Universidad de Salamanca

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Departamento de Física, Ingeniería y Radiología Médica

Tesis Doctoral

Elaboración de una teoría formal de las redes de Kirchhoff

Autora

María Margarita Redondo Melchor

Directores

Prof. Dr. D. Félix Redondo Quintela

Prof. Dr. D. Roberto Carlos Redondo Melchor

Marzo de 2009

Universidad de Salamanca

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Departamento de Física, Ingeniería y Radiología Médica

Tesis Doctoral

Elaboración de una teoría formal de las redes de Kirchhoff

Autora

María Margarita Redondo Melchor

Directores

Prof. Dr. D. Félix Redondo Quintela

Prof. Dr. D. Roberto C. Redondo Melchor

Marzo de 2009

Prof. Dr. D. Félix Redondo Quintela, catedrático de escuela universitaria, y Prof. Dr. D. Roberto Carlos Redondo Melchor, profesor colaborador, ambos del área de conocimiento de Ingeniería Eléctrica, del departamento de Física, Ingeniería y Radiología Médica de la Universidad de Salamanca

Hacemos constar

Que doña **María Margarita Redondo Melchor**, Ingeniera Industrial, ha realizado con nuestra dirección la investigación que ha dado lugar a la tesis de título **Elaboración de una teoría formal de las redes de Kirchhoff**.

A nuestro juicio este trabajo reúne las condiciones para que, con él, doña María Margarita Redondo Melchor pueda optar al grado de doctor por la Universidad de Salamanca, por lo que autorizamos su presentación para este fin.

Béjar, 11 de marzo de 2009

Los directores de la tesis

Prof. Dr. D. Félix Redondo Quintela

Prof. Dr. D. Roberto Carlos Redondo Melchor

A mis padres,

por su permanente e incondicional apoyo.

Índice

1. Agradecimientos

Esta tesis se ha elaborado como consecuencia de una propuesta realizada por uno de los directores de la misma, el Dr. D. Félix Redondo Quintela. Difícilmente yo hubiera podido pensar en un tema tan teórico, que requiere conocimientos claros y extensos de muy diversas materias; desde luego de Electricidad, de Teoría de Circuitos, de Matemáticas, e incluso de Filosofía de la Ciencia. Por eso mi actitud inicial fue de cierto reparo, pues temía no poder estar a la altura del trabajo que se me pedía. Sin embargo, la insistencia del Director y la seguridad de su permanente asistencia fueron animándome a iniciar los preliminares. También las razones que me fueron expuestas reiteradamente: que él creía necesaria la redacción de una teoría formal de las redes de Kirchhoff; que, si no era con una tesis, no se haría nunca; y que yo era la persona más indicada para hacerla, pues es un tema que conozco bien y con el que he tenido contacto desde hace tiempo.

En el mismo momento en que acepté el trabajo trazamos las líneas básicas de actuación, que consistieron en que iríamos elaborando conjuntamente un esquema muy claro de los objetivos; que había que dividir esos objetivos en tareas muy concretas que yo iría ejecutando, y que, en la redacción de la tesis, yo debía contar con su revisión permanente, línea a línea, sobre todo en las definiciones y en los enunciados de los teoremas, así como en la estructura formal.

A los pocos días ya estábamos trabajando en la elaboración de un artículo sobre Redes de Kirchhoff, en cuya redacción en inglés colaboré intensamente. A la vez se me encomendaron otros tres cometidos en los que comencé a trabajar también de inmediato. El primero fue la búsqueda de todos los libros posibles, principalmente en español e inglés, cuya información pudiera encontrar por Internet y por otros medios, y cuyo contenido fuera, en todo o en parte importante, el de la materia de Teoría

de Circuitos o Teoría de Redes Eléctricas. Debía averiguar de cuáles de ellos había ejemplares en bibliotecas accesibles para ser consultados, principalmente en las de la Universidad de Salamanca o en las bibliotecas de otras universidades o institutos de investigación españoles, para poder disponer de ellos por el servicio de préstamos. También debía obtener información para tratar de adquirir los más interesantes que no se pudieran ver de otra manera.

La segunda tarea encomendada fue seleccionar aquellos libros cuyo contenido tuviera una tendencia al formalismo, o que manifestaran una cierta preocupación por el rigor.

Y la tercera, buscar las definiciones de los conceptos más comunes de teoría de circuitos que dan los autores de los libros seleccionados, así como los enunciados de los teoremas, y comentar la forma en que realizan sus demostraciones y deducciones. También explorar esas definiciones y teoremas en Internet, utilizando principalmente herramientas selectivas como *Google Académico* y *Google-Búsqueda de libros*, y seleccionar los que pudieran tener interés para nuestro trabajo.

Realmente estas tres últimas tareas citadas no han cesado durante todo el tiempo que ha durado el trabajo que ha conducido a esta tesis. El resto de ese trabajo ha consistido en ir construyendo sobre lo hecho anteriormente, hasta llegar al final. En todo momento he tenido claro mi cometido inmediato. La valoración y la selección de los resultados parciales, por ínfimos que fueran, la redacción final de cada definición, de cada párrafo, casi la elección de cada palabra, han sido realizados también de inmediato, cada semana, de forma que las correcciones, las redacciones, se han ido produciendo paso a paso, casi línea a línea, tal como yo pretendía, pues esa es la única forma de que mi esfuerzo valiera para algo en una tarea como la de esta tesis. Siempre, por tanto, he tenido la sensación de ir trabajando sobre seguro, sin el temor tan frecuente de que lo que se hace no valga para el fin que se pretende.

