues entonces da infinito porque es como la anterior
JL: Pero ¿cuánto mide el área del cuadrado?
B: 100 cm cuadrados
JL: Luego, la suma de todos los triángulos ¿puede ser mayor que la del cuadrado?
B: No, no, no puede ser,... claro es finito el resultado... ya no se... es que, es verdad, llegará un momento en que si vas cogiendo la mitad y la mitad y la mitad se acabará el espacio...
R: Pero el espacio no termina... porque luego tu puedes seguir haciendo cuentas y cuentas y cuentas... y no terminas...
B: Ya, pero es espacio está limitado por el cuadrado
JL: A ver, Rubén, los triángulos ¿se pueden salir del cuadrado?, es decir, la "parcela" que representan los triángulos ¿podría ser mayor que la del cuadrado?
R: No, eso no... no se
B: Es que cuando llegas al centro del cuadrado llegas al fin...
JL: Si convertimos el problema en numérico como indica Rubén, tendríamos 25+12.5+6,25+… ¿se acabaría este proceso en algún momento?
B: Es que... no se... no, no acabará la división
JL: Bien, numéricamente no acaba Rubén, pero geométricamente ¿es el mismo problema?
R: Es que con área no puedes dibujar todos los triángulos...
B: Yo creo que el resultado es infinito porque si numéricamente no tiene fin... geométricamente tampoco

JL: En el ejercicio 7 se os da una suma de fracciones 1/10+2/100+…
B: Va a ser un resultado infinito
R: Sí, yo creo que también... es que sumas infinitas cosas
B: pero ¿cómo vas a sumar infinitas cosas?
JL: Convirtamos las fracciones en decimales... (Lo hacen en el papel)
B: Pues daría 0,1234 que si seguimos sería un número infinito
JL: ¿Qué entendéis por número infinito?
R: Que nunca se acaba
B: Claro
JL: Infinito ¿no sería una cantidad muy grande?
B: No..., bueno, que es grande está claro
JL: ¿Y varios millones?
B: No tiene porque... esto es 0,12345... y es infinito, es pequeño, muy pequeño pero tiene infinitas cifras...
R: Es que sería infinita la parte decimal
B: Es un número infinito pero con infinitas cifras decimales

JL: En la pregunta 8 nos proponen dividir sucesivamente un numero entre dos... Beatriz respondió que no se obtiene un último resultado y Rubén dijo que se obtiene un número negativo decimal. Rubén ¿tu crees que si comienzas por un número positivo podrás obtener en algún momento un número negativo?. Veamos un ejemplo. Comenzamos por 5 y lo dividimos entre dos
R: 2.5
JL: entre 2
R: 1.25
JL: entre 2
R: 0 coma algo
JL: y entre 2
R: 0 coma algo... claro, no puede dar negativo
JL: Beatriz, qué dices tu sobre el tipo de resultado final
B: Daría 0,00000000 y muchísimos ceros
JL: Es decir, se acercaría mucho ¿a qué?
B: A cero
JL: Rubén, ¿llegaríamos a conseguir el 0?
R: No... porque al dividir entre 2... siempre queda un número que puedes volver a dividirlo y te dan más decimales... se va haciendo cada vez más grande el resultado...
B: Claro, no llegaría a 0; sería un número con infinitas... bueno, serían finitas pero no llegaría a 0

JL: En la pregunta 10, se os da un número periódico con tres cifras de periodo y se os preguntaba cuántas veces aparecían las cifras del periodo, el 1 y el 3 y si aparecía mas uno de ellos que el otro o aparecían las mismas veces...
B: Aparecen infinitas veces los dos... Yo creo que aparecerá más veces el 1 que el 3
R: Pero es que como van a aparecen infinitas veces los dos no puede aparecer uno más veces que el otro
B: Ya, aparecen infinitas veces pero si cortas en cualquier cifra siempre va a haber más de uno que de otro
R: Quizás lleve razón porque hay dos unos por cada tres
JL: Bueno, Rubén pero fijate que Beatriz ha dicho que esto ocurre si cortas en un lugar determinado... 100 ó 1000 decimales... Pero si echamos todos los unos en una bolsa y los treses en otra... y cada uno de vosotros va echando una cifra simultáneamente...
R: Claro, echas infinitos
B: Pero cuando se acaben los treses aún quedan unos...
R: Claro
B: Es que aunque sean infinitos, no importa, hay más unos que treses... el doble...

JL: ¿Qué os sugiere el infinito?
R: Números muy grandes...
B: Lo de la película de Toy Story... "el infinito y más allá"...

Entrevista nº: 33	Tipo: C2	Curso: 4º ESO	Cinta: 8	Cara: A	#: 101
Centro: Centro Escolar Amanecer	Alumnos: Daniel / Laura				

JL: En primer lugar vamos a tratar la primera pregunta de vuestro cuestionario donde se os pedía comparar algunas cantidades. Daniel respondió que el menor era el de los puntos del cuadrado y el más grande el conjunto de los números naturales. Laura, en cambio, dijo que todos los conjuntos dados eran infinitos y que por lo tanto no se podían contar ni comparar. Daniel ¿quieres añadir algo a tu respuesta?
D: Yo pensé que el número de puntos en el interior de un cuadrado no creo que sea infinito aunque sean muchísimos igual que los granos de arena y todo... pero los números naturales sí son infinitos... Y las estrellas serán muchísimas pero serán un número determinado
JL: A ver Laura tu utilizas dos palabras infinitos e incontables... ¿para ti son equivalentes estas dos palabras?
L: No, a ver... en realidad es que son incontables y luego algunos que sé son infinitos por ejemplo los números naturales. Luego, los puntos que caben en el interior de un cuadrado pues depende de cómo sean los puntos, de su tamaño, podrían ser infinitos. Incontables son todos
JL: Pero entonces has distinguido entre los números naturales y los demás... ¿sería este el conjunto más grande?
L: Bueno, todos son incontables pero segura, segura estoy de que los naturales son infinitos
JL: Entonces ese conjunto ¿sería el más grande?
L: No necesariamente...
JL: Y del resto que tu consideras como incontables ¿no podrías aventurar alguno como el más pequeño?
L: No, porque son incontables
JL: Daniel, ¿podrías darle a Laura algún argumento con el que convencerle tu respuesta?
D: Por el tamaño, porque la Tierra es mas grande que un cuadrado de 10 cm
L: Sí pero imagínate que los puntos son pequeñísimos...
D: Sí pero los granos de arena son pequeñísimos también... es que no se sabe... depende del tamaño de los puntos... es igual que las células pues habrá muchísimas... dependerá de cada cuerpo humano
JL: Para vosotros los puntos ¿tienen tamaño y forma?
L: Sí, puede haber de muchas formas y de muchos tamaños
JL: ¿Cómo definirías un punto?
L: Un punto... pues... no se... es que...
D: No se... una forma geométrica, pequeña no tiene porqué ser...
JL: Si marco tanto con un boli como con un rotulador grueso en un papel, ¿será un punto?
L y D: Sí
JL: ¿Y si hago un círculo del tamaño de un CD?
D: No
L: Sí
JL: ¿Y que ha ocurrido desde la marca del rotulador al CD?
D: Es que es muy grande... pero ¿con el agujero en el centro?
JL: No, no, todo relleno
D: Ah, entonces sí, sí sería un punto
L: Claro, un punto grande pero un punto
JL: En la pregunta 5 os da un producto, 0,999... x 0,999... Daniel dijo que el resultado sería 0,999....1
D: Claro por el 81, ya que nueve por nueve da 81 y son tantos nueves...
JL: Laura respondió que será un número entre 0,9 y 1, que fuese periódico... pero ¿qué número puede haber entre esos dos?
L: Infinito
D: Pero a 1 no podría llegar
L: Claro, no puede llegar
JL: Pero ¿qué aspecto tendría ese número?
L: Periódico... 0,8181...
JL: Pero ese número no está entre 0,9 y 1...
L: (utiliza la calculadora para comprobarlo) he puesto 0,9999 por sí mismo y me da 0,9989001 y entonces si pusiese más nueves pues el número seguiría infinitamente... como 0.999... no está determinado pues el resultado tampoco va a ser...
JL: ¿Y por qué no está determinado?
L: Porque hay infinitos nueves
D: Yo es que vi que siempre tiene que acabar en 1... es un resultado infinito, no va a ser un resultado concreto
JL: Pero el resultado va a estar más cerca de 1 que 0,999... no va a ser menor que éste
D: No, va a ser menor porque 9 por 9 da 81
L: Yo estoy pensando que... puede ser menor o mayor...
D: Mayor que 0,9 sí pero mayor que 0,99 no... bueno, ...

JL: En la cuestión 3 se os pedía encontrar un número decimal que multiplicado por 9 diese 1. Daniel respondió que no se conseguiría porque al multiplicar 9 por 0,1111... se consigue una aproximación muy grande; Laura dijo que sí ya que de una ecuación elemental obtuvo que el número en cuestión es 1/9; ¿qué más podéis decir?
L: Es que 1/9 es un número fraccionario que si lo pasamos a decimal te sale periódico, no va a ser exacto y si lo multiplico por 9 me da 0,999....
JL: y eso ¿es uno?
L: No, es casi uno
JL: luego ¿estás de acuerdo con Daniel?
L: Si
D: Es que eso es como si fuera 1
JL: Entonces ¿podemos escribir 0,999... = 1?
L y D: No, aproximadamente
JL: Luego estos dos números no son iguales y podremos encontrar algún otro que se halle entre ambos, ¿no?
L: Sí
D: Sí, más nueves... bueno,... no se podrían meter
JL: Entonces, ¿no son iguales?
D: Pero esto...
JL: Por otra parte, Laura antes cuando lo ha hecho con la calculadora ha dividido 1 entre 9, le daba 0,1111... y luego lo ha vuelto a multiplicar por 9 y le ha dado uno, ¿qué te parece eso Daniel?
D: A ver... (Laura repite el cálculo)... pues no lo entiendo... si es el mismo resultado que me daba a mí y luego a mi me daba 0,999999
JL: Y eso, ¿cómo puede haber ocurrido?

L: Claro, es que el ha puesto un número determinado de 1 pero, en cambio, al dividir 1 entre 9 la calculadora lo está tomando como algo infinito...
JL: Pero esa ¿no sería la realidad ya que son infinitos unos?
L: Sí... y al multiplicarlos por 9 daría más cercano al 1 que si...
JL: Pero si te ha dado 1 exacto
L: Ya pero es más 1 que su resultado que lo ha obtenido con un número determinado de cifras decimales

JL: En el ejercicio 4 se nos pide sumar un segmento con su mitad y su mitad...
D: Yo creo que es infinito porque cuando un número se divide entre dos se puede dividir las veces que se quiera porque aunque sea 0,0000...1 se va a poder dividir entre dos y se podrá seguir sumando
L: Yo estoy de acuerdo

JL: En el ejercicio 9 tenemos una serie de triángulos en el interior de un cuadrado de 10 cm de lado y se nos preguntan qué podemos decir de la suma de las áreas de esos triángulos.
L: También infinito como antes
D: Pero ¿son sólo estos que aparecen en el dibujo?... yo dije finita porque creía que sólo se sumarían estos que aparecen aquí... No, no, pues entonces siempre se podría seguir sumando... y daría infinito
JL: ¿Os parece que este problema tiene algo que ver con el anterior?
L: Sí, claro, porque siempre vas dividiendo por 2 y siempre te va a dar algo
JL: Entonces, fijaos, ¿cuánto vale el área del cuadrado grande?
L: 100 cm cuadrados
JL: Entonces, la suma de todos los triángulos ¿podría sumar 200 cm cuadrados?
D: Pues no... ni siquiera podría llegar a 100 cm cuadrados
JL: ¿?
L: Es infinito pero no se puede calcular
D: Hombre, superponiendo los triángulos...
JL: Pero eso no está permitido
L: No, no, no puede valer más de 100 cm cuadrados
JL: Pero me habéis dicho que este problema y el de los segmentos eran equivalentes
L: Pues entonces no son equivalentes... a ver... es que este está dentro de un área determinada, cerrada pero el de los segmentos sí puede continuar...
JL: Veamos entonces esta otra construcción (construimos sobre un segmento de 1 m la unión de todas las mitades restantes)... ¿podré meter en este segmento todos los demás?
D: Sí
L: No
D: ¡Ostras!
L: Pero si hay infinitos cómo no te vas a salir... nunca vas a parar... no se termina
D: No se... es que se van haciendo más pequeños... pero aún así van a pasar... de este extremo

JL: En la cuestión 8 nos hablan de un número que dividimos indefinidamente entre 2
L: Pues es igual que estos dos anteriores que se puede seguir dividiendo entre 2, entre 2 y no va a parar
JL: ¿Pero qué tipo de resultado se va a obtener?
L: Infinito
D: Bueno será 0,000....1
L: Ah, sí, pero con infinitos decimales
D: Pero es infinito porque lo podemos dividir infinitas veces... no va a dar cero... bueno en esta calculadora a lo mejor sí (risas)

JL: ¿Qué imagen os sugiere la palabra infinito?
L: Puf... pues...
D: El Universo
L: Yo es que siempre lo asocio a número... un número que nunca se acaba
JL: Incluso en tu vida cotidiana
L: A lo mejor en ese caso... pienso en algo que no se puede medir... que se sale de los límites

1º BACHILLERATO

Entrevista nº: 5	Tipo: C1 / C2	Curso: 1º BCHTO	Cinta: 2	Cara: A	#: 370
Centro: IES Enrique Tierno Galván		Alumnos: David / Eduardo			

JL: En el ejercicio 1, que consistía en ordenar de menor a mayor algunas cantidades, ambos escribisteis que todas las cantidades son infinitas; entonces, David, me gustaría que me dijeras si consideras que si esas cantidades, aún siendo infinitas, son comparables y si, por el contrario, no lo son
D: No, porque el infinito es todo igual siempre
JL: entonces, ¿todos los infinitos son del mismo tamaño?
D: Sí
JL: Y tú, Eduardo, ¿estás de acuerdo con David?
E: Sí
JL: Así, por ejemplo, el número de granos sobre la Tierra ¿es de la misma categoría que la cantidad de números naturales?
D: Sí

JL: En la cuestión 2 se os preguntaba si había algún número entre 1.9 (periodo) y 2; ¿tú qué opinas?
E: Que no
JL: ¿por qué no?
E: pues porque 1.9(periodo) tendría infinitos números que serían nueves y cualquier número muy pequeño que le sumes te daría 2
JL: y estos dos números ¿serían distintos o iguales?
E: Hombre distintos sí, pero por poca diferencia
JL: Entonces, si son distintos, ¿por qué no podemos situar uno entre ambos?

E: es que igual, igual no es, el 1.9(periodo) es más pequeño
JL: y tu David...
D: ...
JL: la razón por la que pensáis que no son iguales, ¿cuál es?; ¿no os parece que hay una contradicción entre que dos números sean distintos y, sin embargo, no podamos situar otro número en medio?
E: ... (mucho silencio)

JL: En el ejercicio 7 se os pedía que multiplicarías 0.9(periodo) x 0.9(periodo)... David respondió que el resultado sería infinito porque los números de la multiplicación son infinitos, ¿quieres añadir algún comentario a eso?
D: No
JL: pero ¿qué entiendes tu por infinito?
D: Pues que tiene una serie de números que nunca se acaban
JL: Para ti infinito ¿siempre es una cantidad muy grande de algo?
D: bueno, una cantidad muy grande de algo que no tiene fin
JL: y tu Eduardo, ¿qué opinas de esta operación?
E: No recuerdo qué escribí, creo que lo hice con la calculadora
JL: pues respondiste que el resultado es 0.99999... y que, en efecto, lo habías hecho con la calculadora; entonces, ¿qué te parece ese resultado?, ¿es razonable?, ¿David opina que no se puede hacer?
E: Yo ahora creo que no tiene sentido
JL: ¿por qué no tiene sentido?
E: porque cuando multiplicas ahí todos los números ¿cómo te va a dar lo mismo?
JL: Pero hay una multiplicación que...
E: Sí, el 1 x 1
JL: En efecto, hay una multiplicación y sólo una en la que all multiplicar un número por sí mismo da el mismo número; entonces, ¿en estos no puede dar lo mismo?
E: lo que pasa es que se acerca mucho a uno, entonces la calculadora piensa que es uno
JL: pero la calculadora no da uno
E: ya pero la calculadora lo hace pensando que es 1

JL: en otro ejercicio se os preguntaba cuál es el número más pequeño entre 2 y 3, suponiendo que exista, Eduardo tu ¿qué piensas?
E: yo creo que no se puede calcular porque siempre es dos con cero, cero, cero,... muchos y al final uno, cuantos más ceros se pongan más pequeño es
JL: Pero que no se puede calcular ¿qué significa?, ya que me está diciendo una cantidad
E: sí pero siempre puedes meter ceros en medio, puedes estar años metiendo ceros y no acabas nunca
JL: entonces, que no se puede calcular es cuestión de tiempo, es decir si no me va a dar tiempo a escribir el resultado es que no se puede calcular
E: tu puedes estar mucho tiempo calculando número pero si viene otro y te pone un cero en medio ya es más pequeño
JL: y tu, David, ¿qué opinas?
D: Lo mismo
JL: y tus razones ¿son las mismas que las de Eduardo?
D: Sí

JL: en otra cuestión se trataba de unir una serie de segmento cada uno de los cuales era la mitad que el anterior... y nos preguntaban sobre la longitud de la totalidad de ellos; David...
D: yo creo que es un valor muy próximo a dos metros; yo fui sumando 1 metro y 0.50 metros y 0.25, y como cada vez es más pequeño nunca pasaría de dos
JL: Y ¿por qué estás tan seguro de que no pasaría de dos?, ¿por qué no podría llegar a 2.5 ó a 5?
D: ... no se
JL: Piénsalo mientras hablo con Eduardo
E: Yo opino lo mismo
JL: ¿y por qué estás tan seguro si cada vez le vamos sumando trocitos aunque cada vez sean más pequeños como dice David?
E: pero es son muy pequeños, entonces podrá llegar a 1.9999..., pero nunca a 2

JL: en el ejercicio 8 hemos de sumar las áreas de numerosos triángulos que se construyen a partir de cuadrados... ¿considerarías que esta cuestión es equivalente al ejercicio anterior, al de los segmentos?
E: yo no se si puse infinita... o quizás que no se puede calcular
JL: bien, no importa, pero ahora ¿qué piensas?
E: pues yo diría que no se pueden calcular porque como hay muchos triángulos que sumar, cada vez más pequeños, pues pienso que no se pueden calcular
JL: en cambio en el caso anterior también había muchos segmentos y tu me has dicho que la suma no pasaría de 2... ¿o es que no es el mismo problema?
E: sí, sí se parecen
JL: entonces, ¿crees que se acercaría a algún número concreto, 5 ó 7?
E: claro, yo creo que no pasaría de cierto número
JL: ¿por qué?
E: por lo mismo, porque se va haciendo más pequeño
JL: tú David respondiste que “el resultado será infinito porque por muy pequeño que fuese cada triángulo pero ibas sumando muchas veces”... ¿has cambiado de opinión?
D: es que al ser infinito pues entonces no se podría calcular
JL: pero ¿no se podría calcular porque es un trabajo improbo o porque va dar infinito al final?... si fuese inmortal y pudiese sumar todas las áreas, ¿podría llegar a cualquier número?
D: yo creo que daría un número infinito, porque se acercaría a un número concreto pero las cifras decimales serían infinitas
JL: ah, te refieres a la cantidad de cifras decimales... Pero, ¿la suma de todos estos triángulos podrían llegar a sumar un millón?
D: no se, tendríamos que calcular cuánto mide el área del mayor y así ir recortando y daría el área del triángulo mayor
JL: y tú, Eduardo
E: eh, puf,...

JL: En la pregunta 5, nos dan una serie de fracciones para sumar 1/10+2/100+… Esto ¿daría un resultado finito, infinito,...?
D: sería infinito porque sería cero coma y luego un número de decimales infinito
JL: es decir, sigues pensando que cuando tienes una cantidad con infinitos decimales eso es incalculable... porque al haber infinito...
D: sí, porque aunque redondearas siempre habría un error
JL: y tú, Eduardo, ¿opinas lo mismo?