Este pequeño relato quiere ser reconocimiento y expresión de gratitud inequívoca al Dr. D. Félix Redondo Quintela, por su ayuda y por su paciencia. Él insiste en que, sin esta tesis, la investigación sobre las redes de Kirchhoff no se hubiera reanudado. Yo digo a la vez que, sin su persuasión primero, y sin su permanente dedicación y asistencia después, esta tesis no se hubiera realizado.

Dar las gracias al Dr. D. Roberto Carlos Redondo Melchor por su asistencia en todo lo que tiene que ver con el trabajo informático es para mí, desde siempre, una costumbre; porque son innumerables las veces que sus sugerencias, su información sobre programas y recursos informáticos, resolución de dudas sobre su utilización, información sobre todo tipo de medios informáticos para resolver casi cualquier tarea e, incluso, realizaciones mucho más concretas, me han facilitado cualquier trabajo en que estuviera embarcada, y me han permitido seguir con él como si los problemas no existieran. Y es que, verdaderamente, teniéndolo al lado como yo lo he tenido siempre, aunque haya sido en ocasiones a miles de quilómetros de distancia, como en parte del tiempo en que se ha realizado esta tesis, de la que también es director, teniéndolo al lado, digo, se tiene la sensación de que, efectivamente, no existen dificultades.

Le agradezco también su apoyo y su asistencia en ciertos temas teóricos de la tesis de especial dificultad, en los que, a veces, para que yo pudiera comprender su total alcance, no solo hacía falta la intervención de un director, sino de dos. Su capacidad de análisis y su afán de precisión son, en gran parte, responsables de la calidad y exactitud de muchas de las expresiones de esta tesis, en especial de las definiciones.

Esta investigación ha sido en parte simultaneada con mi trabajo habitual en *WSP Group*. Ha sido inevitable, por tanto, que parte del tiempo que me dejaban libre las tareas de la empresa haya sido ocupado por trabajos para esta tesis, lo que he podido hacer sin ninguna restricción ni limitación por parte de nadie. Por ello expreso también mi agradecimiento a WSP Group y, en especial, a los ingenieros Robert Okpala, mi anterior supervisor, siempre amplio en facilidades, no solo para el trabajo de esta

tesis sino también para el de mi vida profesional; y a Karl Luck, mi actual supervisor, permanentemente dispuesto a ayudar y del que agradezco su sincero y tranquilo apoyo.

Parte de los gastos originados por esta investigación han sido financiados por la Fundación "En memoria de Don Samuel Solórzano Barruso". Gracias también a ella por su colaboración.

Por último quiero agradecer al Departamento de Física, Ingeniería y Radiología Médica, y en particular al Área de Ingeniería Eléctrica las facilidades y la ayuda que me han prestado para todo lo concerniente a esta tesis.

Muchas gracias a todos.

2. Introducción

Mi primer contacto con la expresión 'Redes de Kirchhoff' se produjo mucho antes de que yo pudiera comprender el concepto que esas palabras designan. En concreto cuando, en 1999, el Dr. D. Félix Redondo Quintela ultimaba la redacción de la primera edición del libro de título Redes Eléctricas de Kirchhoff [1]. Me pidió entonces que diseñara la portada, con la única condición de que aparecieran siete puentes, como alusión a los siete puentes de Köenigsberg. Yo hice algo más: respeté el orden y emplazamiento relativo en que efectivamente esos puentes fueron construidos originalmente. Ese libro fue posteriormente uno de mis textos para la asignatura de Teoría de Circuitos en los estudios de Ingeniería Industrial. En esa asignatura tomé de nuevo contacto con la expresión Redes de Kirchhoff, y en ella conocí por primera vez el significado de esas palabras y el contenido de lo que expresan, el concepto de red de Kirchhoff.

De nuevo en 2005 diseñé la portada para la segunda edición del mismo libro [2], edición revisada y muy ampliada. El motivo fueron, de nuevo, los siete puentes de Köenigsberg. Pero ahora realicé el trabajo con mayor conocimiento, con conciencia de su significado y de su importancia. Esos puentes habían sido la razón por la que Leonhard Euler [3] escribió, en 1736, su famoso artículo "Los puentes de Köenigsberg" [4], en el que demostraba que no había solución para el problema planteado como pasatiempo por los habitantes de esa ciudad: pretendían partir de un punto y retornar a él después de cruzar una sola vez todos los puentes. Ese artículo es considerado por algunos el origen de la topología [5].

La razón para hacer aparecer los puentes de Köenigsberg en la portada de los dos libros citados -lo supe cuando estudié la asignatura de Teoría de Circuitos- era insistir en la conveniencia y en la utilidad de que las dos leyes de Kirchhoff sean consideradas como relaciones topológicas más que como propiedades de las intensidades y de las tensiones eléctricas. Intensificando el enfoque topológico es más fácil identificar las consecuencias que derivan solo de las dos leyes, y se convierten así en una herramienta mucho más eficaz para el estudio de diferentes y muy diversos sistemas, no solo para el estudio de las redes eléctricas. Se amplía considerablemente su alcance de esta manera, incluso dentro de la propia Teoría de Circuitos.

También para la docencia este enfoque tiene particular interés. En primer lugar porque, sin incremento de esfuerzo, se ofrece a los estudiantes una dimensión muy amplia de una teoría que hasta ahora solo se enseñaba para ser aplicada a las redes eléctricas. Además, permite justificar con claridad y con sencillez algunos procedimientos de análisis cuya justificación no suele aparecer en los textos o aparece de forma muy confusa.

Y ya en los inicios de esta tesis, uno de mis primeros trabajos consistió en ordenar las ideas fundamentales del tema de que trata, y colaborar como coautora en la confección y redacción del artículo "A General approach to Kirchhoff's Laws" [6], en el que se expone una síntesis de esas ideas. Este artículo es la primera publicación importante fruto de esta tesis, pero también se puede considerar como su justificación, pues la aceptación del artículo por IEEE (Institute of Electrical and Electronic Engineers) hizo renacer con gran intensidad la ilusión para seguir con esta investigación. Su inclusión para ser publicado en IEEE Transactions on Education, se puede considerar, además, una confirmación de la utilidad docente que el enfoque exclusivamente topológico de las dos leyes de Kirchhoff puede ofrecer.

Por tanto, el tema del trabajo que he acometido, del que esta memoria es fruto, no era, ni mucho menos, ajeno a mí, sino todo lo contrario. Haber profundizado en él, y haber ayudado, quizá, al desarrollo de una idea que es totalmente original del Dr. Redondo Quintela, me llena de orgullo y también de agradecimiento.

3. Objetivos

El punto de partida para este trabajo está insinuado por primera vez en el prólogo del libro Redes Eléctricas de Kirchhoff [1], y está expresado de forma más amplia y clara en el prólogo de la segunda edición de ese mismo libro [2]. En los dos prólogos se manifiesta que las leyes de Kirchhoff pueden servir como únicos axiomas de la Teoría de Circuitos, que aquí se prefiere llamar Teoría de Redes Eléctricas [2], [7]. Se dice, además, que es posible construir una teoría abstracta, que puede ser llamada Teoría de Redes de Kirchhoff, independiente de cualquier sistema físico concreto. En ambos libros ya se incluye un importante avance de esa teoría.

Una Teoría de Redes de Kirchhoff resultaría útil porque identificaría inequívocamente las propiedades que derivan solo de las leyes de Kirchhoff. Independizar esas propiedades de cualquier variable física o sistema físico concreto permite identificar claramente otros sistemas, distintos de las redes eléctricas, a los que las dos leyes de Kirchhoff pueden aplicarse. La consecuencia es la unificación de los procedimientos de análisis de todos esos sistemas, que ahora se consideran por separado [6], con la consecuente mejora de los rendimientos de la docencia y el aprendizaje, ya que con el mismo esfuerzo se alcanza un conocimiento fundamental mucho más amplio, que puede servir de apoyo a muchas más materias posteriores aparentemente independientes unas de otras. Además se dotaría de mayor rigor a una teoría, la Teoría de Redes Eléctricas, para cuya construcción es habitual recurrir a muy diversas fuentes, incluidas las ideas intuitivas, y de cuyos conceptos, algunos de uso habitual, no siempre existe definición precisa. Estas son las ideas básicas que inspiran el trabajo desarrollado, cuyo resultado es esta tesis.

El objetivo general ha sido, por tanto, el que expresa el título: elaborar una teoría formal de Redes de Kirchhoff. Para ello se ha tomado como único axioma una definición precisa de Red de Kirchhoff, que incluye las dos leyes de Kirchhoff. Que se parta de ese axioma inequívocamente identificado para construir la teoría, significa que para la deducción de los teoremas de la teoría, para la construcción de la teoría completa, no se recurre a ley o principio físico alguno, sino que solo se deducen propiedades que derivan de las dos leyes de Kirchhoff.

La elaboración de la teoría ha requerido definiciones claras de muchos conceptos, algunos pocos nuevos, y la mayoría conceptos de uso habitual. En este último caso se han comparado nuestras definiciones con las de otros autores, cuando las incluyen, y se comentan las razones para la elección de las definiciones preferidas.

Lo mismo se ha hecho para los enunciados y las demostraciones de los teoremas. Algunos son propios de nuestra teoría, pero muchos forman ya parte de la teoría de redes eléctricas. En este último caso siempre se comentan las razones por las que se prefieren unos u otros enunciados, o unas u otras demostraciones.

Como se verá, este trabajo de contraste es una parte muy extensa de esta tesis. Incluso el trabajo real de búsqueda y de comparación con las publicaciones de todos los autores consultados ha sido mucho más amplio del que se refleja en este texto; porque esa parte se ha resumido mucho en la redacción final, ya que incluir todas las diversas formas y orientaciones de las definiciones y teoremas de la bibliografía revisada, y los comentarios, matices y observaciones que sugieren, habría convertido esta memoria en un documento demasiado amplio y, por ello, quizá menos atractivo y menos útil, además de haber podido ocultar el objetivo principal, que es el de elaboración de una teoría formal de Redes de Kirchhoff.

Pero ese trabajo de contraste ha sido también orientado de una forma concreta. Se ha tratado con él de revisar la mayor parte de la bibliografía existente relacionada con los Circuitos Eléctricos o con la Teoría de las Redes Eléctricas desde que ese cuerpo de conocimiento surgió con nitidez, momento que puede situarse en la mitad del siglo XX. Se ha procurado que toda esa bibliografía aparezca incluida en las referencias. Se pretende dar así una idea histórica de la formación y evolución de los conceptos. También, a veces de sus orígenes. En ocasiones, junto a referencias de los primeros años, se incluyen referencias actuales; pero si el concepto no ha evolucionado en la bibliografía, solo se citan algunas referencias iniciales, en algunos casos con el claro fin de hacer aparecer el libro o el documento en la lista de referencias, para que la bibliografía refleje lo mejor posible la evolución de esta parte del conocimiento.

La forma de incluir en esta memoria los comentarios que suscitan las comparaciones con otros autores ha sido por medio de notas a pie de página. Se ha elegido ese procedimiento después de pensar e incluso ensayar algunos otros métodos. Al final se ha preferido este porque, con él, el comentario se ofrece justo donde está la causa que lo origina.