E: sí, más o menos
JL: tú diste como respuesta "el resultado es un número infinito porque tanto en el numerador como en el denominador se pueden poner infinitos números", ¿me podrías aclarar esto?
E: claro es que en el numerador vas sumando un, dos, tres, cuatro, cinco,.... y abajo igual, podemos poner infinitos
JL: pero, la pregunta es sobre el resultado de la suma, tras sumar 0.1, 0.02, 0.003,... ¿va a dar un resultado finito, infinito y no se va a poder calcular?
E: yo creo que infinito porque será tan grande que no lo vas a poder calcular...
JL: pero ¿por el número de decimales?
E: sí
JL: pero, por ejemplo, para vosotros 0.0037 ¿es un número finito o infinito?
D y E: finito
JL: en cambio, si yo os digo 0.37 periodo de 37 ¿qué tipo de número sería?
D y E: infinito

JL: En el ejercicio 6, se os habla de un bombo gigantesco en el que se hallaban todos los números naturales y se os preguntaba por la probabilidad de sacar un 5,... ¿qué me tenéis que decir sobre esto?
D: pues al haber infinitos números naturales yo creo que sería una probabilidad muy pequeña y a lo mejor no se podría calcular
JL: porque sería muy pequeña, pero ¿qué es una cantidad muy pequeña?
D: pues cero coma cero, cero, cero, cero, periodo...
JL: pero en los dos casos la probabilidad ¿sería igual de pequeña, o alguno tendría mas posibilidades de acertar?
D: yo creo que tendría más posibilidades el que tiene 10.000.000
JL: y en tal caso, la división que harías sería...
D: diez millones entre infinito
JL: y esa división, ¿qué preves que va a dar más o menos?
D: yo creo que también infinito,....
JL: Eduardo, ¿tu qué opinas?
E: sería una probabilidad casi nula... pero, claro, si dividir infinito entre un número real te va a dar infinito.... bueno, nosotros estudiamos eso.... entonces hay una probabilidad más o menos...
JL: entonces, ¿daría igual gastarse el dinero en un sólo número que en diez millones de décimos?
E: más o menos

JL: en la cuestión 9 en la que nos preguntan sobre la posibilidad de que haya varios tamaños de infinitos, David respondía que no, porque el infinito es siempre lo más grande y Eduardo escribía que no, porque el infinito no tiene fin y es absurdo que haya varios tipos... Pero a mí me gustaría que pensarías en los números naturales y en los pares; ¿cuántos números naturales hay?
E y D: infinitos
JL: ¿y pares?
E y D: infinitos
JL: y esos dos infinitos ¿son iguales?, ¿de tamaño?
D: de tamaño no...
JL: Imaginemos que en un conjunto de canicas escribimos todos los números naturales y los echamos a una bolsa y en otra bolsa echamos canicas con los números pares, ¿en ambas bolsas habrá la misma cantidad de canicas?
D: son iguales respecto a que no se puede calcular el número que hay
E: claro porque cada vez puedes echar más
JL: pero en cantidad ¿habría más canicas en una bolsa que en la otra?
E: no
JL: imaginad que en lugar de echar todos los números sólo echamos hasta el 100 (en ambas bolsas), ¿habría la misma cantidad de canicas en una que en la otra?
E y D: no
JL: ¿y hasta un millón?
E y D: tampoco
JL: ¿y hasta el infinito?
E y D: silencio largo
JL: a ver ¿David?
D: yo creo que no se podría saber, porque al haber infinitas canicas no podrías acabar de contarlas y comprobarlo

JL: En la pregunta 10, nos preguntaba dónde había más puntos en el arco de parábola AB o en el segmento [2, 5]...
E: .... (mucho silencio) ... yo creo que, más o menos, habría igual, infinitos ya que los puntos serían minúsculos, casi nulos, y podrían entrar infinitos en cada lado
JL: ¿podemos hacer puntos de diferente tamaño?
E: Sí, unos más grandes y otros más pequeños
JL: y tú David, ¿opinas que los puntos pueden tener diferente tamaño?
D: yo opino lo mismo que Eduardo, pero si se quiere hallar si hay los mismos que en un lugar que otro, tendrían que ser los puntos del mismo tamaño
JL: y si son del mismo tamaño, en este caso, ¿crees que tendrían los mismos puntos?
D: Sí
JL: pero, entonces, si estiramos el arco de parábola y colocamos puntos del mismo tamaño que en el segmento, ¿habrá los mismos?
E: no
JL: además tu Eduardo dijiste que habría infinitos, pero para eso ¿qué tamaño deberían tener los puntos?
E: muy pequeños
JL: pero ¿cuánto?
E: no se, muy pequeñitos
JL: pero aunque sean muy pequeñitos, por ejemplo una milésima de milímetros podríamos dividir la longitud entre una milésima y nos saldrían pues, no se, 200.000.000 de puntos y eso sería una cantidad finita, ¿no?
E: sí, sí
JL: ¿cómo definirías un punto David?
D: ¿un punto?, pues un lugar en el espacio
JL: sí, pero un cubo también es un lugar en el espacio...
D: es que no se cómo explicarlo
JL: y tu, Eduardo, podrías ayudarle a David
E: no
JL: entonces, si tu tuvieras que explicarle a tu hermano pequeño ¿qué es un punto?
E: yo que se, cogería un boli y lo marcaría en una hoja

JL: En la cuestión 12, recordaréis que se os preguntaba ¿cuántas soluciones tenía la ecuación?
E: yo es que me lo inventé
JL: bien, pues invéntalo de nuevo

E: yo creo que tendrá pocas soluciones
D: también, sería un número o dos
JL: y si sólo nos dejan darle valores entre 3 y 5...
E: saldrían menos
JL: David escribió en el cuestionario que el número de soluciones serían infinitas... Diste algunas soluciones como por ejemplo (4, -1/2), es decir que se obtienen valores fraccionarios, negativos, etc... entonces... si a la x le damos cualquier otro valor ¿habría otro valor de la y que verificase la ecuación?
D: se haría la operación y se obtendría
JL: entonces
E: es cierto, habría infinitas soluciones

JL: por último, cuando escucháis la palabra infinito ¿qué imágenes os vienen a vuestra mente?
D: hombre entonces lo de lo números no, pero, sin embargo, lo del espacio sí, ya que como va creciendo cada vez más
JL: ¿y tu Eduardo?
E: algo que no tiene fin y nada más
D: el espacio, la longitud del espacio, o un número muy grande
JL: y si no estás obligado a dar una respuesta relacionada con las matemáticas...

Entrevista nº: 9	Tipo: C1	Curso: 1º BCHTO	Cinta: 3	Cara: A	#: 328
Centro: IES Arquitecto Peridis		Alumnos: Mihaela / Rubén			

JL: En la primera cuestión se os pregunta sobre el número de puntos que cabrían en un cuadrado...
R: Pues cabrían infinitos, porque se puede hacer un punto más pequeño, se puede hacer todos los puntos que quieras, porque se pueden hacer más pequeños
JL: Mihaela, ¿tu crees que un punto tiene tamaño?
M: No, porque un punto no tiene tamaño, es tan pequeño que no se puede medir, se dice que entre dos puntos en una recta siempre puede haber otro...
JL: Pero de la cualidades, tamaño y forma, ¿tu crees que un punto tiene alguna de ellas?
M: No, no...
JL: entonces, Ruben, si para tí depende del tamaño del punto, ¿por qué has respondido infinito?, ¿qué tamaño deberían tener los puntos para que cupiesen infinitos?
R: no se,... no se, ahora después de la respuesta de ella,... yo no se... cuando respondí pensaba que siempre un punto podría ser más pequeño... siempre se puede hacer
JL: pero para tí un punto sí puede tener tamaño
R: bueno, yo pensaba que sí, pero ahora... ya no estoy tan convencido

JL: en el ejercicio 7, se os pedía que compararais tres líneas en cuanto a su longitud y al número de puntos que contienen... Mihaela, ¿qué harías tu para saber cuál es la más larga?
M: pues con la regla, con las fórmulas, A es un semicírculo, B es una línea recta y C es la hipotenusa de un triángulo rectángulo...
JL: Rubén, tu respondiste que la más larga era A, pero ¿cómo llegaste a esa conclusión?
R: bueno, a simple vista... la B no puede ser porque es una recta y C también...
JL: pero imagina que C fuese más inclinada... entonces ¿también lo decidirías a simple vista?
R: no habría cálculos, yo creo, con la fórmula de la circunferencia, y C sería una diagonal y lo podríamos hacer con Pitágoras
JL: Bien, ¿cuál tendrá más puntos?
R: yo creo que A... yo creo que sí, por ser más larga y estará constituida por más puntos,... no se
JL: imagínate un segmento de una cierta longitud, por ejemplo de 2 cm, ¿cuántos puntos contendrá?
R: yo creo que infinitos porque, o sea,...
JL: entonces estas tres líneas podrían considerarse tres segmentos si las estiramos, ¿?
R: los mismos, no se...
M: es que no se pueden comparar porque no podemos medir cuántos puntos tienen cada una, no puedo medir dos cosas que no se; se que todas van a infinito, pero no puedo decir que un infinito es más grande que otro...
JL: pero, ¿por qué?
M: porque el infinito no está definido y nunca va a estar definido

JL: En la pregunta 2, a todos los números naturales le borramos un millón...
M: Quedan infinitos
JL: Pero antes de borrarlos, ¿cuántos había?
M: también infinitos
JL: y esos dos infinitos...
M: no se pueden comparar
JL: pero para tí ¿hay infinitos de distinto tamaño?
M: el infinito es infinito, no se sabe su principio ni su fin... no se, no puedes comparar una cosa que no sabes lo que es
R: yo también pienso que es infinito y que no se puede comparar un infinito con otro
JL: entonces, si imaginamos que cada número lo escribimos en una bolita y en un platillo de una balanza por los naturales y en otro todas las del segundo conjunto... ¿cuál creéis que sería la situación de la balanza?
R: que nunca acabarías de poner bolitas... porque si son infinitas nunca acabarías
M: es que no pueden llegar a tener todas las bolas los platillos, siempre hay una bolita más que poner
JL: o sea que nos podéis pronunciar sobre el equilibrio de esa balanza
M y R: no
JL: y si comparamos los naturales con los múltiplos de 3
M: estos sí pesarían igual, porque como pones más y más...
R: serían infinitos los dos

M: claro... vale que habrá más de los números naturales por la lógica y eso, pero es que de los múltiplos de tres también habrá más y más
JL: ya, pero es curioso porque en los múltiplos de tres nos vamos dejando números...
M: pero también puedes poner más y más...
R: nunca acabas de poner...
JL: pero volviendo al apartado b), si empezamos a contar uno del uno y el otro desde un millón uno, ¿no os parece equivalente el problema a este último?
M: a mi me parece que todo esto es parecido... para mí no son equivalentes...
R: nunca los dos... nunca terminan
JL: Rubén, ¿tu estás de acuerdo con Mihaela de que ambos pesarían igual, los naturales y los múltiplos de tres?
R: sí, porque los dos nunca se acaban, tienen infinitos
M: es que si dices en un número par me paro... entonces no pesan lo mismo pero no te puedes parar porque siempre hay uno mayor
JL: (les recuerdo sus respuestas)

JL: en el ejercicio 11, se habla de un dado que se lanza infinitas veces y se os pregunta por los unos, doses y múltiplos de dos que salen...
R: no lo puedes saber porque tiras infinitas veces y no puede saber cuántos...
JL: pero ¿puede ocurrir que el uno haya salido, por ejemplo, 1000 veces?
R: no, porque si son infinitas veces, sigues tirando y tirando... y habrá salido infinitas veces
JL: ¿y el 2?
R: también, infinitas veces
JL: ¿y los múltiplos de 2?
R: infinitas veces
JL: pero en alguna de esas "bolsas" ¿habrán más que en las otras?
R: es que como son infinitas veces, tampoco lo podrás comparar,... hombre, por lógica parece que el de múltiplos de dos habrán salido más veces... pero es que no se pueden comparar... aunque parece eso,...
JL: pero si la lógica te dice eso, ¿por qué te resiste a aceptarlo?
R: porque como nunca acabas de tirar los dados saldrán infinitos unos, doses y múltiplos de dos y no se pueden comparar
JL: y tu, Mihaela...
M: es que yo pienso que no se pueden comparar, yo vuelvo a lo mismo,... no se

JL: en la cuestión 3, nos dan un segmento de una longitud determinada y lo dividimos reiteradamente por la mitad...
M: nos quedaríamos con un punto
R: yo creo que siempre se puede seguir dividiendo
JL: Rubén intenta convencer a Mihaela de que no se acaba en un punto
R: yo, es que por una parte pienso que se acaba en un punto, pero por otra parte creo que siempre se puede dividir en algo más, porque siempre habrá algo más pequeño
M: es que se acaba en un punto porque es lo más pequeño que hay; hombre llegarás a dos puntos, y entre esos dos habrá un punto...
JL: Bien, convirtamos este problema geométrico en uno numérico: tenemos un segmento de longitud 1 metro y lo vamos dividiendo entre dos... ¿qué va ocurriendo con los resultados?
M: pues va para cero
JL: pero ¿llegas a cero?
M: sí
JL: ¿cuándo?
M: cuando te aburres...
JL: nada, somos robots y no nos cansamos nunca...
M: hombre, si me lo preguntas así, no, claro
JL: ¿y qué diferencia encuentras entre ambas situaciones?
M: suponiendo que el punto, por lo mínimo que sea, se dice que no tiene medida ni nada, pero tendrá su medida o no se qué, pues ese sería ese pequeñito tan cerca de cero
JL: o sea que un punto lo podríamos seguir dividiendo desde este punto de vista
M: sí (se rie)
R: yo es que no pensé en los segmentos sino que lo pasé a números y por eso dije que no acabaría
JL: dada la contradicción que a la que has llegado, Mihaela, ¿cómo resumirías tu postura ante este problema?
M: el punto es punto y se queda como es, y al final del todo sí se alcanzaría el cero...

JL: en la pregunta 15, se os pedía calcular ese límite 1/2^n...
M: no se qué puse, es que no habíamos dado los límites
R: yo puse infinito pero ahora diría que da cero
JL: ¿os parece que tiene esto algo que ver con los de los segmentos?
M: sí, porque es el límite de las divisiones...
JL: y ambos estáis de acuerdo que da cero... ¿cuál es el significado de un límite?
M: que es el número al que tiende...
JL: y eso significa que llegamos...
M: no, el número al que se acerca, más y más
R: se acerca a cero pero nunca puede ser cero

JL: en la pregunta 8, no pregunta si caben infinitos segmentos en un segmento de una cierta longitud...
R: es como lo de antes, lo pensé más como numérico, siempre puedes dividir ese segmento..., por ejemplo si mide un metro, lo divides en dos de 0.5, esos dos en otros dos de 0.25, y así sucesivamente...
M: pero ¿no puedes situar un segmento encima de otro?
JL: no, entonces sería obvia la respuesta
M: suponiendo que un segmento puede ser dos puntos... como hay infinitos puntos, entonces infinitos segmentos

JL: si pasamos a la cuestión 4, se os daba una serie de fracciones y se os pregunta si tienen origen y final... Rubén escribió que no hay origen ni final porque hay infinitos números que pueden hacer de denominador
R: sí, porque por ejemplo...
JL: fíjate que estamos tratando con números naturales...
R: ah, sí; origen no tendría porque sería 1/36,... y llegaríamos a 1/infinito y tendería a cero
JL: ¿lo alcanzaríamos?
R: no, porque siempre podrás seguir dividiendo por un número más grande
JL: ¿y por la derecha?
R: sería cero, ¿no?
JL: bueno, si consideramos que los naturales comienza en 1
R: pues, entonces daría 1
JL: ¿se alcanzaría?

R: sí, creo que sí
JL: y tú, Mihaela (se le recuerda su respuesta: “final tiene porque llegará a 1/1 pero el origen sería un número muy cercano a cero pero nunca cero”), ¿estás de acuerdo?
M: ya, pero si digo que sí me contradigo con una pregunta anterior...
JL: bien, eso es lo que esperaba...
M: ya no se...
JL: ¿podemos considerar que esa sucesión tienen un final y un origen tangible?
M: no, no se puede, no se puede decir que llegas a un número 0.00000.... porque luego habría otro más pequeño
JL: lo que sí podríamos decir es que no traspasará ¿qué valor?
M: el cero

JL: en la cuestión 6, os daban una suma 2+1+1/2+1/4+… y se pregunta sobre la tendencia de los resultados de las sumas parciales...
M: se acerca a 4
JL: ¿por qué?
M: porque se acerca al 4
JL: pero...
M: se de qué iba, pero no se explicarlo... ½ es la mitad de 1 y 1/4 es la mitad de 1/2,... y sumando y sumando se llega a que todas las fracciones dan 1 y 2+1+1 es 4
JL: luego, si sumamos un número infinito de cosas, ¿nos puede dar un número finito?
M: sí, pero si vas terminado todas las fracciones...
JL: pero el caso es que siempre vamos sumando un poquito y ¿no paso de cierto valor, 2 ó 5?
M: ni a 1
R: yo puse que crece indefinidamente, la a), porque pienso que, no se, que podemos sumarle algo, por muy pequeño que sea que siempre va a crecer un poquito
JL: pero crecer indefinidamente significa que podemos aumentar la cantidad todo lo que queramos, ¿te parece que si sumamos todos esos números podremos llegar a 1000 o a 1500?
R: es que,..., crecería muy, muy lentamente
JL: pero tenemos todo el tiempo posible... ¿qué le dirías a Mihaela para convencerla de que eso no se va a acercar a 4 de ninguna manera
R: es que..., no se... hombre, es que siempre puedes sumar algo más... no se... no se... a lo mejor crece pero nos acercamos a 4... no estoy ... es que como siempre se puede sumar más... es que si sumas 1/infinito sería casi cero... o sea que 1000 no se podría alcanzar...

JL: en el ejercicio 9, había que sumar los diámetros de una serie de círculos inscritos en un triángulo...
R: yo creo que será infinito, por lo de siempre porque yo pienso en numérico y pienso que siempre va a haber un número más pequeño...
JL: ¿te parece que esta pregunta tiene que ver con la anterior?
R: sí, porque cada vez son valores más pequeños, cada diámetro nuevo que coges es como si fuera una fracción del anterior
JL: pero antes ha dicho que no llegaría a infinito y ahora que sí llega... ¿esto...?
R: es que no se, por una parte pienso que es infinito pero ahora no sé
JL: pero si como dices conviertes los problemas geométricos en numéricos, ¿en qué se diferencia de la anterior, aunque aquí no es la mitad de la mitad?, ¿crees que esa suma superaría 1000 ó 2000?
R: ....
JL: ¿y tú que dices, Mihaela?
M: pues si trazamos el diámetro así perpendicular al de 4 cm pues llega a la altura del triángulo...
JL: entonces, ¿cuántos sumarían todos los triángulos?
M: pues la altura del triángulo, sí aplicaríamos Pitágoras

JL: En el ejercicio 10, os preguntaba si había más números en [0, 1] o en la semirrecta [0, infinito)...
M: esto es como lo de los puntos,... que entre cada dos números reales hay un otro número real
JL: pero ¿te parece que hay más en uno que en otro?
M: no me comprometo a decir que uno es más grande que el otro porque no lo puedo decir
JL: pero parece como que uno está comprendido en el otro; ni aún así te atreves a decir que uno es mayor que otro o que son iguales...
M: no
JL: y tu, Rubén
R: yo pienso lo mismo que ella
JL: a pesar que hace dos meses dijiste que la semirrecta era mayor...
R: pero es que ahora veo que siempre puedes... por ejemplo, entre 0 y 1 siempre puedes, por ejemplo poner el 0.5, 0.05, y así...
JL: pero yo me quedo con la gana de que me aclaréis si ambos infinitos son de la misma categoría o uno es mayor que otro
M: es que no puedes comparar infinitos porque no son definidos...
R: hombre, a lo mejor a simple vista parece más esto pero no se pueden comparar
JL: una imagen del infinito...
R: algo que..., no se,... que no se puede, ... no se explicarlo, ... algo muy grande que no puedes compararlo con nada, ..., algo abstracto
M: algo indefinido... algo muy grande,... que no sabes lo que es, no sabes lo que pones
JL: y en la vida cotidiana, en otros contexto...
R: hombre en la película Toy Story...
M: lo he oído infinitas veces, lo he dicho infinitas veces, pero todo eso es para expresar que algo es muy grande

Entrevista nº: 17	Tipo: C1	Curso: 1º BCHTO	Cinta: 5	Cara: A	#: 0
Centro: IES Juan de Mairena		Alumnos: Daniel / Eva			

JL: En la pregunta 1, se habla de los puntos que caben en el interior de un cuadrado...
D: Pues cabrían un número limitado... porque la superficie está delimitada
E: Yo creo que también pero también depende del tamaño del punto
JL: Entonces, para vosotros el punto ¿tiene tamaño?
D y E: Sí, sí
JL: ¿Cómo definiríais un punto?
E: pues como una parte de una recta... una proyección de una recta...
JL: Puedes aclarar eso un poco más
E: Pues que tiene principio y fin, porque la recta no los tiene pero el punto sí... bueno, no se cómo explicarlo... es que yo pensé que habría más o menos puntos según su tamaño
JL: Pero un punto ¿puede tener cualquier tamaño?
D: Es que hay puntos más gordos que otros
JL: Entonces, un punto del tamaño de un CD...
E: No eso no... porque...
D: Es que esto es muy difícil
E: Es que hasta este tamaño (señala el punto realizado con el rotulador grueso) sí, pero lo del CD ya no es un punto es una circunferencia
D: Es que tiene más puntos dentro; es un punto con más puntos
JL: Pero para vosotros un punto ¿es algo divisible?
D: sí, claro
E: No, eso no, una recta sí la puedes dividir en segmentos pero un punto no; por ejemplo cuando te dicen una recta va de un punto A a otro B pues estos puntos no se pueden dividir en otros...
JL: O sea un punto no es divisible
E: No es que no sea, no lo se, pero no lo hemos estudiado como algo divisible
JL: Bien, pero aparte de lo que hayáis estudiado que os dice vuestra intuición
D: es que un punto no es nada, no se puede explicar
JL: luego será algo muy pequeño
E: claro... por eso ese tan grande que has dibujado no es un punto...