Esta disposición tiene sin duda el inconveniente del gran espacio que ocupan las notas. En algunas páginas parecen incluso más importantes que el texto principal. No obstante ese inconveniente disminuye si se asume que el análisis de lo que dicen otros autores, y su contraste con lo que aquí se hace es también parte importante de esta tesis.

Se inicia el estudio con el capítulo 4, de título "De la Electricidad a la Teoría de Circuitos", en el que se resume la génesis de la parte de la Electricidad que hoy se conoce como Teoría de Circuitos, citando las aportaciones científicas más importantes que dieron lugar a su progresivo surgimiento.

El capítulo 5, "Teoría axiomática", resume lo que hoy se entiende por axioma, e incluye una síntesis de la evolución histórica de ese concepto. El fin principal del capítulo es mostrar lo que se entiende por teoría axiomática, para tratar de servir de explicación de lo que se pretende hacer en esta tesis.

El capítulo 6, "Redes", es ya la primera parte de la teoría formal que se pretende construir. Se dedica a la definición formal de red y de las partes que puedan ser identificadas en una red y que sean útiles para la teoría que se construye.

El capítulo 7, cuyo título es “Intensidades de Kirchhoff”, define lo que se entiende por intensidad de Kirchhoff, concepto que es ya exclusivo de la Teoría de Redes de Kirchhoff y parte fundamental de esa teoría. A partir de este capítulo, los siguientes, hasta el 17, también se dedican el desarrollo formal de la teoría.

A lo largo de la tesis se van identificando variables que cumplen alguna de las leyes de Kirchhoff y que, por tanto, cumplen todas las propiedades que derivan de ella. También se identifican sistemas que pueden ser descritos por medio de redes de Kirchhoff. Algunos de esos sistemas se usan a lo largo de diferentes capítulos de la tesis como ejemplos continuados de sistemas distintos de las redes eléctricas que pueden ser descritos por medio de redes de Kirchhoff.

4. De la Electricidad a la Teoría de Circuitos

El proceso que condujo a que la Teoría de Circuitos fuera progresivamente considerada una disciplina independiente de la Electricidad fue muy dilatado. Ese proceso se desarrolla paralelo al surgimiento de otras partes de la Electricidad, como el Electromagnetismo, Máquinas Eléctricas y Transporte de Energía Eléctrica.

El inicio del camino hacia la Teoría de Circuitos podría situarse en 1827, cuando Georg Simon Ohm publica su libro *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet*, en el que da cuenta de la ley que lleva su nombre, la ley de Ohm [8]. Es el primer intento para tratar de establecer relaciones matemáticas entre las variables eléctricas, en este caso entre la tensión y la intensidad.

En 1845 Gustav Robert Kirchhoff da a conocer sus dos leyes, llamadas hoy primera ley de Kirchhoff o de las corrientes, y segunda ley de Kirchhoff o de las tensiones [9]. Son un paso de gigante, pues la aplicación de esas leyes es muy general.

La publicación del teorema de Thévenin se produce en 1883 [10].

El método de análisis para las redes sinusoidales que hoy se llama método fasorial, fue presentado por Steinmetz en el International Electrical Congress de 1893, y posteriormente en su libro *Theory and Calculation of Alternating Current Phenomena*, publicado en 1897, del que Ernst J. Berg fue coautor [11].

Hasta 1926 no cita Norton, de pasada, en un informe técnico, lo que hoy es conocido como teorema de Norton [12], que realmente es el dual del teorema de Thévenin.

En 1952 se produce una aportación, también de gran importancia, que es el teorema de Tellegen [13].

Algunas de estas aportaciones fueron asimiladas por la comunidad eléctrica más rápidamente que otras. Principalmente en aquellas en las que no es necesario un conocimiento amplio de matemáticas la asimilación fue rápida. Este es el caso, desde luego, de la ley de Ohm[1], de las leyes de Kirchhoff, y también, hasta cierto punto, del teorema de Thévenin; pero no ocurrió así con el análisis fasorial ideado por Steinmetz. De hecho, su libro citado arriba, en el que desarrolla el procedimiento, fue escasamente leído, a pesar de que, como es bien conocido, el análisis fasorial simplifica espectacularmente el análisis de las redes sinusoidales, llamadas también redes de corriente alterna. Hoy, sin embargo, el método fasorial es el método casi exclusivamente utilizado para el análisis de las redes sinusoidales[2].

A pesar de que estas aportaciones iban incrementando la parte de la Electricidad que hoy se conoce como Teoría de Circuitos, durante mucho tiempo la separación entre las diferentes disciplinas eléctricas no existió de hecho o era muy confusa. En la enseñanza de la ingeniería española, por ejemplo, las asignaturas clásicas de electricidad eran antes de 1964 Electricidad y Magnetismo, Electrotecnia, y Electrónica [14]. La ley de Ohm era explicada como parte de la Electricidad, y también se incluían en

---

[1] Una vez que la ley de Ohm fue aceptada, su incorporación al conocimiento eléctrico fue rápida, aunque esa aceptación tardó en producirse [34].

[2] La incorporación de las nuevas aportaciones al conocimiento común del grupo científico correspondiente a una materia, dista mucho de ser rápida y general, incluso de aquellas partes que parecen ser esenciales. En la actualidad, por ejemplo, hay libros de texto que no incluyen en su contenido el teorema de Tellegen ni sus consecuencias [23], [31], [64], cuando ese teorema parece ser un instrumento imprescindible para la comprensión de las relaciones de potencia en las redes eléctricas.

esta materia las dos leyes de Kirchhoff. A partir de ellas se presentaban los métodos generales de análisis de redes eléctricas, conocidos como método de las mallas y método de los nudos. El método de las mallas servía para la escritura de los sistemas de ecuaciones que proporcionaban como soluciones las intensidades de las mallas. De esas intensidades derivan las intensidades de todas las ramas de la red. El método de los potenciales de nudo proporcionaba el sistema de ecuaciones cuyas soluciones son los potenciales de los nudos, de los que derivan todas las tensiones de la red. Con la solución de esas ecuaciones se daban por resueltas las redes y terminaba el Análisis de Redes o Teoría de Circuitos. De hecho, las únicas consecuencias de las dos leyes de Kirchhoff eran los dos métodos generales de análisis citados, el de las mallas y el de los nudos [15].

Pero en los planes de estudio de 1964 [16], además de una asignatura con el nombre de Electricidad, que incluía también el Magnetismo, se incorporó para los ingenieros técnicos en electricidad una asignatura con el nombre de Teoría de Circuitos y Electrometría. Era la primera vez que se incorporaba a un plan de estudios de España una asignatura con el nombre de Teoría de Circuitos. La Electrometría era realmente un añadido incómodo, y así fue tratado, en general, por los profesores, que no dedicaban tiempo a su explicación o, si lo hacían, era muy escaso [17].

Por entonces la Teoría de Circuitos ya había aparecido en Estados Unidos con ese mismo nombre, *Circuit Theory*. Uno de los primeros libros de texto con ese título fue el de Guillemin, *Introductory Circuit Theory*, que se publicó en Estados Unidos en 1953 [18]. De él la editorial Reverté, S. A. obtuvo la versión española, que apareció en 1959 con el título Introducción a la Teoría de Circuitos [19].

La materia de Teoría de Circuitos se formó con la reunión de parte de los conocimientos que se han citado, ordenados de forma diversa, según los autores. Se incorporaron también algunos otros temas que podrían ser considerados laterales o complementarios, como el análisis por medio del método simbólico, o método operacional, creado por Heaviside [20] para el análisis de redes eléctricas[3]. Este método de Heaviside fue el precursor del análisis de Laplace [21] y de otros métodos operacionales.

También se incorporó a la Teoría de Circuitos el que hoy se conoce como análisis fasorial para las redes sinusoidales o redes de corriente alterna, que Steinmetz había creado en 1893 [11].

Como parte del tema de las redes sinusoidales es frecuente incluir hoy también los sistemas polifásicos, en especial los trifásicos, que también suelen formar parte de los libros de texto de Teoría de Circuitos, en especial los dirigidos a los estudios de ingeniería eléctrica [2], [17], [22], [23].

Pero la Teoría de Circuitos nunca se ha presentado como una teoría axiomática, en el sentido de enunciar con claridad sus axiomas y, solo de ellos, deducir los teoremas que constituyen la teoría; sino más bien se trata de un conjunto de conclusiones a las que se llega desde puntos de partida diferentes, sin excluir las deducciones más o menos intuitivas. A la vez que esto ocurre, o, quizá porque ocurre, en algunos libros de texto se observa una cierta búsqueda de coherencia científica, que se manifiesta, en unos casos, en un intento de relacionar unas conclusiones con otras, y en otros, de tratar de fundamentarlas en principios físicos, con frecuencia de forma poco precisa. Las dos leyes de Kirchhoff no son ajenas a intentos de esta última clase. Por ejemplo, la primera se suele relacionar con claridad

---

[3] Heaviside sustituía el símbolo $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ de derivada respecto al tiempo que aparecía en las fórmulas por una p, y se dio cuenta de que se llegaba a muchos resultados correctos si se *operaba* con esa p como si fuera una variable algebraica. Esa era toda la justificación del método: que funcionaba si se operaba con p como con cualquier otra variable. Por eso el método se llamó método *operacional*. Y por eso también parece que recibió críticas por los más ortodoxos, que le acusaban de "resolver por procedimientos incorrectos lo que se podía resolver correctamente" [65]. Es muy citada la frase con la que se dice que él respondía: "No dejaré de comer por no entender el proceso de la digestión" [66].

con la conservación de la carga, y la segunda con la conservación de la energía, aunque en este último caso, con cierta confusión [23]. Estos intentos podrían interpretarse como indicios de cierta insatisfacción de algunos autores ante la forma de organización de la teoría y, quizá, como búsquedas de un más sólido apoyo formal o científico de sus conclusiones.

Junto a estos intentos, se notan carencias sorprendentes, como es el caso del teorema de Tellegen, que se dio a conocer en 1952. Su importancia es fundamental, pues es un teorema clave para la construcción de la Teoría de Redes Eléctricas, resultando imprescindible para el estudio de las relaciones de potencia. Pues bien, muchos libros de Teoría de Circuitos, incluso recientes, no citan ese teorema [22], [23].

La sensación, pues, es que, como ya se ha dicho, la Teoría de Circuitos sigue pareciendo estar formada por varias partes no suficientemente conexas, más que como una teoría lógicamente elaborada.

5. Teoría axiomática

El método axiomático es la forma más perfecta de organizar el conocimiento [2], [24]. Las partes del conocimiento organizadas según el método axiomático se llaman teorías axiomáticas.

Aunque una teoría axiomática puede tener, en principio, diversos grados de formalismo, diversos grados de precisión ordenada de su exposición, todas las teorías formales son teorías axiomáticas. De hecho, la mayor parte de las veces se identifican los dos conceptos: teoría formal y teoría axiomática.