JL: En la pregunta 10 se os preguntaba dónde hay más números en [0, 1] o en [0, ∞); Daniel respondió que en los dos había los mismos, infinitos. Pero Eva dijo que había más números en la semirrecta porque tendía a infinito. Entonces, a mi me gustaría saber si mantenéis vuestras posturas
D: Yo sí
E: Yo también
JL: Bien, Daniel ¿podrías intentar convencer a Eva de tus argumentos?
D: Sí. Porque de 0 a 1 puedes coger infinitos decimales y en la semirrecta igual, puedes coger infinitos números.
E: Visto así... Yo pensé que de 0 a 1 es un intervalo con límites, es cerrado... pero de 0 a ∞ pues no está limitado... pero yo pensé en número enteros...
JL: Ya, pero si consideras que son números reales ¿qué piensas ahora?
E: Bueno, también,... claro de 0 a 1 hay infinitos decimales...
JL: Si tomamos el segmento [0, 1], Daniel dice que hay infinitos números. Pero ¿podríamos asignarle a cada número un punto?
D: Claro, porque hay infinitos puntos...
E: Es una recta... pero...
D: Es que poder se podría, pero gráficamente es imposible
JL: Ya, pero hablemos desde el punto de vista numérico
E: es que llegaría un momento en que se solaparían...
JL: Entonces, ¿cuántos números hay en el interior de [0, 1]
D: Infinitos
JL: ¿Y puntos?
D: Un número limitado
JL: Así que ¿no podemos asociar a cada número un punto?
E: No, porque pueden llegar a coincidir los puntos unos encima de otros

JL: Si miráis la pregunta 3, recordareis que se trata de dividir un segmento por la mitad sucesivamente...
E: Al final quedará un punto, después del punto ya no se puede dividir más...
D: Pues que siempre va a quedar algo... nunca puedes acabar de dividir aunque llegues a un punto, ya que un punto se puede seguir dividiendo
JL: Pero según vas cortando, ¿qué tipo de objeto os va quedando?
D y E: una recta... bueno un segmento
JL: ¿y cuando se produce el salto de un segmento a un punto?
E: bueno, quizás siempre es un segmento... yo he dicho un punto pero me refería a que siempre queda algo... quizás sea un segmento...
JL: Pero para ti este proceso ¿tiene final?
E: No, no

JL: En la pregunta 8, se nos pregunta si podemos meter infinitos segmentos dentro de uno dado...
D: Yo creo que no porque tarde o temprano te quedarás sin espacio para meter más segmentos
E: Con números sí, como hemos dicho antes, pero con segmentos no... se acabaría el sitio
JL: Nos podemos imaginar el siguiente proceso: situamos un segmento que sea la mitad del dado, luego añadimos otro que sea su cuarta parte, etc...
D: Así sí
E: Sí, claro, aunque quedarían pegados... pero llega un momento en que será todo continuo y no te cabrán más...
D: Sí, si se puede...
JL: ¿Creéis que el problema de los puntos en el cuadrado tiene que ver con este?
D: Es que es igual, en el cuadrado también hay infinitos, depende del tamaño
E: Sí, lo único es que aquello es una superficie y esto es un segmento

JL: Me gustaría que os replanteaseis la definición de punto
D: Pero es que un punto no tiene tamaño
JL: Ya, pero antes opinabais otra cosa
D: es que un punto no tiene forma, no puedo dibujarlo gráficamente... es que si tienen forma tienen tamaño

JL: en la pregunta 4 se da una sucesión de fracciones, 1/31, 1/32, 1/33,... y nos preguntan por el origen y el final de esta sucesión. Daniel comentó que el origen es el infinito y el final es 1 y Eva dijo que no tenía final porque tiene infinitos números
D: Es que los números naturales hacia arriba no se acaban
JL: Pero la fracción que está lo más a la izquierda posible ¿qué forma tendría?
D: Pues sería casi cero... pero nunca llegaría a cero
E: Pero es que si por el final es infinito, también por el principio podría ser infinito...
D: No, porque sólo valen números naturales
JL: Daniel dice que el resultado por la izquierda sería casi cero...
E: Pero el cero no puede ser... nos acercaremos mucho pero no cero
JL: Luego esta colección parece que tiene una frontera por cada lado...
E: Sí, entre 0 e infinito
D: No, entre 0 y 1, pero 0 con paréntesis porque no entra

JL: ¿Qué os sugiere la palabra infinito?
E: Que no se termina nunca... que puedes seguir aburriéndote y sigues
D: Igual, algo que no tiene fin... es que el infinito no se puede ver
E: Hombre, cuando te subes a una montaña, por ejemplo en mi pueblo, y miras a lo lejos y sigues mirando y la vista no te llega... no se

Entrevista nº: 26	**Tipo:** C2	**Curso:** 1º BCHTO	**Cinta:** 6	**Cara:** B	**#:** 297
Centro: IES José de Churriguera		**Alumnos:** Nuria / Jorge			

JL: La cuestión 1 os pedía ordenar una serie de cantidades...
N: Yo no recuerdo de lo que puse... Ya me acuerdo... en la mayoría de los casos no se puede ordenar porque son todos infinitos... por ejemplo, el número de estrellas... pues si el universo es infinito pues el número de estrellas también es infinito... los números naturales también son infinitos porque no tienen final y los números de arena pues también... no se pueden contar...
JL: Pero el hecho de que no se puedan contar... eso ¿significa que son infinitos?
N: Sí, para mi sí... porque cuando no puedes contar algo y hay mucha cantidad supuestamente aparte de incontable es que es infinito porque no sabes cuál es el límite de cada uno... puede que en realidad un puñado de arena sea un número pero, bueno, a simple vista parece que tienes innumerables
JL: Bien, y dentro de todas esas cantidades ¿podrías apostar por alguna de ellas como la más grande de todas?
N: Pues yo ahora no me atrevo...; en otras partes del cuestionario se nos preguntaba si hay varios tamaños de infinito y la verdad es que yo creo que no... con mis conocimientos... no me atrevo... y como el infinito no tiene fin y todos son infinitos pues no puedo clasificarlos...
JL: Jorge...
J: No recuerdo que puse... creo que puse primero lo de los números reales, los naturales y los decimales de pi... En cuanto a lo de los granos de arena evidentemente no pueden ser infinitos... es que si fueran infinitos ocuparían un volumen infinito y la Tierra es finita claro... otra cosa es que no se pueda contar...
JL: ¿Y el más grande?
J: Quizás el de los números reales porque abarquen más... abarcan a los naturales, a los decimales de pi...
N: Yo entiendo que el volumen de la Tierra es finito... pero es que yo entiendo por infinito es algo que no se puede contar, algo que tu sabes que en un punto determinado se va a acabar pero no sabes con precisión en qué número porque hay un montón y no lo puedes contar... y los de los reales pues sí abarca los naturales y los decimales pero no tiene fin... no se
J: Claro pues eso que no tiene fin y lo de los granos de arena tiene que tener fin
N: Tiene que tener fin pero no conoces la cantidad por eso estamos hablando de una cosa infinita porque no podemos clasificarla
J: Que no, que no
N: Si no la puedes contar no la puedes clasificar y si no la puedes clasificar es que es infinita
JL: Para ti, Jorge, ¿qué es infinito?
J: Pues que no tiene fin, que no se acaba nunca y los granos de arena sí que se acaban

JL: En la cuestión 3 nos pedía unir una serie de segmentos, cada uno la mitad del anterior... En ambos casos respondisteis que el resultado sería infinito
J: Hombre si se pudieran seguir midiendo el resultado va a ser infinito porque siempre va a haber otra mitad y siempre puedes seguir añadiendo y vas a unir infinitos trozos...
N: Claro, sería infinito porque partes de una longitud de 1 m, la mitad,... pero las longitudes no se acaban nunca... y no tendrían fin; por lo tanto la longitud sería infinita...; 2 metros no puede ser, es imposible... es que las mitades nunca se acaban...

JL: En el ejercicio 8, se daba un cuadrado con una serie de triángulos en su interior cuyas áreas se quieren sumar... Nuria dijo que no se podría calcular y Jorge dijo que sería un número infinito que no se puede calcular... ¿veis alguna relación entre este ejercicio y el anterior?
J: Claro, porque siempre vas reduciendo la superficie a la mitad... antes era 1 y ahora es una superficie
JL: Si regresamos al ejercicio anterior consideremos la siguiente construcción... (vamos situando sobre un segmento de 1 metro uno que mida ½ m, junto a él otro que mida 1/4 m, ...) ¿pensáis que pasaría en algún momento de este otro extremo del segmento de 1 m?

J: Ahí no vas a llegar nunca
N: Claro
JL: ¿No?
J: No... si puedes seguir dividiendo entre la mitad no vas a llegar, siempre va a haber una mínima distancia
JL: Entonces... si volvemos a la pregunta 3... donde dijiste que la unión de todos esos segmentos sería infinita
J: ¿la pregunta 3?... ah, claro, es que si tu puedes seguir dividiendo... ¡puf!... es verdad...
N: Es que nunca vas a llegar al tope final pero sigue siendo infinito...
JL: Sí, tenemos infinitos segmento... pero estamos hablando de longitudes...
N: Las divisiones se irían acercando al extremo...
J: Pero no llegaría a 2 metros la unión de todos los segmentos...
N: Es que esto... me recuerda lo de los límites... parece lógico...
J: pero también parece lógico lo anterior
N: Es que la longitud podría ser infinita... bueno, no...
J: Claro la suma de todos no puede pasar de 2 metros
JL: Entonces, el problema de los triángulos...
N: Sí, es lo mismo...
J: Sí, tenderá al área del primer triángulo...
JL: Fijaros que manteníais que era infinito pero el área del cuadrado vale...
J: 100
JL: luego...
J: La suma de las áreas no puede pasar de 100

JL: en la cuestión 5 nos daban una colección de fracciones 1/10+2/100+… y también ambos respondíais que el resultado sería infinito...
J: Siempre vas haciendo un número más pequeño
N: Daría un resultado muy pequeño... tendería a cero
JL: Pero el resultado sería...
J: 0,12345... sería un número infinito como el número pi
JL: En cuanto a decimales, pero ¿como resultado?
J: la cantidad es pequeña pero infinita como pi porque se podrían seguir calculando decimales siempre
JL: Pero si llamáis infinito a una cantidad con infinitos decimales ¿cómo llamaríais a una cantidad enorme?
J: Es que como tiene infinitas cifras...
JL: Pero, habitualmente cuando escucháis la palabra infinito, ¿qué entendéis?
J: Pues que no tiene fin, que es muy grande,...
JL: Entonces, ¿lo aplicáis también a números decimales?
J: Claro, a números decimales que no se acaban sus cifras

JL: En la cuestión 6 se os pregunta sobre la probabilidad de obtener un 5 o un número comprendido entre 1 y diez millones
N: Yo dije que era improbable... a ver, es que si comprar un sólo número y como están todos los números naturales pues la probabilidad de sacar un 5 es como un milagro...
JL: Y eso traducido a un valor sería...
N: Pues 0,00000 así infinito y acabado en un 1; la segunda probabilidad también es muy pequeña, bueno diez millones más, bueno 9.999.998, pero como los naturales son infinitos aunque tengas diez millones es muy difícil
JL: Pero ¿es más difícil o menos?
J: Yo pienso que es igual que antes porque los números no se acaban
N: Yo creo que también, que es igual... podría ser un poco más sencillo pero son iguales de difíciles porque el resultado final es infinito
J: Es que si tienes todos los números, no se acaban, las probabilidades son las mismas... muy pocas...
JL: ¿Y qué me decís sobre los tamaños del infinito?
J: Pues el número de decimales y una cantidad muy grande son dos tipos distintos de decimales... pero es que si es infinito es infinito
N: Yo creo que sí hay diferentes tamaños... Es que la idea de infinito la entiendo como que no tienen fin pero dentro que no tienen fin... se podrían distinguir distintos tamaños... puede haber un infinito positivo y otro negativo o un infinito que sirva para los naturales y otro que sirva para los racionales...

JL: ¿Qué os sugiere la palabra infinito?
N: El Universo... bueno, lo que conocemos de él
J: Pues algo muy grande, que no se puede calcular, que es enorme, que no se puede abarcar,...

Entrevista nº: 27	Tipo: C1	Curso: 1º BCHTO	Cinta: 7	Cara: A	#: 36
Centro: IES José de Churriguera		Alumnas: Rocío / Mónica			

JL: En la primera pregunta se os pedía que dijerais cuántos puntos caben en el interior de un cuadrado de 10 cm de lado.
R: Es que yo mediría con el boli lo que caben en un centímetro... porque los puntos... depende del tamaño de los puntos...
M: ...
JL: ¿Qué es un punto para vosotras?
M: Es que cada persona lo puede hacer de muchas maneras, lo puede hacer mucho más grande o más pequeño... o de forma distinta... bueno, forma no se...
R: Es que dependiendo del tamaño del punto caben más o menos
JL: Pero ¿puedes intentar explicar lo que es un punto para ti?
R: Es un espacio... que puede ser más grande o más pequeño
JL: ¿Tu crees que sería lo que marcamos con la punta de un bolígrafo?
M: Sí
JL: Y si trazo un círculo del tamaño de un CD, ¿también sería un punto?
M: También...
JL: En ambos casos dabais una cantidad concreta de puntos porque cada una elegíais un tamaño distinto... ¿queréis añadir algo más?

M y R: ....

JL: En la cuestión 2 se trataba de borrar un millón de números del conjunto de los naturales... ¿cuántos quedan?
R: Pues los mismos, infinitos
M: Sí, yo también pienso lo mismo... bueno, no habría los mismos porque en un caso hemos quitado un millón
R: Pero es que las dos son igual, infinitos
M: Pero si quitas un millón no pueden quedar los mismos
R: Es que si son infinitos, nunca hay fin, y entonces no se sabe
M: Pero tu imáginate que tenemos dos millones de números si quitamos los mil primeros...
R: Sí, eso si pero este caso...
M: Pues entonces aunque sean infinitos quedarían menos números
JL: En el apartado c) comparamos los naturales y los múltiplos de 3...
R: Según lo que ha dicho Mónica habría más en el primero
M: Claro, porque aunque sean infinitos el primer conjunto van seguidos y en el segundo van salteados
JL: Entonces, para ti Mónica ¿hay como dos tamaños de infinitos?
M: Sí, claro; en el segundo faltan números
R: Yo ya no se... podría ser...
JL: (Explico el experimento de las bolas numeradas su introducción simultánea en sendas bolsas)
R: Claro, va a ser lo mismo, aunque tu te saltes el 4, hay el mismo número de bolas... ves, son iguales...
M: Sí... bueno... es que con ese ejemplo que has puesto son infinitas pero tienen el mismo número...
JL: En cambio, por otra parte, al llegar al 3, ya llevamos tres números naturales; es una especie de contradicción...
R: Pero es que... del 3 al 6 da igual que hay el 4 y el 5, tienes el 3 y 6 como tienes el 1 y el 2...

JL: En la cuestión 3 nos hablan de dividir sucesivamente por la mitad un segmento... ¿qué queda?
M: Yo creo que llegará un momento en que ya no se pueda dividir más
JL: En efecto, eso fue lo que respondiste
R: Yo creo que sí se podría dividir, a lo mejor a la vista no pero quizás imaginando que lo pones matemáticamente cualquier número se puede dividir por la mitad siempre
M: Matemáticamente sí se puede dividir cualquier número... pero es que si tienes un segmento llegará un momento en que tendrá un tamaño tan reducido que ya no podrás
R: Ya, no tenemos algo para poder cortar tan pequeño... pero en teoría sí se podría
M: Claro, sería un problema de no poder dividirlo
JL: Entonces, ¿estáis distinguiendo entre problemas numéricos y geométricos?, ¿hay diferencia entre resolver un problema numéricamente o geométricamente?
M y R: Sí

JL: En la cuestión 8 nos preguntan si somos capaces de situar infinitos segmentos dentro uno dado...
M: Yo creo que sí es posible... dividiendo en dos... bueno dividiéndolo infinitas veces... es que es como el anterior que lo vas dividiendo pero... bueno, llegará un momento en que ya no lo podrás seguir dividiendo... o sea que no se podría...
R: Yo sí creo que se puede... porque... porque hay infinitos decimales... aunque no puedas hacerlo geométricamente pero sí se puede con los números...
JL: Parece que tu también ves como equivalente esta cuestión a la anterior que hemos comentado; ¿lo ves aquí más claro que antes?
R: No, no... porque aquí veo los límites... del segmento... pero lo puedes seguir dividiendo cada vez más veces...

JL: En la cuestión 5 nos da 5/0... Ambas afirmáis que no se puede hacer o que no se puede dividir por 0...
R: Es que no tiene solución porque no se puede dividir algo entre nada.... porque necesitas que haya algo a qué repartirlo...
M: Yo estoy de acuerdo con ella
JL: Si entendéis la división como un reparto, ¿se puede realizar la operación 5/0,5?
R: Sí...
M: Sí...
JL: Pero ¿hay alguna diferencia entre 5/3 y 5/0,5?
R: Yo lo veo igual... como operación... como reparto no se...
JL: ¿Podemos entender la división de otra forma que no sea un reparto?
R: Sí, claro
JL: ¿Habéis estudiado límites?
R: Sí, yo lo estudié el año pasado y estudie esto

JL: En la pregunta 9 se os daba una serie de círculo en el interior de un triángulo...
M: Una cantidad finita
JL: En aquel momento dijiste que “no se puede saber porque llegaría un momento en que ya no se podrían hacer círculos más pequeños”
M: Bueno, es que creo que es como las cuestiones anteriores, tú geométricamente llegará un momento en que ya no puedas dibujar más pero matemáticamente sí puedes hallar un diámetro más pequeño
R: Yo creo que da una cantidad infinita... Es que los círculos siempre dejan un espacio... porque si caben infinitos círculos hay infinitos diámetros... aunque sean muy pequeños pero los hay
JL: Pero el hecho de que estén todos los círculos dentro del triángulo ¿no influye para nada?
R: Bueno, claro, cuando un círculo llegara a un punto ya no tendríamos más...
JL: Cuando respondiste por escrito escribiste algo que me gustaría recordarte para ver si me puedes aclarar qué querías decir: “calculas por el T. de Pitágoras la altura y sería aproximado pero sería más largo porque siempre habrá espacio para un nuevo círculo”
R: ¡Ah! porque si este diámetro es el mismo que este todos los diámetros serán esto (señala la altura)
JL: Entonces, ¿cuánto sumarán todos los triángulos?
R: Ya, pero es que no será justo...
JL: Pero la suma de los diámetros ¿será infinita?
R: No, claro... se va a plasmar en un número, en la altura... se va aproximar a un número finito
JL: ¿Qué opinas de esto Mónica?
M: Bueno, a lo mejor sí se puede hacer...

JL: En la pregunta 10, os preguntaba dónde hay más números en [0, 1] o en la semirrecta positiva
M: En la semirrecta
R: Hay igual en los dos
M: Es que en el intervalo [0, 1] son sólo esos números y en el segundo están todos los números positivos
R: Es que de 0 a 1 también hay infinitos

M: Sí, de 0 a 1 hay infinitos pero es un infinito menor

JL: ¿Qué os sugiere la palabra infinito?

R: Pues... no se... la nada
M: El Universo

Entrevista nº: 31	**Tipo:** C1	**Curso:** 1º BCHTO	**Cinta:** 7	**Cara:** B	**#:** 102
Centro: **Centro Escolar Amanecer**		**Alumnos:** **Pedro / Jesús**			

JL: En primer lugar hablaremos sobre la cuestión 2 en la que se borra un millón de números del conjunto de los naturales
P: Siguen quedando infinitos
J: Sí, sí, yo pienso lo mismo
P: Es que por muchos que quites como puedes seguir sumando números y números siguen quedando infinitos
JL: Y ¿en cuál de los dos conjuntos hay más números?
J: Depende del concepto que tengamos de infinito; es que quedarían los mismos porque el infinito es lo máximo... y aunque quiten un millón te queda infinito e infinito es igual a infinito; pero, si lo analizamos lógicamente quedarán menos en el segundo porque le has quitado un mínima parte, aunque sea un mínimo porcentaje del infinito...
JL: Y tu ¿crees que hay varios conceptos de infinito?
J: No, yo me quedo con la primera idea que he dicho
JL: Si echamos los números (convertidos en bolas) en dos cajas (los naturales y los naturales menos un millón), ¿qué relación existe entre el peso de ambas cajas?
J: Claro, así con este ejemplo, pesarían lo mismo porque la diferencia de peso sería mínima... en la aproximación sería cero
P: Yo opino lo mismo... en el infinito sería una mínima parte y pesarían igual...
JL: ¿Consideráis que hay infinitos de diferentes tamaños?
P: No, todos serían iguales
J: Claro, todos serían iguales
JL: Entonces, ¿qué podéis decir del apartado c) donde se comparan los naturales con los múltiplos de 3?
P: Yo creo que tendrían los dos... igual... es que por mucho que se siga sumando sería una cantidad enorme y terminaría siendo igual
JL: Bien, pero dime, cuando llegas al 6, ¿cuántos naturales llevamos?
P: 6
JL: ¿Y múltiplos de 3?
P: 2 sólo... pero es que si lo haces hasta una cantidad determinada habría más pero...
JL: Y ¿porque si llegamos hasta infinito se igualan ambas cantidades?
P: No se, es que el infinito no es una cantidad determinada...
JL: ¿Qué idea tenéis del infinito?
P: Que se puede seguir sumando siempre...
JL: Pero entonces, ¿qué ocurre por el camino para que al llegar al infinito se igualen?
P: Es que los múltiplos de 3 van aumentando de 3 en tres... se llegaría antes al 1000 que con los naturales...
J: Yo matizaría aquí que en un conjunto hay infinito y en el otro habría tres infinitos por así decirlo... Pero claro, aunque multipliques el infinito por 3 sigue dando infinito...
JL: ¿y qué me dices de ese salto que tiene lugar entre considerar un final finito, en el que hay más naturales que múltiplos y esa equivalencia de la que hablas si consideramos infinitos?
J: Es que parece como que la diferencia se salvaría desde el último número considerado hasta el infinito... que como no podemos explicarlo pues en ese salto se explica... Es que por lógica parece que hay más... pero con el concepto de infinito vemos que hay los mismos
JL: En la pregunta 3 nos hablan de dividir un segmento por la mitad indefinidamente.... ¿qué ocurre al final?
P: Es que siempre se podrá cortar por la mitad y no se obtendría una cantidad determinada
JL: Jesús indicó que quedaría un punto en el sentido real de la palabra que es la porción más pequeña de la recta
J: Sí, pero ese punto a la vez, mirado de otra manera, se podrá seguir dividiendo
JL: Bien, bien, pero me gustaría que discutierais sobre la naturaleza de lo que queda... Pedro dice que un segmento y tú, Jesús, que un punto...
J: No, no sería un segmento, yo me refería a que analíticamente sería un punto pero que luego se puede dividir...
JL: Un punto se puede dividir
P: No, pero es que... bueno, no me queda muy claro
JL: Pero un punto ¿tendría tamaño y forma?
P y J: No, no
JL: entonces, ¿sería divisible?
J: Claro, sin tamaño ni forma difícilmente sería divisible... pero yo diría que sí. Es que el punto por definición no se puede dividir pero visto como algo abstracto sí que se puede definir
JL: ¿Y se conoce algún nombre para algo que sea más pequeño que un punto?
J: Depende cómo sea el punto... Por ejemplo, en Dibujo, si pones un punto sí se puede dividir... No se cómo explicarlo... Es que es lo mínimo, una incisión, una marca con el boli... pero si la punta es grueso pues entonces se puede seguir dividiendo
JL: Pasando a la pregunta 8 nos pregunta si es posible situar infinitos segmentos en un segmento dado
P: Hombre, dibujándolos no serían infinitos pero como concepto como lo puedes dividir en muchas partes serían infinitas...
JL: Y ¿cómo se podría realizar?
P: Sería de una medida mínima, lo más pequeño
J: Yo pienso que sí porque aunque pongas uno que ocupe el 99% lo que queda se podría llenar con infinitos segmentos
JL: En la pregunta 4, se os da una sucesión de números 1/31, 1/32, 1/33,... y se os preguntaba por el origen y el final de esa sucesión
P: Yo creo que no tendría origen ya que seguiría aumentando el denominador y llegaríamos a $1/\infty$... que se aproximaría a cero... casi sería cero pero no alcanzaría
JL: ¿Y por la derecha?
J: Sería 1/0, bueno si comienzan en el 1 entonces 1/1, sería 1... ¡ah!, sería los números comprendidos entre 0 y 1

JL: En la pregunta 5, nos hablan de dividir 5 entre 0; Pedro dijo que no es posible porque no se pueden repartir 5 entre 0 y Jesús decía que era una indeterminación
P: Claro es que 5 entre 0 es 0 siempre ya que no puedes multiplicar 0 por ningún número para que de 5
JL: Bien, pero tu hablas en tu respuesta de un reparto. Ahora bien, si entendemos ese cociente como una división, 5/0,5 sí tendría sentido, también 5/0,1... ¿por que al dar el salto a 5/0 deja de tener sentido esta división?
P: Es que en matemáticas 0 por cualquier número por grande que sea da 0, nunca puede dar 5
JL: Si os ha aparecido cuando habéis estudiado límites ¿qué sentido tenía?
P: Ponemos que da infinito...
J: Es que si tiene 5 entre 0,0000....1 pues sí será divisible pero sale un número muy grande y en la aproximación daría infinito
JL: En la pregunta 6 nos dan una suma de números 2+1+1/2+1/4+…, ¿qué va ocurriendo con el resultado? Pedro dijo que crece indefinidamente y Jesús dijo que se acercaría a un número sin llegar a alcanzarlo.
J: Es que tu vas sumando siempre mitades nunca sumas unidades... Pedro tiene razón en que crece indefinidamente pero no hacia el infinito sino hacia 4
P: Bueno, es que como sigues sumando, aunque poco a poco, se irá haciendo cada vez más grande
J: Pero es que fíjate que al llegar al último ya será 1/∞ y eso es cero, ya no sumarás nada
JL: ¿Podrías utilizar un argumento más contundente?
J: Es que ½ es 0,5, 1/4 es 0,25, 1/8 es 0,125 y al llegar a 1/16 ya es 0,0 algo... pues según vas avanzando vas a necesitar muchas milésimas para llegar a obtener una centésima para pasar al 4... y nunca llegarás
P: Pero yo te pregunto ¿cuándo vas a llegar a 1/∞, es decir de qué número saltas para que el denominador sea ∞?
J: No se, lejos... pero da igual aunque sea 1/1000000...
P: Pues será 0,000001 pero sigue aumentando
J: No si yo no he dicho que no aumente
JL: Hablemos de la cuestión 9 donde aparece una serie de círculos en el interior de un triángulo y nos preguntan sobre la suma de los diámetros. Pedro dice que no se podría saber y Jesús dice que el resultado será finito ya que se llegará en algún momento al vértice del triángulo
P: Pero es que aunque llegues al vértice, si lo amplías verás que te queda más hueco y podrás seguir sumando diámetros...
J: Ya, yo había pensado eso pero como los círculos tienen que estar inscritos... llegará un momento en que sí que tengan que tocar... bueno, es que al vértice no puede llegar... Es que por mucho que crezca es que se tienen que acercar a un cierto número
JL: Pedro, ¿qué tienes que decir al argumento de Jesús de que al ser el triángulo un espacio limitado no podremos salir de él?, ¿tiene sentido que la suma sea 1 km?
P: Hombre los círculos serían cada vez más pequeños y aumentaría muy despacio
J: Es que los círculos tienen que ser tangentes con los lados del triángulo...
JL: Imaginemos que giramos todos los diámetros 90º...
P: Quedaría una línea cortando... pero sería también un número, el que quisiéramos... infinito
JL: Pero ¿con qué coincidiría esta línea?
J: Pues por Pitágoras daría... 12 al cuadrado menos...
JL: Luego parece que la suma de todos los triángulos coincide con ...
P: con la altura... pero no llega, se quedaría muy cerca... la verdad es que visto así... no podría pasar de este valor...
JL: Y volviendo a la cuestión anterior, supongamos que situamos un segmento de 2 m aquí y debajo situamos el de 1 m y a continuación otro de ½ m, luego otro de 1/4 de metro y así sucesivamente... Pedro, ¿cabrían en este segmento de 2 m que hay debajo todos estos términos de aquí: 1/2, 1/4, 1/8,...?
P: Sí, si... se acercaría al 2
J: Es que claro, tienes que ir sumando la mitad cada vez, no tienes que ir sumando 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... porque así sí que pasaría del 4... pero así no
JL: Entonces, ¿qué os parece que la suma de una cantidad infinita de cosas de como resultado una cantidad finita?
J: Cuando es un límite... esto es lo mismo...
JL: ¿Qué os sugiere la palabra infinito?
P: Sería un número muy grande... como si fuese mucha cantidad... esto coloquialmente
J: Yo me imagino el símbolo del 8 tumbado... hay infinitas posibilidades de ganar un partido...

Entrevista nº: 32	**Tipo:** C2	**Curso:** 1º BCHTO	**Cinta:** 7	**Cara:** A	**#:** 318
Centro: Centro Escolar Amanecer	**Alumnos:** Carlos / Mónica				

JL: Comenzamos por la primera cuestión en la que se os pedía ordenar algunas cantidades. Ambos coincidíais en que el conjunto mayor era el de los números reales pero a la hora de elegir el menor Carlos decía que este era el número de granos de arena y Mónica dijo que era el número de decimales de pi
C: Es que los decimales de pi son infinitos y los granos de arena no pueden ser infinitos
JL: Bueno, pero tu distinguías entre esas cantidades unas como finitas y otras como infinitas; ¿podrías indicar cuáles son cada una?
C: Las finitas serían los granos de arena... y nada más
JL: ¿Y porque dentro del resto elegiste los números reales como el más grande?
C: Es que por ejemplo si lo comparas con los naturales es que es justo el doble porque lo reales son los naturales y además los negativos; el número de estrellas también serían infinito pero parece menor... y los puntos del cuadrado como el área es limitada... pues...
M: Los números de pi serían finitos... porque en algún momento se tendrán que acabar... Y los reales, pues como decía Carlos son el doble de los naturales... pienso igual que Carlos...
C: ... Es que lo de los puntos del cuadrado se podrían considerar infinitos porque a mi me dijeron que en una recta hay infinitos puntos... es que al ser el área limitada es lo que mas me extraña...

JL: Pero en el intervalo [0, 2] por ejemplo ¿cuántos puntos habría?
C: Muchos...
JL: en la pregunta 7 se os preguntaba por el resultado de la operación 0,999... x 0.999...
C: Tiene que ser 0,9 periodo también, es que tiene que ser un número muy muy aproximado a 1 sin llegar a 1
JL: Pero si multiplicas 0,8 x 0,8 el resultado es menor o mayor
C: Es menor
JL: Entonces, ¿por qué en este caso dices que se aproxima a 1?
C: Pues, es que eso no lo había pensado... pero de todas formas la diferencia con 1 es mínima...
M: Yo, no se...
C: (lo intenta con la calculadora) da 0,999998
JL: ¿Os parece que 0,999.... y 1 son números distintos o son iguales?
M: No, no, son distintos
JL: Entonces, debería haber algo en medio
C: Claro, muchos nueves... es que no puede meter otro número al final porque ya no sería periodo
JL: ¿Y no podemos poner el igual entre ambos?
M: No se, equivalentes quizás...
JL: Pasamos a la cuestión 8 donde se pretende sumar las áreas de una serie de triángulos contenidos dentro de un cuadrado de lado 10 cm...
C: Yo creo que el área no puede llegar a cero... luego, habrá un número al que no llegará pero estará muy cerca
M: No se... podría ser un resultado grande porque siempre podemos seguir sumando
C: Pero si todos los triángulos están dentro de un cuadrado que mide 100 cm cuadrados es que el área no puede llegar ni siquiera a 100
M: Es verdad, sí, tienes razón...
JL: Si pasamos a la pregunta 5 tenemos la suma de fracciones 1/10+2/100+3/1000+…
M: Yo creo que sería infinito... porque hay infinitos números, aunque tampoco se podría calcular porque si son tantos números...
JL: Puedes pasarlo a forma decimal a ver si así se te ocurre algo que añadir
M: Sería... 0,1234... o sea sería un resultado infinito
JL: Ya, ¿y que significa para ti infinito?
M: Pues que nunca se va a acabar
JL: Bien, pero ¿tu crees que esa suma podrá alcanzar cualquier valor, por ejemplo un millón?
M: Pero es que yo el término infinito no me refiero a algo muy grande o muy pequeño sino que es algo que nunca se va a acabar o que no se va a poder contar
C: El resultado nunca va a sobrepasar 0,2; el número de decimales sería infinito... pero el resultado no es infinito de muy grande, claro... Es infinito de que no te cabe en el papel pero como número concreto no se...
JL: En la pregunta 6, nos plantea la posibilidad de jugar a la lotería en la que el bombo se llena con los números naturales; uno de vosotros, Carlos, juega al 5 y Mónica juega a que saldrá algún número comprendido entre 1 y diez millones. Nos plantean quién tendrá más probabilidad de ganar... Carlos, ¿tendrías una gran probabilidad de ganar?, ¿la podrías cuantificar?
C: No... la probabilidad sería 1 entre infinito pero eso según nos han dicho en matemáticas es cero... pero existe una mínima probabilidad de ganar... La de Mónica sería algo más grande pero seguiría siendo muy pequeña... Tendría más que yo... pero muy poco
M: Claro, yo tendría más probabilidad porque además yo también tengo el 5...
JL: ¿Qué dices de ese cociente del que habla Carlos?
M: Sí, se supone que es cero
C: Pero eso es... es que está redondeado, el resultado no va a ser cero... porque no tiene un sentido matemático real...
JL: Entonces ¿tú preferirías el papel de Mónica?
C: Sí, pero sin esperanzas...
JL: En la cuestión 9, nos pregunta si hay diferentes tamaños de infinito
M: Yo diría que no que son todos iguales... bueno, hay personas que tiene la idea de infinito como de algo muy grande pero yo no, yo lo tengo como algo incontable, que nunca se va a acabar. Visto así, pues sí habría dos tipos pero para mí no, serían todos iguales
C: Yo no se... yo creo que no, simplemente es un número grande y ya está
JL: Imaginaros el conjunto de los naturales y el de los pares... ¿cuántos elementos tiene cada conjunto?
C: Claro son infinitos pero... el de los pares es la mitad pero... no se
M: Yo creo que hay más naturales que pares...
JL: Entonces, ¿admites que hay dos tamaños de infinito?
M: Es que sería más infinito uno que otro... parece que hay dos tamaños de infinitos
C: Visto así sí... pero es que el infinito es un concepto que...
M: ...
JL: Suponed que escribimos los naturales en un conjunto de bolas y Mónica las echa en una bolsa y Carlos hace lo mismo con los pares y los vais echando simultáneamente... cuando hayáis echado doscientas mil bolas ¿cuántos naturales habrás echado?
M: Los mismos que él... pero él irá por una cantidad mayor...
JL: Bien, pero estamos hablando de cuántos habéis echado cada uno...
M: Es que los naturales tienen los pares y los impares y ambos conjuntos son infinitos...
C: Es que si va echando una cada uno... no habrá más en una bolsa que en otra pero el que va echando los naturales le quedarán muchas más por meter
JL: ¿Y cuándo se produce ese salto y por qué?
C: No se...
JL: En la pregunta 12 os daban una ecuación con dos incógnitas y se os preguntaba por el número de soluciones en un par de situaciones distintas...
C: ...
M: Tendrían que ser $x = 1$ e $y = 1$
JL: ¿Y no habría más soluciones?
C: Tendría que haber otra ecuación para resolverlo...
JL: Mónica respondió en su momento que había infinitos valores ya que las rectas pueden tener en la mayoría de los casos infinitos valores...
M: Sí porque le das un valor a x y luego despejas la y... sí, yo pienso que hay infinitos
JL: ¿Y por qué mencionas la rectas en tu respuesta?
M: Porque al no tener x^2 no se trata de una parábola y una recta tiene infinitos puntos
C: Sí, es verdad porque si despejamos la y queda la ecuación de una recta y hay infinitos puntos
JL: ¿Qué imagen os sugiere el infinito?

C: No se... el universo...

M: Sí, a mi también el universo

2º BACHILLERATO

Entrevista nº: 1	Tipo: C1	Curso: 2º BCHTO	Cinta: 1	Cara: A	#: 156
Centro: IES Enrique Tierno Galván		Alumnos: Ana / Héctor			

JL: ¿Qué tenéis que decir sobre la cuestión de "cuántos puntos caben en un cuadrado"
A: Bueno, no se, no me acuerdo qué puse... yo pienso que entre otras cosas depende del tamaño del cuadrado pero, no se, creo que sí que entra un número finito un número determinado de puntos
H: Pues yo también según cómo fuera el tamaño del cuadrado y cómo fuera el tamaño de cada punto, según la superficie pues poniendo puntos podría haber infinitos o si tuvieran un determinado tamaño pues se terminaría pero...
A: Es que como el cuadrado tiene un espacio delimitado por eso pienso que es un número finito porque como es delimitado
JL: Entonces, ¿cuál es la idea que tu tienes de un punto?, ¿cómo lo definirías?
A: Un punto... eh, eh, un, un,... un espacio delimitado, una superficie que está delimitada...
JL: Pero entonces, un punto ¿sería lo que marcamos con un lápiz, un rotulador...?, ¿crees que un punto podría tener una definición tan arbitraria?
H: Es que ahí ya no sabría explicarlo muy bien; como siempre desde pequeños nos han dicho que un punto es lo que marcamos, nunca se ha dado una definición... siempre nos han hablado como si supiéramos ya lo que es, pero no sabemos ahora mismo...

JL: En otra cuestión, dadas varias líneas, se os pedía cuál es la más larga de las tres y cuál contenía más punto. Entonces, ¿cómo detectáis cuál es la más larga?
H: Yo creo que dije la A
A: Yo creo que también
JL: Sí, sí, en efecto, pero lo que me interesa saber es porqué
H: Por ejemplo, la del centro ya sabes que mide 2 cm; la C la puedes calcular por Pitágoras...
JL: Ah, bien, es que eso no lo mencionas en tu respuestas... sigue, sigue
H: y se ve que es un poco mayor que la B; la A, por ejemplo si la estiramos, el diámetro sería 2 cm y como es media circunferencia pues sería más grande...
JL: Pero por el hecho de ser media circunferencia ya es más grande
A: Yo simplemente pensé eso, que si estiramos esa media circunferencia tiene que ser un poco mayor
JL: Pero así, a ojo, el criterio sería a ojo...
H: Sí, sería a ojo y luego sería lo que te he dicho
JL: Pero se os ocurre un criterio más objetivo
H: Claro sería la mitad de una circunferencia y como una circunferencia es 2□pi□r, y como r=2 cm, haciendo esto podemos comparar las tres
JL: ¿Y con respecto al número de puntos...?
H: Aplicaríamos el criterio de la más larga

JL: Con respecto a la cuestión que habla de quitar un millón de número al conjunto de los naturales... (se le recuerda a Ana la respuesta que dio en el cuestionario: "Quedan infinitos y entonces no podemos saber con exactitud cuántos quedan" y a Héctor la suya: "Quitemos la cantidad que quitemos seguirán quedando números indefinidamente"); pero a mi me gustaría saber si siguen quedando más o menos que antes...
A: Yo pienso que no puedo saber eso
JL: ¿por qué?
A: Porque los números no tienen, para mí, terminación ya que son infinitos y no lo puedo llegar a saber de ninguna forma
JL: Hasta dónde llegan no, pero si quedan más o menos, ¿lo podrías saber?
A: Yo creo que tampoco porque no sabemos el fin
H: Yo, pues, ahora mismo también puedo pensar otra cosa: si hay una... unos determinados números, aquí están infinitos y aquí se empieza, por ejemplo, desde cero; si aquí hay infinitos números, ahí no sabemos nada y si les quitamos un millón pues lo que te decimos, pues tampoco se nota, pero comparando los dos, aunque sean infinitos, el que tiene ese millón y el que no tiene ese millón, el que no tiene ese millón aunque sea infinito pero tiene un millón menos y las dos se supone que van hacia un infinito juntas
JL: Si, si, los dos llegan al infinito, pero si hablamos de cantidad, como si fuesen dos cuerdas: una enorme, larguísima y a la otra le cortamos un trocito...
H: y aunque sea un trocito muy pequeño pero ya es ese trocito que no tiene la otra
JL: Entonces, ¿os parece que hay distintos tamaños de infinito en el sentido de cantidad, pensando en longitudes, peso,...?
A: Yo sigo pensando que no
H: Yo sigo manteniendo que si va de cero a infinito, y de un millón hasta infinito van los dos hasta infinito que no sabemos hasta dónde es...
A: y como no sabemos dónde acaba
H: así cuando van por un millón y pico uno lleva esa cantidad y el otro lleva un millón menos
JL: Entonces, ¿no os queda ninguna duda de que todos los infinitos son iguales?
A: Yo creo que sí, que son todos iguales...

JL: En otra cuestión dividimos un segmento reiteradamente por la mitad... y se os preguntaba qué queda al final. Ana escribió en su momento que "la parte que queda es muy pequeña pero se puede seguir dividiendo" y Hector decía "No tendría final, sería una sucesión de números cada vez más pequeños"... pero lo que obtenemos, Ana, ¿va a seguir siendo un segmento?

A: Yo puse eso porque si tu razonas eso el segmento lo vas dividiendo y va quedando a una partícula minúscula... pero yo creo que eso no puede llegar nunca a terminar o a...
JL: Pero si llegas a una partícula minúscula, ¿se podrá seguir dividiendo?
A: Yo pienso que sí, que... bueno, no se, ahora me has hecho dudar... Yo pienso que sí, lo que pasa es que llegará un momento en será diminuto, en que será microscópico... que no se podrá llegar a...
JL: O sea crees que sí tendrá final... ¿está pensando en términos físicos y matemáticos?
A: sí, sí, más bien físicos
H: el átomo es la partícula más pequeña de la materia pero es que microscópicamente ya serían unos tamaños que ni a simple vista ni con microscopios...
JL: Entonces, ¿para ti el proceso no acabaría nunca?
H: es que...
A: para mi tampoco, siempre habría algo ahí
H: es que si lo pasamos a números... ese segmento mide 1 cm, se divide por la mitad y da 0.5 y su mitad es 0.25 y así sucesivamente y te puede dar 0.00000....
JL: Entonces, ¿os parece que se ve más fácil con números que con segmentos?
A: Yo lo mire desde la óptica del segmento
H: Yo lo relacione con los números para poder explicarlo mejor

JL: ¿Se pueden situar infinitos segmento dentro de un cierto segmento?. Ana: "no es posible porque el segmento tiene una longitud determinada" y Hector: "Sí es posible porque como no dicen la longitud del segmento y sería indefinido"
H: Sí, porque si a *l* le damos 7 cm entonces aquí puede haber dos segmentos, uno que mida 1 cm y otro que mida 6 cm y ya tenemos dos segmentos
JL: pero se trata de poner infinitos segmentos
A: pero no has puesto infinitos
H: ¿infinitos?... pues si ponemos el mismo ejemplo de 7 cm podrían ser segmentos muy, muy pequeños...
A: pero eso siempre llega a un número determinado, ¿no?
H: por ejemplo, si sabemos que l=7 cm, llegaría un momento en que ya no podríamos meter infinitos segmentos, pero...
JL: Entonces si la longitud es finita...
... Ana mueve la cabeza...
A: ... si tu das una longitud determinada, no puedes meter infinitos segmentos porque está delimitado el espacio
JL: Si tomamos el ejemplo que ha puesto Héctor y pasamos al terreno de los números, considerando el segmento [0, 7], ¿cuántos números reales hay entre 0 y 7? (Dibujo el segmento)
A: a ver, a ver,... puede haber muchos
H: infinitos
JL: y esto ¿nos podría llevar a pensar en infinitos segmentos o no tiene que ver una cosa con otra?
H: Yo es que lo relaciono con los números para poderlo aplicar...
JL: si, si en efecto...
H: como ya he dicho, habrá muchos números, infinitos, 1.111.., 0.1111
JL: entonces, ¿por cada pareja de números que cojamos podríamos construir un segmento?...
A: yo sigo pensando que no se pueden poner infinitos segmentos
H: yo creo que sí... porque se pueden introducir infinitos segmentos... y podemos... entre 6.7 y 7 crear segmentos con 0.000... aunque ponga 80.000 segmentos de 0.0000.... cuando se sumen tendrán que llegar a 7

JL: En la cuestión de los círculos en el interior del triángulo... Ana: "no se puede saber porque no sabemos el diámetro de cada círculo, pero sería finita" y Héctor: "sería una cantidad finita ya que el triángulo tiene fin"... ¿porqué crees, Ana, que es una cantidad finita?
A: pues porque el triángulo tiene un espacio limitado, y por muchos círculos que hagas no te puedes salir de ahí
H: yo pienso lo mismo, aunque empiece por 4 llegará un momento en que no puedes seguir
JL: Entonces, creéis que es una cantidad finita, pero ¿se os ocurre alguna manera de averiguar dicha cantidad?
H: Con los datos dados llegarán un momento en que los diámetros se harán muy pequeños pero al llegar al vértice no se podrá dividir más ya que has llegado al final del triángulo
JL: pero en cambio en el caso del segmento que ibamos cortando opinabais que se podría seguir cortando siempre... aquí ¿no podríamos estar dibujando círculos siempre por pequeños que fueran?... y en tal caso siempre estaríamos sumando una cantidad por pequeña que fuera...
H: pero es que en el caso de los segmentos no había nada que...
A: es que este es un ejemplo parecido al del segmento... entonces yo sigo pensando que el espacio se acabará y no podrás poner más segmentos...
H: yo digo que la suma es finita ya que el número de diámetros es finito pero en el caso de los segmentos podemos seguir cortando y cortando porque no había límite, en cambio aquí se llega al final del triángulo...
A: pero es que si esto está delimitado y en el caso del segmento también había una longitud *l* que terminaba así es que...
H: si pero esa longitud l es esta de aquí y esa longitud l, comparto contigo que llegará un momento en el triángulo en que se deje de dividir porque ya se saldría de dividir
A: claro, pero entonces en el segmento también
H: pero en el segmento... a ver, a ver; estamos hablando del segmento que está aquí en el triángulo y este otro que está en el espacio y no está limitado
A: pero el te ha dado un longitud determinada l
H: pero yo me refiero al de ir dividiendo entre dos... pero en el caso del triángulo tenemos un límite

JL: En otra cuestión os pedía comparar el segmento [0, 1] y la semirrecta [0, ∞)...
H: Yo opino que hay más números en [0, ∞), ya que aunque en [0, 1] haya muchos números, hay infinitamente que no sabemos cuáles son...
JL: pero aquí dentro, en [0, 1], ¿cuántos hay?, ¿te atreves a decir una cantidad?
H: eh... eh... dí tu algo Ana
A: sí, estoy pensando
H: pues lo mismo que antes... empezamos con 0.1 y luego 0.000...
JL: pero ¿te atreves a decir algo más osado que muchos números?
H: es que serían muchísimos números, infinitos pero que estuvieran entre 0 y 1
JL: ¿y en [0, ∞)?