La elaboración de una teoría axiomática comienza por la elección de los axiomas. Solo a partir de los axiomas, por medio de la lógica, se deducen otras proposiciones, que se llaman teoremas. También se pueden deducir teoremas a partir de otros teoremas ya deducidos de los axiomas. A medida que se deducen nuevos teoremas pueden también definirse conceptos nuevos. Los axiomas, los teoremas deducidos de los axiomas o de otros teoremas deducidos de los axiomas, y las definiciones de los nuevos conceptos constituyen la teoría. Por tanto, los axiomas son el principio, el comienzo de la teoría, y todo nuevo conocimiento que forme parte de esa teoría se deduce solo de ellos. Eso equivale a decir que en los axiomas de una teoría está realmente contenida toda la teoría. La construcción de esa teoría consiste en poner de manifiesto, de forma explícita, todo lo que pueda ser deducido de los axiomas.

Antes del siglo XIX, el conocimiento, sobre todo el conocimiento científico, se identificaba con el conocimiento de la realidad [2]. Por eso, antes del siglo XIX la palabra axioma significaba "proposición tan clara y evidente que se admite sin necesidad de demostración". Esta acepción sigue vigente en el Diccionario de la Real Academia Española [25] y en otros diccionarios [26], y es utilizada por el lenguaje común. Hasta el siglo XIX fue el único significado de axioma. Solo cuando comenzaron a surgir dudas sobre la posibilidad de conocer "lo real", e incluso sobre el propio significado de "real"[4], se cambió esa acepción por una de pretensiones mucho más humildes: *los axiomas de una teoría son un conjunto de proposiciones compatibles entre sí a partir de las cuales se deduce todo el conocimiento que constituye esa teoría* [2]. Importa poco para la teoría si las proposiciones son verdaderas o falsas en el sentido de coincidir o no con la realidad. La teoría deduce proposiciones que se cumplen si los axiomas se cumplen. En el grado en que los axiomas se aproximen a la realidad, cualquiera que sea el significado de la palabra realidad, la teoría también se aproximará a esa realidad. Por ejemplo, la ley de Coulomb puede ser considerada el axioma de la Electrostática. Solo en el grado en que las fuerzas entre cargas puntuales sean inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre ellas la teoría se aproximará a la realidad. Esa aproximación es, sin duda, importante para describir o no la realidad por medio de la Electrostática, pero carece de importancia para la teoría en sí, cuyas proposiciones se cumplen en un mundo en el que se cumpla la ley de Coulomb [2]. De hecho resulta imposible saber si una teoría describe absolutamente la realidad, pues es del todo imposible saber si los axiomas son enunciados exactos de algo que ocurre o solo aproximaciones de ese algo que ocurre. Es imposible saber, por ejemplo si el exponente de la distancia entre las cargas de la ley de Coulomb es realmente un 2 o una cantidad muy aproximada a 2, a no ser que ese dos fuera consecuencia lógica de otro axioma anterior, que, a su vez, sería del todo imposible contrastar absolutamente con la realidad. Es imposible saber si el valor de la constante de Coulomb k_0 para el vacío es exactamente el que se utiliza habitualmente, o si la ley de Coulomb se cumple para todo rango de

[4] La revista Investigación y Ciencia de junio de 2002, página 5, publica una encuesta de Robert P. Crease, contestada por físicos, sobre 'cosas reales'. Los resultados muestran la falta de acuerdo sobre lo que significa 'real': el 50% dice que los colores son reales, de los números reales lo dice el 63%, el 43% de los números imaginarios y de la masa el 76% [2].

distancias, etc. Comentarios parecidos pueden expresarse respecto a la ley de Newton y a la constante de gravitación, y respecto a los axiomas de cualquier otra teoría que pretenda describir la realidad. Es decir, de lo único de lo que se puede estar seguro es de lo que se deduce de los axiomas, pero nunca se puede estar seguro de que esos axiomas coincidan exactamente con la realidad.

Que los axiomas sean compatibles entre sí significa que no deben ser contradictorios, condición necesaria para que sea posible la deducción de la teoría.

No obstante, aquí se preferirá una interpretación ligeramente diferente del concepto de axioma. Se trata de considerar los axiomas de una teoría como definiciones de los objetos cuyo estudio es el fin de la teoría [2]. Así resulta que la teoría es, realmente, el conjunto de propiedades del objeto o de los objetos definidos por los axiomas, deducidas esas propiedades solo de esos axiomas, es decir, deducidas esas propiedades de las definiciones de esos objetos[5]. Así, la ley de Coulomb puede ser interpretada como la definición de carga eléctrica puntual en reposo: los objetos puntuales que se atraigan o se repelan con una fuerza dada por la Ley de Coulomb son cargas puntuales. La Electrostática sería entonces el conjunto de propiedades de las cargas puntuales en reposo deducidas de la definición.

Esta acepción parece identificar cualquier definición con un axioma. Y de hecho así es en cualquier teoría, pues, definido cualquier nuevo concepto de una teoría, a partir de su definición se deduce la teoría del

---

[5] Incluso, para ser más precisos, convendría hacer notar que la definición, el axioma, crea el concepto en el sentido de que lo único que se utilizará para la obtención de propiedades del objeto, lo único que se utilizará para la construcción de la teoría, es lo que se diga en la definición, en el axioma. De nuevo hay que decir que importa poco para la construcción de la teoría si ya existía otro concepto igual o parecido al creado por la definición. Lo único que vale para la teoría es la definición.

concepto definido. Por ejemplo, en el desarrollo de la Electrostática surgen diversas definiciones, como por ejemplo, la del campo eléctrico, la del potencial eléctrico y otras. A partir de la definición de campo eléctrico comienzan a deducirse propiedades del campo eléctrico; a partir de la definición de potencial eléctrico se deducen las propiedades de potencial eléctrico. La definición de campo eléctrico y las propiedades deducidas de ella forman la teoría del campo eléctrico, y lo mismo para el potencial. Por tanto, no parece que haya diferencia entre unas definiciones y otras, no parece que haya diferencia entre los axiomas de una teoría y otras definiciones. Toda definición puede ser tomada como axioma para la teoría que se ocupa del objeto definido. A lo sumo, la diferencia entre los axiomas de una teoría y otras definiciones de esa teoría es que los axiomas son las definiciones primeras de la teoría, las otras vienen después y sirven como axiomas de teorías parciales contenidas en la teoría general.