H: también infinitos, ahí infinitos por todos lados

JL: Entonces, te volvería a preguntar ¿te parece que son dos infinitos de tamaño distintos?
H: Sí
JL: Y tú, ¿qué opinas?
A: pues, es que a ver, también opino que habría más en la semirrecta, pero no sabemos con certeza cuántos números hay entre 0 y 1 pero está reducido a un espacio... a un espacio en concreto,...
JL: Entonces, ¿tu también piensas que hay dos tamaños de infinito?
A: yo pienso que sí

JL: Para acabar, ¿que imagen te sugiere el escuchar la palabra “infinito”?
H: indica con el dedo el símbolo de infinito y se sonríe
A: A mí también me viene a la cabeza el símbolo de infinito, pero no se es como algo extenso, el universo, no se, no se, algo indeterminado...
H: a mí, un espacio enorme como si sigues andando y no tienes fin... puedes seguir conociendo... pero no tiene fin, como un camino enorme que llegas hasta aquí y aún puedes seguir caminando.

Entrevista nº: 2	**Tipo:** C2	**Curso:** 2º BCHTO	**Cinta:** 1	**Cara:** A	**#:** 356
Centro: IES Enrique Tierno Galván		**Alumnos:** Alicia / Daniel			

JL. La primera pregunta de vuestro cuestionario era la de ordenar de menor a mayor estas cantidades que veis aquí; se les recuerda sus respuestas
A: Yo cuando lei esto pensé que todos eran infinitos
JL: Entonces, ¿qué criterio utilizaste para clasificarlos?
A: Bueno, yo pensé que, por ejemplo, los granos de arena alguna vez tendrá que, no sé, la Tierra no puede seguir creciendo, y en cuanto a las estrellas, que para mi es el mayor, pues es que siempre habrá alguna más para seguir contando, ¿no?
JL: Tú, Daniel, dijiste en aquel momento que el mayor sería R y el más pequeño el de los puntos que hay en el interior de un cuadrado... ¿sigues pensando lo mismo?
D: pues en lo del cuadrado no, porque ella me ha hecho pensar ahora que los granos de arena están definidos, pero los puntos del cuadrado podrías poner infinitos...
JL: entonces, ¿no dependería la cantidad de puntos en un cuadrado del tamaño de los puntos?
D: no, porque... eh, eh,... no porque se podrían hacer infinitesimalmente pequeños
JL: pero ¿qué es un punto para tí?
D: una región del espacio totalmente definida pero pequeñísima
JL: pero ¿tendría dimensiones?
D: yo creo que sí, pero serían superpequeñas...
JL: ¿y porque R es el conjunto más grande?
D: hombre, porque esos si que son infinitos
JL: pero para ti ¿todos estos conjuntos son infinitos?
D: ... finito es el de los granos de arena y los demás son infinitos... pero R es el más grande porque incluye a los negativos y los demás no tiene sentido que sean negativos

JL: en otra cuestión se os pregunta si hay algún número entre 1.999... y 2. Ambos respondisteis que no, pero a mí me gustaría preguntaros si esos dos números son iguales o distintos
A: Llegarlo a decir no, pero 1.999... se acerca mucho
JL: Entonces, habéis aprendido que entre dos números distintos podéis poner ¿cuántos números reales?
D: infinitos
JL: entonces, ¿entre estos dos habría infinitos?
A: sí, porque tu puedes poner tantos nueves como quieras
JL: pero 1.999... es un número con cuántos nueves
A: con los que queramos
JL: pero la expresión “con los que queramos” e “infinito” las podemos considerar equivalentes
A: Sí, sí
JL: si ponemos infinitos nueves, ¿queda sitio para otro nueve más?
A: Sí, siempre podemos poner más
D: sí, lo mismo
JL: entonces 1.999... y 2 ¿no son el mismo número?
D: yo diría que es el anterior a 2
A: claro
JL: ya
A: pero en realidad no es el anterior porque como siempre podemos estar metiendo nueves
JL: ¿qué tienes que decir a eso Daniel?
D: bueno, pero es el anterior porque es periodo nueve estás englobando el infinito, el número máximo
JL: pero, como decía Alicia, siempre podemos estar poniendo nueves
D: pero es que como nunca se acaba

JL: Hay algunas preguntas que tienen algo que ver con esta. Así, por ejemplo 0.999... x 0.999... Se les recuerda sus respuestas. Daniel dice que da 0.999..., ¿lo confirmas?
D: Sí
A: pero yo al poner lo que puse quise decir que se acercaba a 1 pero que se quedaba en 0.9999..., es decir, que no nunca podríamos tener un resultado finito, por así decirlo
JL: y supongo que 0.999... es distinto a 1 para vosotros
A y D: sí, sí

JL. ¿Cuál es el número más pequeño entre 2 y 3?
D: sería dos coma periodo 0 y un 1
A: yo lo mismo
JL: pero ese número ¿existe?
D: existir en la realidad yo no veo que exista, porque no hay nada que tenga que ver con ese número, pero en tu cabeza puedes llegar a pensarlo, aunque cueste trabajo ver el 1 al final, después de infinito... no tienes el concepto...
JL: pero tu dices que lo podemos imaginar... entonces, para ti, ¿si lo puedes imaginar, existe?
D: sí, claro

A: yo pienso lo mismo, que en la realidad no podemos decir que una cosa tiene ese valor, pero en nuestra cabeza sí podemos formar ese número

JL: en otra cuestión se os pedía unir diferentes segmentos, cada uno la mitad del anterior...
A: yo creo que ahora mismo pensaría infinito, porque con un instrumento de medida, que podría ser un microscopio, podríamos mirar segmentos mucho más pequeños y siempre los iría uniendo...
JL: en efecto, has dado la misma respuesta que cuando realizaste el cuestionario, entonces me gustaría preguntarte ¿siempre que sumemos infinitas cosas el resultado será infinito?
A: Sí, siempre va a salir infinito
D: siempre va a salir infinito, porque va a tener infinitos decimales, aunque por otra parte va a estar definido, porque ya sería prácticamente despreciable como por ejemplo el número pi que, claro, tiene muchos decimales, pero en realidad tienes un valor próximo a él...
JL: entonces, ¿cuál sería tu respuesta ahora?
D: yo creo que sería un valor muy próximo a 2
JL: ¿por qué?
D: porque se irían sumando pero llegaría un momento en que aunque se sumara la mitad sólo aumentaría el decimal, pero el anterior e iría aumentando hacia atrás entonces no pasaría de dos, porque por mucho que sumes...
JL: pero ¿cómo llegaste a esa conclusión?
D: haciendo el cálculo con los primero términos
JL: entonces ¿por qué estás convencido de que no pasaría de dos?
D: porque sólo aumenta la parte decimal ya que al sumar décimas y milésimas nunca podrían superar al 2.

JL: en otra cuestión se os pedía sumar las áreas de unos triángulos cada vez más pequeños... en cambio Alicia respondes de manera distinta al de unir los segmentos... ¿consideras que son dos problemas equivalentes?
A: Sí
JL: Entonces, ¿cambiarías tu respuesta?, ¿cuál de ellas cambiarías?
A: sí, con lo que ha dicho Daniel,... yo creo que la suma de todos los segmentos no sería una cantidad infinita, sino que iría aumentando el número de decimales
JL: Daniel, en este caso, opina que en este caso no se puede calcular, ya que resultaría un número con una cantidad infinita de decimales, pero en el caso de los segmentos opinabas que sería un número cercano a 2. Entonces, ¿puedes justificar la diferencia de opiniones?
D: Sí, es que no se podría calcular porque sería imposible calcular el valor exacto, sería la retahíla de decimales siempre, siempre, y no estaría definido... igual que en el caso de los segmentos pero siempre nos acercaríamos a 2.

JL: En otra cuestión, se os da una suma de fracciones...
A: yo creo que da infinito, porque en el numerador seguiría añadiendo tantos números como yo quisiese y en el denominador tantos ceros como quisiese...
JL: luego, la suma va aumentando cada vez más aunque le sumemos cantidades más pequeñas... pero aún así, tú dices que como vamos sumando el resultado sería grandísimo
A: Bueno, es verdad, si, bueno, ahora cambio mi respuesta, ya que sería finita ya que si sumamos cantidades cada vez más pequeñas, casi 0, nos daría una cantidad muy pequeña...
JL: eso respecto a cada término, pero del resultado opinas lo mismo
A: sí, el resultado no pasaría de 0 coma algo
D: yo pienso lo mismo, la parte entera sería una cantidad definida, pero la parte decimal no, por eso, no se puede decir...
JL: utilizáis infinito en distintos sentidos... a un número con infinitos decimales le llamáis infinito y también a una cosa gigantesca, como por ejemplo a los números naturales
D: yo le llamo infinito a las cosas que veo, que por pequeñas o por grandes, no están definidas, que no puedes decir hasta aquí... lo asocias a...
JL: aunque no sea muy pequeño, porque si es 7.8888.... también
D: sí, porque como no está limitado

JL: En otra cuestión se hablaba de un bombo con todos los números naturales dentro y se os preguntaba por la probabilidad de obtener un 5. Se le recuerda a Alicia su respuesta: 1/infinito en ambos casos y Hector dice que en el primer caso es muy pequeña y en el segundo caso es más grande, ¿qué tenéis que añadir?
A: Pues, que la probabilidad de acertar es muy poca o ninguna ya que tenemos un sólo número pero pueden salir muchos números; en el segundo caso como tenemos diez millones la probabilidad sería algo mayor pero no mucho
D: En el segundo caso pienso que hay alguna probabilidad de que salga pero en el primero yo no llego a pensar que haya alguna probabilidad, aunque pienso que en el bombo está el tuyo ya que están todos, pero como no sabes que está definido eso pues no ves que haya una probabilidad, que es nula
JL: Pero en el segundo caso, cómo escribirías la probabilidad
D: pues 1 entre diez millones
JL: pero...
D: ah, es que lo había entendido mal, pensé que en el bombo sólo estaban los diez millones
JL: pero, en este caso, cuál sería la probabilidad
D: pues sería la misma
JL: ¿la misma?
D: sí, 1 entre infinito, bueno, 10.000.000 entre infinito, pero que sería lo mismo, casi cero, por no decir cero porque sería imposible

JL: Con respecto al hotel infinito y la posibilidad de alojar a cinco personas más...
A: No cabrían cinco más
D: yo no se, esa pregunta me hizo dudar mucho; yo ahora diría que no ya que si tienes un espacio infinito pero está ocupado pues en realidad no te queda espacio...
JL: pero en cambio ambos opináis que infinito + 5 = infinito es correcto
D: pero es que es una cantidad tan grande que lo absorbe
JL: y en el caso de persona ¿no?
A: pero en este caso si está todo ese infinito ocupado, es como un infinito limitado
D: yo pondría infinito, porque despreciaría el cinco frente a infinito, pero en realidad sería infinito más cinco aunque supieras que va a ser muy próximo a infinito
JL: entonces esas dos cantidad no son iguales, ¿queréis decir que habría que poner el símbolo de aproximado?, ¿que son dos cantidades aproximadas no iguales?

D: claro
A: Sí,
JL: entonces, creéis que hay distintos tamaños de infinitos
D: Sí
A: depende a qué lo apliques
JL: por ejemplo
A: pues, en el caso del hotel y a esto
JL: en el caso del hotel, ¿no crees que hay varios tamaños de infinito?
A: si todo ese infinito que tenemos va a estar ocupado... sin embargo, en esto...

JL: ¿Qué imagen os viene al pensar en infinito?
D: como grande y que no ves nada
A: que intentas ver muchas cosas pero al final no ves nada... ves algo pero nunca ves el fin

Entrevista nº: 10	Tipo: C1	Curso: 2º BCHTO	Cinta: 3	Cara: B	#: 142
Centro: IES Arquitecto Peridis		Alumnos: Álvaro / Carmen			

JL: Puntos que caben en un cuadrado
A: yo puse que había infinitos porque no hay unidad de medida para un punto
JL: pero para tí, ¿qué es un punto?
A: un unidad mínima
JL: pero ¿tendría tamaño y forma?
A: no, no se pueden relacionar las medidas con un punto
JL: y ¿habría más puntos en el de 30 cm que en el de 10 cm?
A: sí, tampoco se puede medir, no se puede medir ninguno de los dos
JL: pero, ¿en los dos habría infinitos?
A: claro
JL: ¿y el infinito de uno de los casos sería más grande que el del otro?
A: sí, claro, más grande
JL: entonces, ¿consideras que hay varios tamaños de infinito?
A: no es que haya distintos tamaños, el infinito no es un número que se pueda medir, es como si no hubiera límite, pero si el cuadrado es más grande va a haber más puntos, aunque no se pueda medir
JL: ¿tú estás de acuerdo Carmen?
C: yo en algunas cosas sí, pero en otras no; el dice que el infinito no se puede medir, pero yo creo que el infinito es algo muy grande, pero en un cuadrado que es una superficie cerrada tiene que haber algo concreto igual que el espacio, que es infinito, pero si tienes una hoja o un cuadrado tienes el contorno...
A: yo te digo que sí, no infinito, pero no vas a saber medirlo porque los puntos no se pueden medir..
C: claro, saber no sabes porque no sabes lo que es un número concreto, pero si supieras lo que es un punto, cómo defines un punto, y cuánto ocupa un punto sí podrías saber cuántos puntos hay
JL: para ti ¿un punto tiene tamaño?
C: para mi un punto, es que...
A: si lo tuviera sí que podrías saber los puntos que hay
C: claro, porque si tu tienes un punto tu puedes dividirlo muchísimo... porque un punto es algo muy pequeño, pero si lo divides mucho, mucho... al final te quedaría nada, es que tiene que existir algo
JL: o sea, necesariamente un punto tiene que tener tamaño por pequeño que sea, ¿y hasta cuándo sería un punto?, ¿por ejemplo lo que marcamos con un bolígrafo?
C: es que ese punto a lo mejor tendría muchos puntos
A: es que no hay una medida internacional para un punto, no es como los metros, puedes tener un punto así o así, si hubiera una medida internacional...
JL: entonces, un CD ¿podría ser un punto?
A: si se aceptara por todos que sí...
JL: pero dada la situación que tu mencionas que no hay unanimidad...
A: es que un punto es como que tocas una vez..
JL: pero ¿con la punta de un boli, de un rotulador grueso...?
A: claro, depende...
JL: y para tí, Carmen, resumiendo, ¿habría una cantidad finita o infinita de puntos en el interior de un cuadrado?
C: finita
JL: es decir, ¿se podría calcular?
C: sí
A: finita, pero muy grande
C: entonces infinito, porque si es tan grande, tan grande que no se puede saber pues es infinito
JL: entonces una cantidad muy grande que no se puede saber ¿es lo mismo que infinito?
C: hombre, yo en esta pregunta..., todo el mundo dice infinito, pero yo creo que si es algo determinado tiene que haber una cantidad finita de puntos, no se cuántos porque no se cuánto mide un punto, pero...

JL: en la pregunta 7, se os pedia comparar tres líneas... un semicírculo y dos segmentos... Álvaro, tu respondiste que la más larga era A, pero no indicabas cómo habías llegado a ese resultado...
A: pues, a ver, la C sería raíz de dos al cuadrado mas dos al cuadrado, o sea sería raíz de cinco y esta otra, A, sería dos por pi por el radio...
JL: bien, tu Carmen hiciste lo mismo
C: sí, sí
JL: y ¿cuál de las tres contiene más puntos, si es que alguna contiene más?
A: la A, porque es la más larga, igual que en el cuadrado, como no se puede medir, pues va a tener más
JL: estamos suponiendo, según vosotros, que todos los puntos tienen el mismo tamaño...
C:aquí sería así, si todas las líneas tienen el mismo grosor

JL: si consideramos ahora la pregunta 2, borramos un millón de números naturales de este conjunto... ¿cuántos quedan?
C: pues un millón menos
JL: ¿podrías concretar algo más?

C: bueno, hombre, infinitos porque hay muchísimos, pero si tu piensas en el infinito desde el cero hasta el infinito, pues quedaría el infinito menos ese millón
JL: y de los dos conjuntos, el de los naturales y el que tiene un millón menos, ¿te parece que alguno de ellos sería más grande?
C: la que tiene un millón más, claro; si consideras el infinito hasta el mismo,... es que el infinito no se sabe lo que es, pero...
JL: claro, es que antes me habéis comentado que el infinito es algo no definido... y ahora dices que un infinito es más grande que otro
C: claro, es que...
A: porque a pesar de no tener final, va a tener un millón más siempre, aunque no esté definido, van a seguir avanzando los dos entonces no van a acabar, pero siempre va a tener un millón más
JL: entonces, ¿tu crees que los dos conjuntos van a tener infinitos números?
A: claro
JL: pero ¿un infinito será más grande que el otro infinito?
A: claro, aunque no se puede medir, ... bueno, se puede medir que es más grande pero no se puede medir porque no sabes cuántos hay
JL: pero tu los estás comparando, luego ¿se pueden comparar?
A: claro
JL: y respecto a los dos conjuntos del apartado c), naturales y múltiplos de 3...
A: va a haber más en el conjunto de los números naturales pero tampoco se va a poder medir... se sabe que va a tener más porque de cada tres coges uno, pero...
C: Yo estoy de acuerdo con él; hombre, dirías en los dos hay infinitos... si dices infinitos entonces en los dos habría los mismos, pero no, en uno hay más que en el otro
JL: entonces, si imaginamos que escribimos en canicas todos los números naturales, uno en cada una, y los ponemos aquí todos juntos y luego hacemos lo mismo con los múltiplos de tres...
A: es que no tienen final, no se puede...
JL: bueno, juguemos con la imaginación, hasta donde seamos capaces... supongamos entonces que comenzamos a echar a una bolsa una de cada...
A: no, porque habría que meter una de tres en...
JL: ya, ya, pero supongamos que Carmen echa en una bolsa un múltiplo de tres y tú, Álvaro, echas un número natural: Carmen echa el 3 y tú, Álvaro el 1, ella el 6 y tú el 2, ella el 9 y tu el 3, etc
A: ella va a avanzar mucho más rápida que yo... a la hora en que paremos los dos a la vez, ella va a haber echado más,... habrá echado las mismas pero ella va a ir mucho más atrás que yo
JL: pero te pregunto sobre la cantidad de bolas que habrá...
A: si vamos a la vez habrá las mismas
C: pero quedarán más en mi montón que en suyo
JL: pero como somos inmortales y no nos cansamos nunca, hemos acabado de echar todas...
C: el habrá llegado a un número muchísimo mayor que el mío
JL: ya, ya, pero te pregunto sobre la cantidad de bolas que habréis echado cada uno
A: depende de la velocidad
JL: al mismo tiempo, ella echa una y tu otra
A: entonces, las mismas,... si hemos echado a la vez
JL: luego, cuando acabemos, ¿habréis echado las mismas de naturales que de múltiplos de tres?
A: sí
JL: luego hay la misma cantidad de naturales que de múltiplos de tres
A: no...

JL: pasamos a la cuestión 11, nos hablan de un dado que se lanza infinitas veces... y nos preguntan sobre el número de veces que habrán salido los unos y los doses...
A: Es que si no hay un valor para infinito, no hay un valor para...
JL: bien, pero quizás sí una palabra para expresar esa cantidad...
A: no se puede afirmar, ..porque además depende del azar; aparte de que no hay una fórmula para saber cuántos hay si además lanzamos infinitas veces no se puede saber...
C: yo pienso lo mismo que él, pero si te pones a ver la relación a lo mejor es un sexto de las veces que has tirado el dado
JL: y un sexto de las veces que has tirado sería...
A: infinito también, porque... sería un infinito más pequeño
C: claro, es que sería seis veces más pequeño
JL: ¿un infinito seis veces más pequeño?
C: sí, sí
JL: y respecto a los múltiplos de dos...
C: habrán salido la mitad de las veces
A: sí, sí, según el azar y eso, sí

JL: en la cuestión 10 nos preguntaban si hay más números en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, infinito)?
C: De 0 a infinito
A: sí, sí
C: es que de 0 a infinito está incluido el intervalo [0, 1]
JL: y ¿cuántos números hay en [0, 1]
C: muchos, infinitos, lo que pasa es que en el otro habría esos infinitos mas todos los demás
A: yo pienso lo mismo, es que ya de 0 a 1 directamente, o aunque fuera de 0 a 0.1 todos los números se podrían seguir dividiendo muchísimas veces, entonces es no habría números de los números que hay... sería más grande pero no se podría saber

JL: en el ejercicio 3 vamos cortando un segmento por la mitad repetidamente... y nos pregunta qué quedara al final...
A: se supone que al final quedaría un punto
C: sí, sí
JL: realicemos un pequeño ejercicio... imaginemos que en lugar de hacerlo con un segmento arbitrario, consideremos que mide 5 cm y convertimos el problema geométrico en otro numérico... ¿qué ocurre con el cinco si lo vamos dividiendo sucesivamente?
A: tiende a cero, ¿no?, pero nunca llega a cero porque es una fracción...
JL: pero tu dijiste que llegamos a un punto
C: pero es que el punto no es nada, es algo... es que un punto no se sabe lo que es
JL: pero ¿lo alcanzamos en algún momento?
C: yo creo que sí, tendría que quedar algo muy pequeño
JL: pero un punto y un segmento ¿tiene algo que ver?, ¿tienen alguna relación?

C: un segmento son muchos puntos... pero es algo definido... o sea que tiene que tener un número determinado de puntos
JL: y un punto ¿es algo singular?
A: tiene que tener medida para saber cuántos puntos tiene el segmento, entonces en el caso de que tuviera medida, se supone que sería la medida mínima, y entonces cuando lleguemos al punto podríamos seguir dividiendo...
JL: así, te parece que ambos problemas son distintos
A: pero es que no tenemos valores para el punto
C: si a ti te dan un número siempre te va a dar algo muy pequeño, muy pequeño hasta que tiende a cero pero al final siempre va a quedar algo... pero con un punto pues irá quedando algo cada vez más pequeño pero tendrá que quedar algo al final...
JL: y para ti, ¿ese algo que queda al final sería un punto, no sería un segmento pequeñito?
C: no, sería un punto

JL: en la pregunta 8, nos pregunta si podemos situar dentro de un segmento determinado, infinitos segmentos... Álvaro respondió que no es posible porque el segmento es una cantidad finita de puntos, es decir tiene dos límites, y Carmen respondió que sí, porque pueden ser más pequeños que AB y puedes ponerlos sobre AB y llegaría un momento en que no tendrías un segmento sino una superficie...
A: es que cuando es algo cerrado sabes que va a ser una cantidad.... bueno, aunque sea muy pequeño... es que un número lo puedes dividir infinitamente... y, si antes hemos dicho que en un segmento puede haber infinitos puntos... (se queda pensando)... no se...
JL: Carmen, ¿crees que sería posible?
A: hombre, infinitos no, pero me refiero a que... si el segmento fuera un número dividido entre muchísimos entonces cabrían muchísimos pero como es cerrado...
C: pero no entiendo cómo hay que situarlos... ponerlos uno al lado del otro
JL: sí, sí
C: a mi lo que me parece es que, pasa lo mismo que con los puntos, si tu te pones a...
A: es que si es cerrado no se puede
C: sí, yo estoy de acuerdo con él
JL: consideremos la siguiente situación: sea un segmento de 1 metro, dentro ponemos uno de medio metro, junto a él uno de cuarto de metro....
A: (se rie)...
JL: ¿por qué te ries?
A: es que espacialmente no se puede porque el espacio sí tiene medidas... pero matemáticamente cada vez vas a ir dividiendo y cada vez va a ir aumentando menos y no vas a poder llegar a llenar el segmento... pero en el espacio de verdad no se podría porque llegaría un momento en que no se pudiese dividir más

JL: en la pregunta 6, tenemos una sucesión, 2+1/2+1/4+1/8+…, ¿qué ocurre con los resultados parciales?
C: pues que cada vez va siendo más pequeño...
JL: sí, en efecto, pero qué me dices sobre los resultados parciales...
C: el resultado va a ir creciendo
JL: pero ¿se superará cualquier barrera?, por ejemplo 1000
C: si sumas muchísimas sí
JL: y ¿de un millón?
C: hombre te tirarías ahí no sé cuánto
JL: bien, bien, el tiempo no importa
C: pues claro, porque si vas sumando y sumando
A: yo creo que no... yo pondría que crece indefinidamente pero que se acerca a 4
JL: ¿por qué a 4?
A: porque cada vez aumenta la mitad, entonces si aumenta la mitad ya no llegará a la otra mitad, le falta la otra mitad pero es que de esa mitad coges la mitad y entonces se va a acerca aquí y de aquí coges la mitad y nunca vas a llegar al final
JL: pero ¿por qué no te pones como límite 4.5 ó 5?
A: pues por eso, tenemos 3, 3.5, para llegar a 4 necesitarías ½ pero coges 1/4, te falta 1/4 pero no coges 1/4, coges la mitad...
JL: Carmen ¿qué te parece?
C: sí, sí, tiene razón, pero en realidad no acabaría, podría seguir sumando más...
JL: ya, ya, pero la pregunta era si superaría cualquier número...
C: yo creo que de 4 sí pasa
JL: entonces ¿no te ha convencido su razonamiento?
C: sí, pero es que si sigues sumando y sumando más... bueno, es que no se...

JL: La última cuestión sobre la que me gustaría hablar es la 9; en ella hay una serie de círculos dentro de un triángulo y nos pedían sumar sus diámetros... En este caso ambos coincidisteis en la respuesta... Carmen, ¿por qué crees que el resultado será finito?
C: yo creo que si cabe una cantidad finita, porque es una superficie cerrada, tiene que haber un número finito y entonces...
JL: pero ¿cuántos diámetros habría?
C: infinitos no, porque hay habría un número finito de diámetros
A: es que si tuviéramos capacidad para aumentar esto muchísimo se podrían seguir dibujando círculos hasta que te mueras, pero la cantidad es lo mismo que esto, es decir va aumentando pero cada vez va siendo cada vez más pequeña, entonces tendría un límite, pero se podrían seguir sumando círculos hasta que te cansaras...

JL: ¿qué imagen os viene a la mente cuando escucháis la palabra infinito?
A: pues eso que no se acaba, como muy para la derecha...
C: un número, o sea, es que no es que sea infinito, sino que es tan grande, tan grande que no se puede saber lo que es... porque no se puede saber
A: es que desde pequeño te han dicho que los números no acaban, entonces piensas que es un número que puede seguir poniendo números hasta que te canses... en realidad no es un número en sí, entonces puedes decir que infinito son 200 cifras que 5000.... y tampoco sería infinito y no sería el final...
JL: entonces, dependiendo del contexto una cantidad puede o no ser infinito
C: es que, es eso que es tan grande, tan grande que no se sabe lo que es.

Entrevista nº: 11	Tipo: C2	Curso: 2º BCHTO	Cinta: 3	Cara: B	#: 381
Centro: IES Arquitecto Peridis		Alumnos: Roberto / Tamara			

JL: En la primera cuestión se os pedía compara una serie de cantidades... Roberto dijo que los más pequeños son aquellos que existen materialmente como los puntos de un cuadrado, granos de arena,... porque se podrían contar aunque fue casi imposible, el resto son infinitos pero el de los reales es el mayor... y Tamara respondió que el mayor es el número de granos de arena y el menor el de los números reales...
R: sí, dentro de lo material es que será cantidades finitas... los números reales son el conjunto más grande porque están formados por los naturales y los no naturales... entonces si uno de los grupos son los naturales, como son infinitos, los otros tendrían una dimensión más grande
JL: aún siendo infinito, para ti ¿habría diferentes tamaños de infinito?
R: claro
JL: Tamara, ¿qué dices tú?
T: yo creo que los granos de arena es la cantidad más grande porque son muy diminutos... no se...
JL: incluso más grande que los puntos que caben dentro de un cuadrado
T: yo creo que sí, porque...
JL: Roberto, ¿cuántos puntos cabrían dentro de un cuadrado?
R: también, yo creo que son infinitos
JL: pero no dependería del grosor del punto
R: también...
JL: ¿cómo definirías un punto?
R: pues sería un fragmento del espacio entre dos... iba a decir entre dos puntos, pero...
JL: pero para ti ¿tendría forma y tamaño?
R: yo creo que no... bueno, sí, sí que tendría forma y tamaño pero no un único tamaño...
JL: ¿podría haber puntos de distintos tamaños?
R: sí
JL: ¿y hasta cuándo consideramos que lo que dibujamos es un punto?... si dibujamos con un bolígrafo...
T y R: sí, sería un punto
JL: ¿y si lo dibujamos con un rotulador grueso... así, de esta manera?
T y R: sí
JL: y si dibujamos un círculo del tamaño de un CD
T: yo creo que no
JL: y ¿dónde está la frontera de algo que es un punto a algo que no es un punto?
R: ... eso es lo que me pregunto yo
JL: entonces...
T: es que un punto es algo completo...
JL: pero le quitamos el agujero al CD
T: es que para mi un punto es algo que no es material...
JL: pero ¿tiene dimensiones?
T: sí...
R: es que aunque no sea material si tu dibujas un CD en un papel...
T: sí, para mi sería un punto
JL: pero ese punto “gordo” ¿estaría formado por otros puntos?
R: ... estaría formado por puntos
JL: entonces ¿no podríamos dar una definición universal de punto para que cuando alguien lo vea sepas si eso es un punto o no?, ¿o es algo arbitrario que cada uno puede decidir en cada momento?
R: no...
JL: y en cuanto a la forma... por ejemplo, los pixeles del monitor de un ordenador son cuadrados...
R: porque la convención de punto es un circulo y lo que se hace con la punta del boli, si yo hago uno de 10 cm no se considera un punto
JL: entonces, para ti habría una frontera...
R: en las matemáticas no, pero en la vida cotidiana sí
T: pero lo que es la forma de un CD
R: pues yo no le llamaría un punto a un CD le llamaría redondel
T: pero según tu definición son los extremos...
R: pero hay que tener en cuenta las convenciones

JL: en la cuestión 2 se os preguntaba si hay algún número entre 1.9(periodo) y 2
T: yo creo que dije que sí
JL: dime alguno
T: el uno, nueve, nueve,...., infinitos nueves y al final un uno, yo que se...
JL: pero, después del infinito ¿puede haber algo?
T: no se...
R: yo creo que también puse que sí... pero ahora no se... es que el infinito es algo muy abstracto, podrían ser infinitos nueves y... bueno, es que alguna diferencia tiene que haber entre 1.9(periodo) y 2
JL: entonces, ¿estos dos números son distintos o los podemos considerar iguales?
R: hombre, igual, igual,... no
JL: luego, si son distintos, podrá haber alguno en medio...
R y T: pero la diferencia es casi nula
JL: pero ¿podemos meter algún número en medio?
T: yo creo que sí... es que nunca se puede igualar...
JL: pero en cambio no me puedes decir uno...
R: (está pensando), aparte que si a 2 le restas 0.00000......1 se supone que dará algún resultado... será muy próximo a cero pero no será cero, luego si la diferencia entre dos números no es cero, se supone que sí hay algo...
JL: ¿Recordáis cómo se pasa un número decimal periódico a fracción?
T: sí, era algo de restarle a 0.9 ó...
JL: escribimos (19 - 1) / 9
R: uy, de eso no me acuerdo...

JL: en la pregunta 7 debíais multiplicar 0.9(periodo) x 0.9(periodo)...
R: es que mas o menos es lo de antes, al ser prácticamente uno ambos números daría... algo entre 0.9(periodo) y 1
T: pero es que depende de cuánto sea el periodo, si pones un 0.9 no te va a dar lo mismo que si pones 0.99999
JL: pero es que no te dan a elegir, es periódico y tienes que considerar todos los nueves... En efecto, Tamara

escribiste esto, pero... una cosa es que para tus cálculos te quedes con más o menos cifras decimales, pero aquí si consideramos todos los nueves
T: es que no, no pasaría...
JL: no pasaría el resultado de 1
R: no, eso no puede ser
JL. Pero tu has dicho que da prácticamente el mismo número
R: no, no exactamente lo mismo
JL: pero cuando multiplicamos dos números menores que uno cómo es el resultado
R: uy, uy...
T: no, da más pequeño, es que va disminuyendo...
R: yo creo que no, ya que son números muy próximos al 1 y daría casi 1
JL: pero 0.5 x 0.5 da un resultado menor
R: pero no es lo mismo 0.5 que 0.9 que está muy cerca de 1
T: pero si tu multiplicas 0.9 x 0.9 te da 0.81
R: pero es que no es 0.9
T: es que te aproximas cada vez más a cero
R: ¡¡¿a cero?!! eso si que no, si tu multiplicas un número cualquiera por un número...
T: uy, no se, voy a hacer la cuenta... nueve por nueve ochenta uno, me llevo ocho... y el cero... da 0.98, ¡uy! da más grande...

JL: En la cuestión 3, se toma un segmento de un metro y le unimos su mitad, y la mitad de esta mitad...
R: supongo que la longitud total mediría infinito
T: yo creo que también infinito
JL: entonces, siempre que sumemos infinitas cosas, el resultado será infinito
R: sí, yo creo que sí
JL: en el ejercicio 8, tenemos una serie de triángulos dentro de un cuadrado y se os pedía sumar las áreas de todos esos triángulos...
R: daría una cantidad finita
JL: pero en el ejercicio de los segmentos has dicho infinito... ¿te parece que son dos problemas distintos?
R: son distintos porque aquí está delimitado por una superficie
T: sí
JL: bien, fijate, el primer triángulo medirá una cierta cantidad, el siguiente ¿cuánto medirá?
R: la mitad
JL: ¿y el siguiente?
R: la mitad... ¡ah! pero es que sigue por aquí...
JL: sí, sí, claro; entonces ¿cambias tu opinión?
R: sí, claro, sería infinito
JL: y tú, Tamara
T: yo sigo diciendo que da infinito
JL: pero ¿cuál es el área del cuadrado exterior?
R: 100
JL: así, si sumamos las áreas de todos los triángulos, el resultado ¿podrá ser mayor de 100 cm cuadrados?
R: no lo superaría nunca... aunque entonces no sería infinito.... es ya es un poco... se supone que no puede sobrepasar los 100 cm cuadrado, ¿cómo lo va a superar?
T: (se ríe)... es que te tienes que contradecir
R: es verdad... si dices una cosa entonces contradice la otra
JL: pero, entonces ¿con qué respuesta os quedáis?
T: pues, que no se puede calcular...
JL: bien, vale, pero ¿será una cantidad finita o infinita?
R: es que... yo todavía creo que da infinito
T: es que es como lo de los granos de arena... están sobre una superficie limitada pero en realidad hay infinitos...
JL: o sea, que si nos imaginamos un ser inmortal que pudiese contar los granos de arena, nunca acabaría de contarlos...
T: yo creo que no

JL: en la pregunta 6, se habla de un sorteo en el que nos cuestionan sobre la probabilidad de obtener un 5 o bien un número comprendido entre el 1 y 10.000.000
R: es uno entre infinito...
T: pero en el segundo caso habría un número limitado...
JL: no, se supone que en el bombo están todos los números naturales y quieres sacar uno comprendido entre uno y diez millones...
T: yo no estoy de acuerdo con Roberto, porque los números no son infinitos.... a ver, infinitos en el sentido de que hay muchísimos más números, o sea que alguna vez se tiene que acabar... porque si no ya estarías en los fraccionarios
R: no, te están diciendo los naturales... tendría diez millones entre infinito
JL: y esos dos cocientes, su resultado, ¿te parece que es grande o pequeña?
R: es pequeñísimo
JL: ¿tendrías pocas posibilidades de acertar con el 5?
R: y con los diez millones
JL: bien, pero ¿sería una de esas probabilidades mayor que la otra?
R: ambos darían cero, las dos cosas...
JL: ¿y qué quiere decir eso?
T: que tendrían la misma probabilidad... pero tampoco es así... porque siempre va a tener más probabilidad el que tiene diez millones de números... se supone que aunque sea mínima...
JL: entonces, ¿qué significa ese resultado?
T: (piensa y duda)
R: que un cero es mayor que el otro (se ríen)

JL: Consideráis que todos los infinitos son iguales, que todos tienen el mismo tamaño...
R: ¡¿cómo?!
JL: sí, por ejemplo, ¿cuántos números pares hay?
T: infinitos
JL: ¿y naturales?
T: infinitos
JL: entonces si en una caja voy colocando bolitas cada una con un número natural y en otra coloco bolitas con los números pares, ¿habría la misma cantidad de bolas en ambas cajas?
T: yo creo que sí
R: hombre, es un poco como el de borrar un millón de números... es que infinito es algo difícil de saber... pero se supone que tenemos más reales que naturales... ah, bueno, sólo estamos hablando de naturales... hombre, se supone que los naturales contendrían a los pares...
JL: y eso ¿significaría que el infinito de los naturales es mayor que el de los pares?
T: el infinito es una cosa...
R: el infinito, no puedes definirlo como tal número, serían los dos infinitos...
JL: luego, al decir infinito, ¿queréis decir que los dos conjuntos tienen la misma cantidad de números?
R: no... no se... se supone que, por ejemplo, que el infinito... no puede decir que, ... es que si coges los diez

primeros números naturales, tendrías diez naturales y cinco pares...
JL: ¿y si tomas los diez primeros naturales y los diez primeros pares?
R: entonces es que tendrías veinte naturales...

JL: en otra cuestión nos hablan de un hotel infinito...
T: es que esto del infinito es como muy abstracto y estamos diciendo que si queremos meter en una habitación de un tamaño o otra más grande pues no va a caber lo mismo y lo de infinito + 5 = infinito sí es correcto

JL: y tú, Roberto, ¿cabrías en el hotel?
R: yo ocupo poco (se ríen)... hombre, si la expresión es correcta yo creo que sí cabrían las cinco personas...
JL: ¿cómo lo conseguirías?
R: uy, uy... no se

JL: ¿qué pensáis cuando escucháis la palabra infinito?
T: no se, que no tiene fin
R: creo que puse el universo... no se, algo que no se puede coger, que es inabarcable...

Entrevista nº: 15	**Tipo:** C1	**Curso:** 2º BCHTO	**Cinta:** 4	**Cara:** B	**#:** 63
Centro: IES Juan de Mairena	**Alumnos:** Víctor / José David				

JL: Sobre los puntos que caben en un cuadrado...
V: Infinitos
JL: Dijiste infinitos porque, añadías, un punto no tiene dimensiones... pero también escribiste en el cuestionario que en el cuadrado de 30 cm habría nueve veces más que en el de 10 cm. ¿El de 30 cm también tendrá infinitos puntos?
V: Sí, claro
JL: Pero, para ti ¿serían dos infinitos de tamaño distinto?
V: Sí
JD: También creo que hay unos infinitos más grandes que otros; pienso más o menos lo mismo que él
JL: ¿Para ti los puntos tienen tamaño y forma?
JD: No
JL: ¿Cómo definirías un punto?
JD: Pues es que es un poco ambiguo para definirlo... no se... la parte más pequeña en la que se puede definir algo
V: Yo diría que es un ente de dimensión cero

JL: En el ejercicio 7, se os pedía comparar tres líneas con formas distintas. Los dos calculasteis la longitud de las líneas y también ambos respondisteis que todas tienen una cantidad infinita de puntos. Victor añadió que en A hay un infinito mayor...
V: Sí...
JL: ¿Crees que es la misma idea que la del cuadrado?
V: No se... es que al ser una línea más larga que otra da la sensación de que hay más en esa que en las otras pero claro al no tener dimensión los puntos pues creo que habría en las tres infinitos
JL: Pero ¿no te atreves a distinguir entre el infinito de una y el de otra?
V: Pues no

JL: Si pasamos a la pregunta 2, borramos un millón de números...
JD: Siguen quedando infinitos
JL: Escribiste que quedaban infinitos porque infinito menos un millón es infinito
V: Yo me acuerdo de lo que escribí... Es algo en lo que he pensando alguna vez y lo he hablado... Me parece curioso. Por un lado veo que quedan infinitos pero por otro lado si quitamos el primer millón, esos que quitamos ya no están... estonces parece que no habría un infinito mayor que otro pero no se... Es que si al 1.000.001 le asociamos el 1, al 1.000.002 le asociamos el 2, y así...podemos numerar infinitos números... pero claro si quitamos una parte parece que el todo es mayor que...
JL: y ¿con cuál de esas dos situaciones te quedas mas tranquilo?, ¿qué te dice tu intuición?
V: Es que no se... bueno, en ambos casos hay infinitos, eso es claro... creo que habría los mismos
JL: José David, ¿qué te parece esto que ha comentado Victor sobre la asociación de números entre los naturales y el conjunto que tiene un millón menos?
JD: Sí, siempre hay infinitos...
JL: Y si comparamos los naturales con los múltiplos de 3... En ambos casos respondisteis que había los mismos elementos... Pero ¿no encontráis algo raro?... (Pongo el ejemplo de las bolsas con bolas numeradas y las pesamos)
JD: En los dos casos es infinito... bueno, los naturales pesarían más
JL: Entonces, ¿tu también piensas en dos tamaños de infinito?
JD: Sí
V: Bueno, yo en este ejemplo... los dos tienen infinitos pero los dos aumentan igual... no hay una que aumente más rápidamente...
JL: pero aquí no hablamos de esto...
V: No se...

JL: En el ejercicio 11, nos habla de un dado que lanzamos infinitas veces y del que nos preguntan cuántas veces habrá salido el 1, el 2 y los múltiplos de 2...
JD: Yo es que respondí haciendo lo de probabilidad; lo que pasa es que ya no me acordaba de eso... porque hacía muchos años que... Yo creo que habrán salidos infinitas veces el 1, el 2 y también los múltiplos de 2, pero este infinito será mayor...
JL: ¿Por qué?
JD: Porque hay tres múltiplos de 2 en un dado y, por lo tanto, tienen más posibilidades
JL: En cuanto a la probabilidad tienes razón es mayor la de los múltiplos de 2 que la del 1 o la del 2; pero si lo consideramos como conjuntos de resultados... ¿encuentras alguna relación entre este ejercicio y el anterior?
JD: Sí
JL: Bien, en cambio, antes me dijiste que contenían la misma cantidad ambos conjuntos, es decir, infinitos...