En esta memoria se utilizará el concepto de axioma en la forma expuesta al final, es decir, *axiomas son las definiciones de los objetos cuyas propiedades constituyen una teoría*. Como se verá, el axioma de la teoría de las redes de Kirchhoff es la definición de red de Kirchhoff. Aunque, para definir el concepto de red de Kirchhoff, será necesario definir primero el concepto de red y descubrir las propiedades de las redes y de sus partes; es decir, se desarrollará una teoría previa de redes. Después, solo a partir de la definición de Red de Kirchhoff, se construirá toda la Teoría de las Redes de Kirchhoff por medio de la lógica. No se utilizará para la construcción de esa teoría ninguna ley o teorema no deducidos de la definición de red de Kirchhoff. Así, la Teoría de las Redes de Kirchhoff resulta ser un conjunto ordenado de propiedades de las redes de Kirchhoff. La Teoría de las Redes Eléctricas, más conocida como Teoría de Circuitos, resultará un caso particular de la Teoría de las Redes de Kirchhoff, pero no el único.

6. Redes

Este capítulo se dedica a elaborar una definición formal de red, a identificar y a definir partes de las redes, y a encontrar propiedades de las redes y de esas partes. Para ello se han teniendo en cuenta las contribuciones de los autores que se han ocupado de este tema y las ideas comúnmente aceptadas sobre los conceptos que se tratan[6].

Tres son las características más importantes que se pretenden para las definiciones aquí propuestas. a) Que sean definiciones exclusivamente topológicas, para que el correspondiente concepto sea el más amplio posible. Desde luego, la definición de red debe incluir la idea intuitiva que se tiene de red en general, la idea que se tiene de cualquier red como conjunto de ramas y de nudos. Por esta razón no han sido utilizados conceptos eléctricos en estas definiciones, pues, de hacerlo, las definiciones obtenidas quedarían limitadas a las redes eléctricas exclusivamente[7]. b) Que las definiciones de red y las definiciones de las partes de la red que sean de interés, abarquen totalmente el

---

[6] Se ha tenido en cuenta también la Teoría de Grafos [27], de la que se toman muchos conceptos y nombres, como hace, en general, la parte de la Teoría de Circuitos que se conoce como Topología de Redes [7], [28]. No obstante la teoría de redes que aquí se expone es específica para el fin que se pretende, que es la elaboración de una Teoría de Redes de Kirchhoff, por lo que algunos conceptos y, por tanto, algunas definiciones difieren de sus correspondientes de Teoría de Grafos.

[7] En [2] se dan algunas definiciones de características parecidas a las que se dan en esta tesis. Pero el resto de los autores que se ocupan de dar definiciones de redes se refieren exclusivamente a redes eléctricas, por lo que es frecuente que sus definiciones utilicen simultáneamente propiedades topológicas y propiedades eléctricas [19], [22], [23], [29], [30], [31], [32].

correspondiente concepto eléctrico como caso particular. c) Que las definiciones que aquí se propongan puedan servir para la teoría formal de las Redes de Kirchhoff que se pretende elaborar. Es decir, al elegir las definiciones, se ha de pensar permanentemente en la teoría general que se elabora, para conseguir la imprescindible coherencia entre todas sus partes y la utilidad de cada parte respecto al resto.

6.1. Ramas

Rama.- *Si* R *es un conjunto de pares ordenados de componentes desiguales tal que, si* (α,β) *es un elemento de* R, *ocurre que* (β,α) *también es un elemento de* R, *entonces cada elemento* (α,β) *de* R *se llama rama de extremos* α *y* β, *y* R *se llama conjunto de ramas.*

De forma más resumida, *se llama conjunto de ramas a cada conjunto* R *de pares ordenados tal que* $(\alpha,\beta)\in R \Rightarrow \left[(\beta,\alpha)\in R \quad y \quad \alpha\neq\beta\right]$.

En general, en un par (j,k), j se llama *primera componente* y k *segunda componente* de ese par.

De los pares ordenados (j,k) y (k,j) en los que la primera componente de cada par es la segunda del otro se dirá aquí que son *pares opuestos*. Por eso, la rama (β,α) se llama *rama opuesta* de la rama (α,β)[8].

---

[8] La definición propuesta parece ser la definición de rama más general posible, pues incluye cualquier concepto intuitivo de rama, no solo las ramas de las redes eléctricas. En efecto, toda rama tiene dos extremos α y β, y esos extremos son inseparables. Esta es la única propiedad que parece caracterizar a todas las ramas, que sus dos extremos no pueden separarse mientras la rama existe: si las componentes del par (α,β) son extremos de una rama, también las componentes del par (β,α) lo son de otra, que es su opuesta. Por eso, al definir "rama" como el par ordenado de sus extremos, se ha de exigir que si los

elementos del par (α,β) son extremos de una rama, también los elementos del par (β,α) lo sean de otra, que es su opuesta: si el par (α,β) está en el conjunto R, –si está la rama (α,β)–, debe estar también el par (β,α), –debe estar la rama (β,α)–. Por tanto, un conjunto de pares ordenados de componentes desiguales en el que (α,β) sea elemento de ese conjunto y (β,α) no lo sea, no puede ser un conjunto de ramas. Por el contrario, cualquier conjunto R de pares ordenados de componentes desiguales en el que ocurre que $(\alpha,\beta)\in R \Rightarrow (\beta,\alpha)\in R$ es un conjunto de ramas.