JD: Pero es que antes también había dos tipos de infinitos: los naturales y los múltiplos de 3
V: Yo también creo que hay varios tipos de infinito, pero en este caso serían muy parecidos...
JL: Pero ¿habría alguna diferencia entre el número de veces que ha salido el 1 y el número de veces que han salido los múltiplos de 2?
V: No, no

JL: En el ejercicio 3, nos hablan de dividir un segmento sucesivamente por la mitad... Victor dijo en su momento que lo que se obtenía eran infinitas divisiones del segmento... A mi me gustaría que matizaras... al final ¿qué te queda?
V: No se, quedaría... las divisiones al final serían tan pequeñas que tenderían a puntos
JL: Entonces, después de infinitas divisiones ¿llegaríamos a un punto indivisible?
V: No, no, podríamos seguir dividiendo
JL: Luego, el objeto que nos va quedando... ¿cuál será su naturaleza... un punto, un segmento...?
V: No, no, un segmento, claro... ya que siempre podremos seguir dividiendo
JD: Yo creo que al final se obtendría un punto... pero quizás podríamos seguir dividiéndolo

JL: en la cuestión 15 se os pide calcular un límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$.
Ambos respondisteis que daba cero. ¿Os parece que tiene algo que ver con la pregunta anterior? ¿Qué significa $\frac{1}{2^{15}}$?
V: Que cuantas mas veces divides pues se va haciendo más pequeño el resultando acercándose a 0
JL: Ya, ya, pero ¿qué relación guarda este resultado con el ejercicio anterior?
V: Pues que eso es un límite y significa una tendencia, tiende hacia cero que, en efecto eso es un punto, pero el límite se refiere a tendencias, o sea que siempre se podría seguir dividiendo el segmento que obtengamos
JD: Claro, al final te vas acercando a un punto pero siempre se puede seguir dividiendo
JL: En la pregunta 10, se os pregunta dónde hay más números en el intervalo [0, 1] o en el intervalo [0, ∞)
JD: Que en ambos casos hay infinitos...
JL: Pero, como antes, dos infinitos de distinto tamaño o son de la misma categoría
JD: Sí, si, de distinto tamaño porque el primer intervalo está contenido en el segundo
V: Yo, me parece que es como la primera pregunta... podríamos renombrar los números de ambos intervalos y al final te salen dos infinitos iguales...
JL: ¿Te refieres a asociar un número del primer intervalo con otro del segundo?
V: Sí... sí

JL: En la cuestión 8 nos dicen que si podemos situar infinitos segmentos dentro de un segmento de una longitud determinada
V: Sí... haciendo infinitos segmentos muy pequeños... podrías una cierta cantidad de segmentos pero luego podrías reducir esos segmentos a otros más pequeños y así... segmentos que tiendan todos a cero
JD: Pues como hemos hecho antes, partiendo segmentos por la mitad y por la mitad y así...

JL: ¿Qué se os ocurre cuando escucháis la palabra “infinito”?
JD: El símbolo de infinito
V: La palabra indefinido... y algo que tiende a algo muy grande pero indefinido...

Entrevista nº: 20	**Tipo:** C2	**Curso:** 2º BCHTO	**Cinta:** 5	**Cara:** B	**#:** 108
Centro: IES Ignacio Ellacuría		**Alumnos:** Christian / Marcos			

JL: En la primera pregunta se os pedía ordenar algunas cantidades... Christian comentó que todas las cantidades son infinitas y que no se podían ordenar y Marcos estableció un cierto orden. Me gustaría que os convencierais uno a otro
M: Es que el número de granos de arena depende... es que algo material y no puede haber un número ilimitado, no puede llegar a infinito estaría por debajo de los demás... El número de estrellas no se sabe aún si es infinito o no...
JL: El resto de cantidades las igualas...
M: Hombre es que hay infinitos mayores y otros menores... El mayor sería el de los números reales porque abarca a todos los demás, los decimales, los naturales...
C: Yo no se, quizás tenga razón que los granos de arena no sean infinitos... y los números, hombre, los decimales de pi no se acaban nunca... serían infinitos... Pero los números naturales parece que hay menos que reales pero es que también son infinitos... Yo pienso que no hay distintos tamaños de infinito porque esta palabra recoge lo máximo
M: Es que la abstracción del infinito de que es algo ilimitado sí sería que sólo hay un infinito... pero es que hay infinitos que, no se, que están contenidos en otros y estos serán de mayor tamaño
JL: Entonces, Christian, apostarías por alguno de esos conjuntos como el más grande...
C: Diría el de los números reales pero sigo pensando que todos son infinitos y no se podrían ordenar

JL: En la cuestión 7 nos dan el producto 0,999... x 0,999...
M: Da 1 porque el 0,999... es ... es 1 ya
JL: 1 o casi 1
M: No, es 1... es que la diferencia sería tan pequeña que sería indistinguible... no, no sería 1
C: Es que exactamente igual porque si lo pasas a fracción da 1

JL: Y eso de pasar a fracción ¿te parece que es un resultado riguroso o sólo un truco para obtener una aproximación?
C: No, no, yo creo que es riguroso

JL: En la cuestión 3, nos piden unir una serie de segmento cada uno la mitad del anterior. Ambos respondisteis que daría dos metros...
M: Es que el límite es 2 metros... porque son cada vez más pequeños y al final no sumas casi nada
JL: Ya, pero como sabes que se acerca a 2 y no a otro número, 2.1 u otro...
M: Simplemente porque si divides el segmento de 1 m por la mitad, te queda otra mitad y así sucesivamente y te vas acercando a un segmento de 2 metros, pero nunca llegarías...
C: Yo más o menos pienso lo mismo. Si lo sumaras todos llegaría a 2 pero es imposible sumarlos todos porque hay infinitos...

JL: De la cuestión 8, suma de las áreas de triángulos dentro de un cuadrado,...
C: Yo creo que puse que el resultado sería finito... porque si el área está metida dentro de un área que mide 100 cm cuadrados no puede superarla... sería una cantidad finita... no llegaría ni a la mitad del área del cuadrado
JL: Marcos, tu respondiste que no se podría calcular porque era un proceso interminable...
M: Claro, es que son indefinidas partes... Si se puede calcular sí sería un resultado finito...
JL: En cambio en el caso de los segmentos sí te atreviste a dar una respuesta...
M: Sí, entonces sí, sería finito... porque según vamos dividiendo las partes daría 1/4
JL: En la pregunta nº 6 nos hablan de probabilidades, obtener un 5 u obtener un número entre 1 y diez millones... Christian dijo que en el primer caso la probabilidad era nula y en el segundo caso que la probabilidad era muy pequeña...
C: Básicamente porque el primer caso es sólo un número y en el segundo caso es un intervalo y este tendría una pequeña posibilidad muy remota... sería prácticamente nula... porque entre todos los números naturales...
M: Yo puse 0 en las dos ya que la probabilidad se halla como el número de casos favorables entre el número de casos posibles y como las posibilidades son infinitas pues el resultado va a ser cero
JL: ¿Qué tienes tú que decir de este argumento Christian?
C: Hombre, no se... yo creo que en el segundo caso aunque sea muy pequeña pero habría una...
M: Es que una cifra en el infinito equivale a la misma capacidad que tiene un intervalo en el infinito es igual de insignificante en el infinito... no se... yo considero que en el infinito... da igual un número que diez millones...

JL: En la cuestión 11 se nos habla de un hotel infinito...
M: Yo creo que puse que no era posible albergar a más gente... Es que si está todo ocupado, aunque sea infinito no entrarían más personas... Depende también de qué infinito sea...
C: Es que aunque haya infinitas habitaciones como en cada una hay una persona no pueden caber más
JL: Pero ¿observáis alguna contradicción entre la expresión matemática y la aplicación al caso del hotel?
C: No, porque infinito es solamente una expresión del más alto grado, de lo más que se puede llegar con los números, lo absoluto

JL: El último ejercicio sobre el que quiero que hablemos es este en que se compara un intervalo con un arco de parábola. Christian respondió que hay el mismo número de puntos, infinitos en ambos; Marcos dice que también hay infinitos pero comenta “aunque la curva parezca mayor”...
M: Claro, es que en ambos hay infinitos puntos... porque un segmento es una sucesión infinita de puntos, de 2 a 5 hay infinitos números reales y en la curva tenemos un mayor intervalo de números y parece que hay más números, pero hay infinitos en los dos... en la parábola es un infinito mayor porque abarcaría al otro
C: Es que entre el 2 y el 5 hay infinitos números reales... y lo mismo en la parábola
JL: Y ¿hay dependencia del tamaño de los puntos?
C: es que los puntos no tienen tamaño, no se pueden medir
M: Claro, es que los puntos no se pueden señalar, es algo tan pequeño... de un número real al siguiente no se puede indicar...

JL: ¿Qué os sugiere la palabra infinito?
M: Depende de en que contexto... no se, una cantidad muy amplia, mucho,... algo inalcanzable...
C: A mi más o menos igual... sería el todo

Entrevista nº: 24	**Tipo:** C1	**Curso:** 2º BCHTO	**Cinta:** 6	**Cara:** B	**#:** 0
Centro: IES Ignacio Ellacuría		**Alumnos:** Alberto / Alejandro			

JL: En la cuestión 1, se os preguntaba sobre cuántos puntos caben en un cuadrado de 10 cm de lado...
Ab: Yo creo que es una cantidad infinita porque el punto no tiene superficie
Aj: Lo mismo, el punto es algo imaginario, por eso es infinito
JL: Supongo, entonces, que para vosotros también el de 30 cm tendrá infinitos puntos, pero ¿ambos infinitos serán de la misma magnitud?
Aj: Es que el infinito... es que no es una cantidad...
JL: Entonces ¿no son comparables ambos infinitos?
Ab: Claro es que como son infinitos pues... pues no podríamos llegar a compararlos porque no sabemos cuántos son...
Aj: Sí, si, yo estoy de acuerdo

JL: En la cuestión 2, borramos un millón de números de N... ¿cuántos quedan?
Aj: Infinitos, pues aunque quites aún quedan más
JL: Y ¿qué relación guarda el nuevo conjunto con el anterior?
Aj: Son iguales, porque el infinito no acaba nunca y por mucho que le quites quedaría igual...

Ab: Sí, serían la misma porque no podemos saber cuántos hay en cada conjunto, sólo sabemos que son infinitos y esto es un concepto que tenemos para algo que no tenemos muy claro qué es
JL. ¿Se os ocurre algún método para comparar ambos conjuntos?
Ab y Aj: ………
JL. En el apartado c) comparamos los naturales y los múltiplos de 3
Aj: Se supone que habría más en el primer conjunto porque son todos los números pero en realidad hay los mismos... porque no acaban nunca.... no es que hayan más o menos es que hay infinitos, es que no se pueden contar... no es una cantidad finita
Ab: Hombre, la de los múltiplos de tres va saltando números, no son la misma sucesión, pero es que como ambas llegan al mismo fin que es el infinito...
JL: bien, bien, pero no hablamos de hasta dónde llegan sino de cantidad de elementos... (expongo el caso de la bolsa de bolas y el "peso" de los dos conjuntos)... y cuando hemos acabado de echar todos las bolas...
Ab: pero ¿a qué te refieres con que "hemos acabado"?
JL: A que hemos echado todos los números...
Aj: pero es que nunca acabas de echar los números a las bolsas... como no son finitos nunca puedes decir que has acabado el proceso de contar o de echar números
JL: y entonces ¿por qué afirmáis que ambos conjuntos son iguales?
Aj: Es que son iguales en tanto que ambos son infinitos, se pone el símbolo de infinito
Ab: No es que sean iguales es que no podemos establecer una diferencia entre ellos... no sabemos...

JL: En la cuestión 3, dividimos sucesivamente un segmento por la mitad...
Ab: Nos sigue quedando un segmento...
Aj: Es que yo creo que no tendría final... siempre sigues teniendo algo para poder dividir
JL: Pero ¿cuál sería la naturaleza de lo que te va quedando?
Aj: Si es algo físico siempre tendrías algo... aunque fuese una partícula muy pequeña... hombre si lo hacemos infinitas veces quizás fuese un punto
JL: Entonces, si lo divides infinitas veces ¿acaba el proceso y te quedas con un punto?
Aj: Sí, porque un punto ya no se puede dividir
JL: Entonces, para ti este proceso aunque sea infinito ¿tiene un fin?
Aj: Sí, bueno, no se, suena un poco raro pero... no se
Ab: Si es así, es un fin pero el fin sería el infinito... Es como antes con el caso de los números... los números tienen un fin y ese fin es el infinito

JL: En el ejercicio 8, se os preguntaba si se podrían situar infinitos segmentos sobre un segmento finito...
Ab: Pienso que no se puede... porque lo que llamamos segmento tiene una longitud determinada... y se acabaría llenando... con mil o un millón pero...
Aj: Yo creo que sí, que sí se podría porque hay infinitos puntos... me refiero a que si tu pones aquí una raya por la mitad ya tiene dos segmentos y si ahora divides esta mitad pues ya tienes tres segmentos y así infinitamente porque siempre vas a tener un segmento para partir aunque sea muy pequeño; se supone que sí podrías, aunque no sea lógico, tener infinitos segmentos

Ab: Yo, volviendo a la pregunta de antes de dividir por la mitad un segmento infinitas veces... mi punto de vista es que si haces eso tendrías al final un punto y lo que habría sería infinitos puntos y como ya hemos dicho un punto no tiene medida y por eso no se podrían meter infinitos segmentos
JL: Alejandro ¿podrías intentar convencer a Alberto de que tienes razón, suponiendo que sea así?
Aj: Es que si tu a ese punto le haces un zoom siempre tendrías algo que poder dividir por la mitad...
Ab: pero entonces no has llegado al punto, seguirá siendo un segmento...
Aj: ya, pero es que físicamente un punto no existe, un punto es una intersección, una marca... tu siempre puedes seguir dividiendo
JL: Consideremos el siguiente ejemplo: convirtamos este ejercicio en otro numérico equivalente; sea un segmento de 1 m, lo dividimos por la mitad y nos dará ½ y así sucesivamente... ¿esto tendría fin Alberto?
Ab: No
JL: ¿Por qué?
Ab: Porque siempre obtendrás una medida que se puede dividir entre dos
JL: Y ¿te parece que esta situación tiene que ver con el caso del segmento del que estamos hablando?
Ab: Podría ser...
JL: ¿Y que opinas de que un proceso tenga fin y el otro no?
Ab: Yo es que... aquí me refiero a que no tiene fin porque podemos llegar a un punto... es que... que no tenga fin no quiere decir que no puedas alcanzar... No, si yo veo algo contradictorio...

JL: En la cuestión 5 nos plantean la división por 0; Alberto dijo que no se puede dividir porque ningún número se puede dividir por cero y Alejandro dijo que no existe porque no tiene solución. ¿Queréis añadir algo?
Aj: Realmente, 5 entre 2 sería coger un segmento de 5 y dividirlo entre 2, 5 entre 1 pues tiene una parte de 5 pero 5 entre 0 partes es ilógico...
Ab: No puedes repartir algo si no hay nadie a quién repartir... yo siempre, de pequeño me decían tienes 5 caramelos entre 2 personas... pero si no hay nadie...
JL: Esto interpretando un cociente como un cociente... pero ¿qué representa 5 entre 0,5?, ¿tiene sentido esta división?
Ab: Como reparto ya no tendría sentido pero... matemáticamente sí
JL: ¿Por qué entonces 5 entre 0, desde el punto de vista matemático, no tiene sentido para vosotros?
Ab: No se... no se
Aj: ...
JL: Si os ha salido esto en clase de matemáticas, ¿qué recordáis de su significado?
Ab: Yo lo digo desde el punto de vista de los límites,... cuando divides 5 entre 0 no existe pero se está acercando a infinito o a menos infinito... Porque cuando tú divides por ejemplo entre 0,1, que es muy cercano a 0, el resultado se hace más grande... acercándose a infinito o menos infinito
Aj: Sí, si, yo también lo veo así
JL: En la cuestión 6 nos dan la suma 2+1+1/2+1/4+… y nos pregunta sobre el resultado según se van añadiendo términos... Alberto dijo que se acerca a 4 pero que nunca llega a 4 y Alejandro respondió que se acerca a un

número comprendido entre 3 y 4. ¿Podrías matizar vuestras respuestas?
Ab: Es que es lo mismo que antes... Si sumas todos los términos llegarían a 4
JL: ¿Por qué estás tan convencido que no pasa de 4?
Ab: Porque son números que van disminuyendo y nunca va a superar el 4
JL: Pero la suma, por pequeños que parezcan los sumando que se añaden, da la impresión que va creciendo siempre...
Ab: Sí, vas sumando cada vez más cantidades pero son cada vez más pequeñas...
Aj: Crece pero se acerca a un número que no será más de cuatro, ya que vas sumando cifras que son mucho más pequeñas que las anteriores...
JL: Entonces, aunque sumemos infinitas cantidades... ¿nunca pasaremos de un cierto número?
Aj: Es que a 3,9 le puedes sumar una cantidad tan pequeña que no pase de 4... podrá tener un nueves más u otro número pero no pasa...
JL: ¿Os parece que este problema tiene que ver con alguno de los que hemos comentado hasta ahora?
Ab: Quizás con el de 5/0... parece que tiene una asíntota vertical en el 4... se va acercando mucho pero no lo toca
Aj: ....

JL: En el problema 9 tenemos una serie de círculos en el interior de un triángulos y nos piden que opinemos sobre la suma de todos los diámetros...
Aj: Yo creo que siempre se pueden meter muchos más círculos... entonces la suma de todos estos diámetros... bueno... yo creo que sería parecido a la cuestión 6... que por mucho que le vayas sumando nunca va a sobrepasar de... se quedaría en un tope porque vas sumando cantidades más pequeña...
JL: Alberto respondió en su día, como Alejandro, que no se puede saber...
Ab: Los círculos se hacen cada vez más pequeños y las circunferencias serán finalmente un punto... pero ahora pienso que no se puede saber porque seguirán habiendo más circunferencia... pero de cualquier manera no se superará una cierta cantidad... Es que los números que sumas son cada vez más pequeños...
JL: ¿Y podrías conjeturar algún valor para esa cantidad máxima?
Ab: Quizás podría ser 12... no se... ¡ah! no, sería la altura del triángulo que se calcularía con el teorema de Pitágoras

JL: En la pregunta 10 se os daba dos intervalos, [0, 1] y [0, ∞) y se os pedia comparar la cantidad de números en cada uno de ellos
Aj: Es que es igual que el caso de los naturales que le borramos un millón... como el caso del segmento que siempre puedes seguir dividiendo el segmento... entonces habría infinitos en los dos...
Ab: Es que no concibo bien la cantidad de números que hay en un intervalo con el infinito, no relaciono la cantidad con el infinito...
JL: Entonces, ¿tu no entiendes infinito como una cierta cantidad de objetos que haya en un determinado conjunto?
Ab: No, no, es que si hay una cantidad es que las puedo contar
JL: Pero, en el intervalo [0, 1] hay infinitos, según decís, entonces ¿esto no significa que se puedan contar?
Ab: No, porque nunca podrás acabar de contarlos
Aj: Es que algo infinito no es algo material que puedas medir o pesar...
JL: Entonces, la pregunta ¿puede haber varios tamaños de infinito? no tendría sentido para ti
Aj: Por ejemplo, en clase vemos que hay gráficas que llegan a infinito más rápidamente que otras pero... todas llegan a infinito
Ab: Yo creo que esa pregunta no tiene sentido

JL: ¿Qué os sugiere la palabra infinito?
Ab: El Universo... como totalidad...
Aj: Yo también...

Entrevista nº: 25	**Tipo:** C2	**Curso:** 2º BCHTO	**Cinta:** 6	**Cara:** B	**#:** 158
Centro: IES José de Churriguera		**Alumnos:** Antonio / Pilar			

JL: En la primera cuestión se os pedía ordenar algunas cantidades... Ambos distinguíais entre granos de arena y números de estrellas y el resto que considerabais que son infinitos o incontables...
A: En efecto, los granos de arena son contables aunque sea difícil y lo mismo ocurre con las estrellas... Los números decimales de pi aún no se ha llegado al final y por eso pienso que es infinito; en cuanto a los puntos que caben en un cuadrado es que pueden entrar infinitos porque no entiendo que los puntos son abstractos y los números naturales y los reales son infinitos
JL: ¿Y te parece que alguna de esas cantidades que tu dices que son infinitas será mayor que las demás?
A: Es difícil... si acaso los números naturales pero lo veo un poco difícil diferenciarlos...
P: Yo también creo que los naturales es el mayor conjunto
JL: ¿Por que comentaste que los reales son más restringidos?
P: Es que me parecía que los reales dependía más de los naturales y por eso pensaba que habría más naturales

JL: En la cuestión 7 se os daba el producto 0,999... x 0,999...
P: Yo es que lo hice con la calculadora... espera (lo hace con la calculadora... llenando la pantalla de 9)... pues da casi uno
JL: Pues matizar esa respuesta... ¿qué te ha dado en la calculadora?
P: 0,9999... igual... es que como es periodo se supone que hay infinitos nueves, es decir, casi uno, pues el resultado es casi 1
A: Yo no recuerdo lo que puse... pero es que si se llegara a poner todos los nueves sería casi uno...

JL: Pero, ¿sería lo mismo que hacer 1 x 1?
A: No se... pero...
JL: ¿Os parece que 0,999.... y 1 son números distintos o son el mismo número?
P: Son distintos
JL: Entonces, ¿me podrías decir algún número que estuviese entre ambos?
P: No, es que no hay nada... va el 0,999.... y luego va el 1
JL: Pero entre dos números distintos siempre se puede intercalar uno entre ambos ¿no?
A: Claro, es que a mi me parece que si llegáramos a escribir completamente el número sería 1
P: Sí...

JL: La pregunta número 3 os pide unir una serie de segmentos cada uno la mitad del anterior... Antonio dijo que el resultado es infinito porque se pueden seguir dividiendo los segmentos hasta el infinito y no pararías nunca de sumar y Pilar, en cambio, dijo sería 2 o casi 2 o un número muy próximo...
P: A ver, primero tienes un metro, luego medio metro... todos estos sumarán un metro y como aquí tiene otro metro pues dará 2... bueno, no llegará...
JL: ¿Y por qué no podemos pasar de 2?
P: No se, pero yo creo que no pasará de 2
A: Yo es que pienso que habría que hacer infinitas particiones para llegar a 2... porque vas poniendo siempre la mitad, 0,000... y así...

JL: En la cuestión 8 se os pide sumar las áreas de los triángulos que hay dentro de un cuadrado...
A: Yo creo que sería infinito (lo mismo que respondió en el cuestionario) porque puedes seguir dividiendo y dividiendo hasta el infinito e ir sumando un poco hasta el infinito
P: Yo no recuerdo lo que dije (dijo infinito)... pero pienso como él, si siempre vas a poder seguir dividiendo te quedarán trozos más pequeños y no lo vas a poder calcular... Aunque yo creo que ahora diría que es finito... porque por muy pequeño que lo hagas como partimos de 10 cm...
JL: ¿Cuánto mide el área del cuadrado grande?
A: 100 centímetros cuadrados
JL: ¿Y creéis que la suma de las áreas de todos los triángulos podrían llegar a sumar 100 cm cuadrados?
A: No... no... y yo dije infinito pero es que me refería a que vas a sumar infinitas cantidades pero el resultado no va a ser infinito
JL: Pilar, ¿crees que este problema tiene algo que ver con el anterior, el de los segmentos que ibamos uniendo?
P: Sí,... yo el de los segmentos lo veía más claro
JL: Si convertimos en numérico el problema de los segmentos sería equivalente a sumar 1+1/2+1/4+… y este de los triángulos ¿lo podríamos convertir en uno numérico?
A: Hombre,... el primero sería 25 cm cuadrados, el segundo sería 12,5, sí, sí, sería equivalente...
JL: ¿Podrías dar un resultado?
A: Podría llegar hasta 100
P: Yo lo veo un poco gris...

JL: En la cuestión 5 se os propone una suma de fracciones 1/10+2/100+3/1000+… ¿qué podéis decir sobre el resultado?
P: Sería un resultado ¿infinito?... es que puede ser infinito porque como vas sumando cada vez 0,0... pues cuando llegues a 10, por ejemplo, sería infinito... tendrá muchas cifras detrás de la coma...
JL: ¿Cuál sería el resultado?
P: 0,1234...
JL: ¿y con cuál de las respuestas que os da el enunciado os quedarías ahora?
A: Claro, el número no sería muy grande, sería 0,1234... es un número muy pequeño, no llegaría ni a 1... Es que yo pensé que como los decimales son infinitos el resultado es infinito... pero...

JL: En el ejercicio 10 se os pedía comparar un arco de parábola y el segmento [2, 5]... Antonio dijo que infinitos en ambos y Pilar que en el arco de parábola
A: Yo creo, en efecto, que hay infinitos ya que en un segmento como se pueden acercar lo máximo posible sigue habiendo infinitos... Aunque parezca que el segmento es más corto... habría los mismos porque lo de los puntos lo veo que en cualquier segmento hay infinitos...
P: Hay más en AB porque los puntos me los imagino muy juntos, tendrían un tamaño muy pequeño, casi abstracto pero no porque habría más en AB porque este trozo es más largo...

JL: En la cuestión 12 aparecía una ecuación con dos incógnitas... Antonio respondió que infinitos y Pilar despejó la x y dijo que todos los valores que cumplan eso... ¿Cuántos son Pilar?
P: Infinitos,... porque y puede tomar cualquier valor, entero o decimal o lo que quieras...
JL: Y en el intervalo [3, 5] dijiste que también podía tomar muchos pero entre 0 y -1... pero ¿cuántas soluciones tendría?
P: También infinitos... muchos pero si a la *x* le das 3... le das menos valores que antes ...
A: Yo aquí, como en las otras preguntas, entre 3 y 5 también se le pueden dar infinitos valores
JL: y las soluciones del apartado a) y del b) ¿sería la misma cantidad?
A: Sí, las dos darían infinitas soluciones... nunca se acabaría de obtener soluciones...
JL: Pero, para ti ¿puede haber distintos tamaños de infinito?
A: Para mi infinito es algo que no tiene fin y como entre 3 y 5 se pueden dar valores que no tienen fin por eso me parecen iguales

JL: ¿Qué os sugiere el infinito?
A: Algo que no se puede llegar a ello
P: Yo es que infinito... no es un número... bueno, la lista de todos los números y al final.

APÉNDICE VII: Tabulación de las respuestas a los cuestionarios de los estudiantes

6PRIC1P07. ***Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían? ¿Y en uno de 30 cm de lado? Explica tu respuesta*** **1º ESO**

Alum.	Respuesta	Edad	Sexo	Calif. 1	Calif. 2	Estud. Madre	Estud. Padre	Profesión Madre	Profesión Padre
	I.E.S. IGNACIO ELLACURÍA (Alcorcón) 1º C								
1	Un montón	13	H	6	4	Secun	Secun	Limpiadora	Electricista
2	Infinito porque hay mucho espacio y caben muchos	12	M	6	7	Secun	Prim	Ama de casa	Camarero
3	No / porque depende del tamaño que tengan los puntos y no se sabe	12	H	4	4	Secun	Secun	Ama de casa	Informático
4		13	H	4	4	Secun	Univ	Ama de casa	Repsol
5	Muchos / Muchos más	12	H	6	4	Secun	Prim	Monitora en colegio	Albañil
6	No, porque son muchos y no podría dar un número / para el de 30 cm sería el triple	12	H	6	6	Univ	Univ	Ama de casa	Telefónica
7	No podría indicarlo en ninguno de los dos porque serían muchos, infinitos	12	M	6	6	Prim	Prim	Ama de casa	Camarero
8	Me cansaría mucho porque hay muchos	13	M	4	4	Prim	Prim	Ama de casa	Camionero
9	No porque entrarían muchos	13	H	4	3	Secun	Univ	Ama de casa	Jefe de estacion
10	No lo se explicar	15	M	0	2	Secun	Secun	Camarera	Camarero
11	Depende de si son grandes	14	H	6	2	Prim	Secun		
12	Depende de lo que midan los puntos; si mide 1 cm en el de 10, serán 100 puntos y el de 30 cm 600	13	H	6	6	Secun	Secun	Ama de casa	Camarero
13	(Dibuja un cuadrado lleno de puntos muy ordenados) En uno de 10 cm entran 409 (parece que los ha contado) y en uno de 30 cm 8180	13	M	5	4	Secun	Univ	Limpieza	Albañil
14	En el de 10 cm muchos puntos y en el de 30 cm el triple que en el de 10	13	M	6	3	Prim	Prim	Auxiliar enf.	Portero
15	No se puede saber	12	M	6	6	Prim	Prim	Auxiliar enf.	
16	Cabrán tantos como quieras meter; también depende de cómo hagas los puntos	12	M	7	4	Univ	Univ	Ama de casa	Jefe empresa contrucción
17	No se podría hacer porque serían muchos puntos y te confundirías al contarlos	14	M	4	4	Secun	Univ	Ama de casa	Ingeniero tecnico
18		13	H	5	4	Secun	Secun	Directora de Hacienda	Director de empresa
	I.E.S. ARQUITECTO PERIDIS (Leganés) 1º C								
19	Depende del tamaño de los puntos. Por ejemplo, si los puntos son de un cm cabrían en la caja 10 puntos por cm cuadrado y en la otra caja 30 puntos por cm cuadrado	13	M	6	6	Secun	Secun	Hostelería	
20	No, porque depende de cómo sean los puntos, si son más grandes, si son más pequeños, pienso que cabrían miles de puntos y en uno de 30 cm el triple que en el de 10 cm	12	M	6	6	Univ	Univ	Profesora	Fontanería
21	Depende del tamaño en los dos casos	12	M	6	6	Univ	Univ	Profesora	Profesor

3ESOC2P09. *La suma de las áreas de los triángulos sombreados de la figura es: a) finita b) infinita c) no se puede calcular*

3º ESO

Alum.	Respuesta	Edad	Sexo	Calif. 2	Calif. 1	Estud. Madre	Estud. Padre	Profesión Madre	Profesión Padre
	I.E.S. IGNACIO ELLACURÍA (Alcorcón) 3º A								
1	a), porque nos dan *x* triángulos y sabemos cuántos son	15	H	4	4	Prim	Prim		
2	b) porque siempre hay algo más pequeño	15	H	7	4	Prim	Secun	Ama de casa	Metro
3	c) porque los triángulos son todos de diferente tamaño	14	M	5	6	Prim	Prim	Ama de casa	Repartidor
4	a)	15	H	4	4	Secun	Secun	Ama de casa	
5	a) porque te dan lo que mide el lado del cuadrado, luego la mitad mide cinco y luego hayas el área de cada triángulo	14	M	7	6	Prim	Prim	Comercial	Comercial
6	b) porque no se acaba la tira de triángulos	14	M	5	5	Secun	Secun	Oficinista	Taxista
7	a)	15	H	6	4	Prim	Prim	Ama de casa	Autónomo
8	c)	15	M	4	4	Secun	Univ	Ama de casa	Bombero
	I.E.S. ARQUITECTO PERIDIS (Leganés) 3º E								
9	b), porque si hay puntos suspensivos seguramente que siga disminuyendo	15	H	4	4	Secun	Univ	Telefonica	Jefe técnico
10	c)	14	H	7	6	Secun	Secun	Ayuntamiento	Marroquinero
11	b), porque hay muchas áreas y es muy difícil hacerlo	16	H	6	5	Prim	Secun	Ama de casa	Factor
12	c), porque todos los puntos que seguirían serían tan minúsculos que se podrían medir	14	H	5	4	Secun	Secun	Ama de casa	Seguridad
13	b), porque nunca acabaría	14	H	8	5	Secun	Secun	Ama de casa	Celador
14	a), porque si calculamos las áreas y luego las sumamos nos daría un número finito	16	H	5	4	Secun	Secun		
15	b)	15	M	4	4	Secun	Secun	Cajera	Mantenimiento
16		14	M	7	7	Secun	Secun	Ayuntamiento	Conductor
17	a), porque ocurre igual que en el ejercicio 4 donde se unían segmentos	14	M	8	9	Secun	Univ	Ama de casa	Maquinista
18	c), porque no nos da ninguna información de lo que mide	15	M	4	5	Secun	Secun	Ama de casa	Maquinista
19	a), porque llega un momento en que no hay más triángulos	14	M	7	7	Secun	Secun	Secretaria	Repartidor
20	b), porque sería el área del 1º, el área del 2º y así sucesivamente por lo que darían muchos números	14	H	8	9	Secun	Secun		Kiosquero
	I.E.S. JOSÉ DE CHURRIGUERA (Leganés) 3º D								
21	c), porque es tan pequeño que no se puede	15	H	6	6	Secun	Secun	Dependienta	Camarero
22	a), porque tiene medidas exactas	14	H	5	5	Secun	Prim	Ama de casa	Carpintero
23	Se podría calcular pero sería infinito	15	M	5	4	Prim	Prim	Camarera	Fábrica
24	b)	15	M	4	4	Prim	Prim	Ama de casa	Fontanero
25	c), porque vas haciendo triángulos los cuales llegas a un punto que no lo puedes calcular	15	M	7	4	Prim	Prim	Seguridad	
26	a), porque se puede sumar ya que cada triángulo es el doble del anterior	15	H	7	6	Secun	Secun	Esteticista	Recepcionista
27	b), porque podemos calcularlo y el área hay un momento en que no podemos calcularlo normalmente	15	M	4	4	Secun	Prim	Ama de casa	
28	a), porque tendrías que sacar el área de 7 triángulos	15	M	5	5	Univ	Univ	Auxiliar de taller	Jefe dpto empresa
29	a), porque se llegaría a un punto que no se puede hacer más pequeño	14	H	8	7	Prim	Prim	Limpieza	Parado

1BTOC2P09. ***¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos; en caso contrario, justifica tu respuesta***

2º BTO

Alum.	Respuesta	Edad	Sexo	Calif. 1	Calif. 2	Estud. Madre	Estud. Padre	Profesión Madre	Profesión Padre
	IES ENRIQUE TIERNO GALVÁN (Leganés) 2º B								
33	Si algo es infinito no se puede medir	18	M	5		Prim	Prim	Ama de casa	Pensionista
34		17	M	7	6	Secun	Secun	Secretaria	Informático
35	No, sólo existe el número infinito ya que existen infinitas posibilidades; si existen diferentes tamaños ya estaríamos cortando, por así decirlo, el número infinito	17	M	6	8	Secun	Secun	Educadora	Electricista
36	No, el infinito es algo indeterminado, si pudieras dar diferentes tamaños estarías determinando y sería finito; puede haber alguna función que tienda más rápido a infinito	17	M	5	5	Univ	Univ		Ingeniero tecnico teleco
37	Sí, $+\infty$ y $-\infty$	17	H	5	5	Prim	Prim		
38	Sí, al menos dos en cada conjunto de números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ...); uno sería con tendencia al infinito positivo y otro al infinito negativo	18	H	7		Secun	Secun	Jardinera	Transportista
39	No, lo que es infinito no se puede calcular, por lo tanto no se puede saber si hay infinitos más grandes o más pequeños	18	M	7	7	Univ	Univ	Ama de casa	Farmaceutico
40	No, porque una cosa indeterminada no tiene magnitud para medirse	17	H	6	6	Prim	Prim	Ama de casa	Metalurgia
41	No, ya que infinito se utiliza para nombrar las diferentes cantidades, no es una en concreto, se refiere a todas	18	M	6	6	Secun	Prim	Ama de casa	Electricista
42	No, cuando un número es infinito no tiene un tamaño u otro, simplemente no tiene un tamaño definido, no sería igual si comparáramos un número finito con uno infinito, entonces el primero si que sería de menor tamaño	17	M	7	7	Prim	Secun	Ama de casa	Electromecánica
43	No, ya que es un número y representa siempre lo mismo	18	M	5	3	Univ	Secun	Profesora	Fotógrafo
44	Sí, porque hay números infinitos más pequeños y hay otros más grandes por ejemplo 0.1...., es más pequeño que 0.2....	18	M	9	7	Prim	Prim	Ama de casa	Fontanero
45	No, sólo hay un tamaño de infinito que es imposible calcular; infinito es un número muy lejano y que no sabemos con exactitud y si tenemos ∞^2 seguimos teniendo un número muy lejano	17	H	5	5	Prim	Prim	Ama de casa	Tornero
46	No, sólo existe un infinito, porque en realidad quiere decir que lo que representa no está determinado, luego si no está determinado, da igual que sea mayor o menor, pues no va a ser posible percibirlo en algo indeterminado	17	H	9	9	Secun	Prim	Ama de casa	Técnico deportivo
47	No, porque el infinito es indeterminado; no podemos saber el tamaño de esos infinitos, lo único que podemos saber del infinito es si es positivo o negativo, pero no el tamaño del infinito	18	H	6	4	Prim	Prim	Funcionaria	Funcionario
	CENTRO ESCOLAR AMANECER (Alcorcón) 2º A								
56	No, porque el infinito no puede ser calculado ni medido	18	H	4	5	Secun	Univ	Ama de casa	Industrial
57	No, ya que el infinito no es algo definible	18	H	7	6	Secun	Univ	Ama de casa	Ingeniero técnico
58	No, porque el tamaño del infinito no se puede determinar	17	M	9	6	Prim	Prim		
59	No, puesto que el infinito es algo sin fin, y esto no tiene una medida u otra	17	M	6	6	Secun	Prim	Maquilladora	Carpintero
60	No, el infinito es único	17	H	6	5	Univ	Secun	Psicóloga	Banca

1BTOC1P08. ***¿Puedes situar infinitos segmentos dentro de un segmento dado, AB, de longitud l?; si es posible indica cómo, de lo contrario justifica tu respuesta***

1º UNI

Alum.	Respuesta	Edad	Sexo	Calif. 1	Calif. 2	Centro (BTO)
	UNIVERSIDAD DE MURCIA (Químicas)					
30	Sí	18	M	9	9	Público
31	Sí, porque un segmento tiene una determinada longitud porque es de una dimensión, por muy pequeño que sea, por lo que cabría un número indeterminado de segmentos, pero sí cabrían infinitos segmentos porque puedo hacerlos infinitesimalmente pequeños	22	H	6	7	Público
32	Sí, mediante el método de particiones vamos haciendo infinitas particiones mentales de esta longitud l y vamos añadiendo estos segmentos al segmento AB	18	M	8	8	Público
33	Sí, porque un segmento viene definido por dos puntos y puedo coger infinitos puntos	18	H	5	8	Público
34	Sí, dependiendo del tamaño de ellos; si tienen un tamaño determinado, el número por el contrario es limitado	18	M	8	8	Público
35	Sí, siempre y cuando el tamaño de los segmentos a situar no sean del mismo tamaño que el segmento dado	22	M	6	5	Público
36	Sí, dividiendo el segmento AB por la mitad, entonces cojo una de esas dos mitades y la divido en dos y con la otra mitad hago lo mismo; entonces repito el proceso infinitas veces porque siempre tendré segmentos para dividir, por muy peuqeños que sean	18	H	7	7	Público
37	Sí, no dice cómo debe ser el tamaño de los segmentos por lo que introduciríamos segmentos infinitamente pequeños	18	M	9	8	Privado
38	Sí; el motivo es que l es una longitud no determinada cualitativamente y, por el contrario, el número de segmentos tampoco está delimitado, por lo tanto, el número de segmentos infinito es el más adecuado	18	M	6	7	Público
39	Como no conozco l, el segmento puede ser muy grande o muy pequeño, si los segmentos que sitúo dentro del segmento AB son muy pequeños y AB es muy grande, podría decir que son "tantos" segmentos los que puedo situar que son infinitos	18	M	9	9	Público
40	Sí; si tengo infinitos puntos en un segmento siempre puedo unirlos dos de ellos para formar infinitos segmentos de tamaño infinitesimal; que yo tenga un segmento (recta acotada por su extremso) no implica que no pueda dividirlo en partes cada vez más pequeñas (por lo menos teóricamente aunque no sea capaz de realizarlo en la práctica)	19	M	8	10	Público
	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID (Matemáticas)					
41	No, puesto que llegará un momento en que te encuentres con un extremo	19	H	9	8	Privado
42	Sí; por ejemplo del modo descrito en el ejercicio 3; así todos los segmentos son menores que el AB y hay infinitos segmentos dentro; en cada mitad repites el procedimiento y vuelves a aplicárselo análoga y consecutivamente a ambas mitades; es un proceso infinito	18	M	7	8	Público
43	Sí; cualquier segmento tiene infinitos puntos; podemos dividir este en mitades infinitamente (como en la pregunta 3), por tanto, haciendo este proceso infinitas veces obtenemos infinitos segmentos	18	M	9	9	Público
44	Sí, dividiéndolo primero por la mitad y luego la mitad por la mitad y así sucesivamente	18	M	7	7	Público
	UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID (Ingeniería técnica de telecomunicaciones)					
45	Sí, ya que siempre podrás seguir dividiéndolo	18	H	9	9	Público
46	Depende de la longitud de l	19	H	5	6	Público
47	Sí se pueden situar infinitos segmentos a mínimas distancias entre ellos	19	H	8	8	Público
48	Sí, considerando segmentos infinitamente pequeños, próximos a ser puntos	18	H	10	9	Privado
49	Sí, pero cada vez serán más pequeños, infinitamente pequeños	21	H	7	6	Público
50	Sí, siendo l cualquier partición de una sucesión cuya suma valga la longitud de AB	21	H	6	5	Público
51	Sí, serían segmentos de una longitud ínfima que cumplirían $l/\infty = 0$ con 0 = longitud de los ínfimos segmentos	18	H	6	7	Público

52	Sí, si el segmento fuese infinito, si no no podré colocar infinitos segmentos	19	H	5	5	Público
53		23	M	5	5	Público
54	Sí, es posible porque en un segmento por ejemplo de 1 metro de longitud, puedes colocar infinitos segmentos más pequeños, cada uno con una longitud ínfima	19	H	7	6	Público
55	Sí, puesto que las longitudes las expresamos mediante números reales, podemos decir que entre dos números reales tenemos infinitos números, por lo tanto entre dos valores que designen a l podemos dividirlo en infinitos segmentos	20	H	6	6	Público
56	Sí se puede, un segmento se puede dividir tantas veces como se quiera	20	H	7	6	Privado
57	Si los queremos colocar uno detrás de otro no se puede a no ser que AB sea infinito	21	M	9	7	Público
58	Sí, si son los segmentos infinitamente pequeños o si la longitud l es infinita	19	M	5	6	Público
59	Sí, porque por muy pequeño que sea un segmento siempre podrá seguir dividiéndose en más segmentos	19	H	7	7	Privado
60	Sí, con infinitésimos de longitud dl; haciendo la integral de A hasta B de los dl (infinitésimos) no dará la longitud del segmento, es decir, l	19	H	7	6	Privado
61	Sí, porque el segmento puede ser tan pequeño como se quiera	19	H	7	7	Público
62	Sí, es el mismo caso de la sucesión del problema 6; siempre puedes poner un segmento los suficientemente pequeño en el segmento dado para que aún quede sitio sin ocupar y situar otro segmento más pequeño todavía que a su vez deja aún espacio libre...	20	H	6	6	Privado
63	Sí, porque al ser de longitud infinita puedes poner infinitos segmentos de una determinada longitud sobre sí mismo	19	M	8	9	Privado
64	Sí podríamos ya que aunque la longitud del segmento AB es finita, podríamos situar todos los segmentos que queramos porque estos pueden ser muy pequeños	18	H	7	7	Privado
65	Sí, juntando puntos de la recta, cada vez juntas un punto más consigues rectas infinitas ya que la propia recta tiene puntos infinitos	21	H	6	6	Privado
66	Sí, metiendo y ocupando el lugar de unos y otros	19	H	7	7	Público
67	Sí, puesto que la longitud de un segmento puede tender a infinito	18	H	8	6	Privado
68	Sí, dividiendo infinitas veces el segmento y los segmentos encontrados, aunque la distancia del segmento cada vez será menor	19	H	9	9	Público
69	Sí, ya que siempre hay infinitos dl	18	H	5	6	Privado
70	Sí (dibuja el segmento AB dividido en numerosos segmentos todos iguales de longitud dx)	21	H	8	7	Público
71	Sí, porque los segmentos los podemos coger tan pequeños como queramos	19	H	6	5	Público
72	Yo no puedo ya que llega un momento en que tengo que parar	19	H	6	7	Privado
73		18	H	7	7	Privado
74	Sí se podría, sólo que tendría que ir cogiendo cada vez segmentos más pequeños, infinitamente pequeños, que en ningún caso llegarían a 0	19	H	7	6	Privado
75	Sí, pero serían trozos muy pequeños	18	H	9	8	Público
	UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID (Ingeniería superior de Informática)					
76	Sí, ya que dentro de este segmento AB existen infinitos segmentos que componen a este	18	H	7	6	Público
77	Sí, porque en un segmento hay infinitos números	19	M	7	6	Público
78	Sí, si calculo la mitad del segmento AB tendré un punto C, si calculo la mitad del nuevo segmento AC y CB tendré otros siente nuevos segmentos y así lo puedo hacer hasta aburrirme	18	H	7	8	Privado
79	Sí, porque en este segmento están contenidos infinitos puntos, la unión de dos de estos puntos ya forma un segmento con lo que obtendremos también infinitos segmentos	19	H	5	6	Público