En [2] se da una definición de rama parecida a la que se da en esta tesis, pero contenida en la definición de red. Otras definiciones encontradas tanto de rama como de nudo son definiciones intuitivas del estilo de “A junction in which two or more elements have a common conection is called a *node*”, y “A *branch* is a path that conects two nodes” [22]. Otros autores no dan ninguna definición de rama ni de nudo. Parecen utilizar esos conceptos apoyados únicamente en la idea intuitiva que el lector puede tener de ellos [18].

El diccionario de IEEE [32] da diversas definiciones de rama según los campos del conocimiento a que se refiera. Una de estas definiciones está referida al “(network analysis)”, para el que da la siguiente definición: “branch: A line segment joining two nodes, or joining one node to itself”.

Nótese que la definición de rama que se da en esta tesis distingue entre la rama (α,β) y su opuesta, la rama (β,α). Más adelante se volverá sobre esta distinción.

Decir de las ramas (α,β) y (β,α) que son opuestas es conveniente, como se verá, para el resto de la teoría. Sin embargo ese calificativo no aparece en la bibliografía general.

Cada rama se representa por un segmento de línea. Los extremos del segmento representan los extremos de la rama. La figura 1 representa la rama (α,β) y su opuesta, la rama (β,α)[9].

Fig. 1.- Rama (α,β) y su opuesta la rama (β,α).

Como se ve, la definición de rama excluye del conjunto R los pares de componentes iguales, tal como el par (α,α)[10].

Conjunto básico de ramas orientadas.- *R' es conjunto básico de ramas orientadas del conjunto de ramas R si cada rama de R o su opuesta están en R', pero si en R' está una rama de R no está su opuesta.*

Es decir, para obtener R' se parte de R, y del conjunto de una rama y su opuesta se excluye una de las dos. El resultado es un conjunto que tiene la mitad de ramas que R y en el que no hay ninguna rama que sea opuesta de otra rama de R'.

[9] Es conveniente hacer notar que la figura 1 representa únicamente dos ramas, la rama (α,β) y su opuesta la rama (β,α). Esa representación puede hacerse por cualquiera de los infinitos segmento de línea de extremos α y β. Cualquiera de ellos representa esas dos ramas. O sea, dos o más segmentos de extremos α y β no representan a dos o más ramas de extremos α y β, sino a la única rama que tiene esos extremos. En otras palabras, la rama (α,β) es única, pues es el par ordenado (α,β).

[10] Como se verá más adelante, esta exclusión no impedirá que en una red existan ramas que se cierren sobre sí mismas. Más precisamente, la parte de la definición de rama del Diccionario de IEEE [32] citada en una nota anterior "...or joining one node to itself" no quedará excluida de nuestra definición.

R' resulta un conjunto menor que R, pero que, en la práctica, tiene la misma información que R, pues R se obtiene de R' añadiendo la rama opuesta de cada rama de R'[11].

6.2. Redes

Red.- *Sea R un conjunto de ramas, E el conjunto de los extremos de las ramas de R, y f una aplicación suprayectiva de E en un conjunto N. El trío* (R,N,f) *se llama red*[12].

---

[11] Referirse a este subconjunto R' es conveniente para atender la práctica habitual de tratar como una única rama a una rama y a su opuesta. Más adelante se volverá sobre esta cuestión.

[12] En [2] se da una definición de red parecida a la que se da en esta tesis. Otros autores dan definiciones solo de 'red eléctrica' similares a esta: "An **electric circuit** or electric network is an interconnection of electrical elements linked together in a closed path so that an electric current may continously flow" [22]. La letra negrita para '**electric circuit**' es del autor citado. Con ella parece dar a entender que, aunque utiliza '**electric circuit**' y 'electric network' como sinónimos, prefiere '**electric circuit**'.

En general las definiciones "intuitivas" de red eléctrica son las únicas que aparecen en la bibliografía, incluso en aquellos textos que muestran mayor preocupación por el rigor, como, por ejemplo *Basic Circuit Theory* de Desoer [29]. Este texto atribuye también el mismo significado a 'circuito eléctrico' y a 'red eléctrica' (página 381), aunque a continuación se pretende una distinción bastante confusa, pareciendo atribuir a 'red' el significado de circuito más complejo, más extenso ("a network is a circuit with many elements").

Como se verá, en esta tesis se distingue inequívocamente entre 'red' y 'circuito'. El lenguaje común español y el común inglés, y algunos autores también lo hacen [2].

Otros autores parecen aceptar que todos los lectores saben lo que se entiende por red, o que, al menos, tienen una idea intuitiva de red. Por ejemplo, el libro

Los elemento de N se llaman *nudos* de la red, y cada elemento (A,B) de N^2 es, por tanto, un *par de nudos* de la red[13].

Introductory Circuit Theory de Guillemin [18], [19] comienza su primer capítulo clasificando las redes sin haberse referido a ellas previamente.

El diccionario de IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) [32] da como definición general de red la siguiente: "network. A combination of elements or devices", y después da otras definiciones para redes concretas, entre ellas la que se refiere a "distribution of electric energy": "An aggregation of interconnected conductors consisting of feeders, mains, and services".

[13] Algunos traductores traducen al español la palabra inglesa '*node*' como "*nodo*" [33]. Por ejemplo, "Nodo: Un punto en el que se unen dos o más elementos del circuito" y "Rama: Camino que conecta dos nodos" [23]. Desde luego que la palabra española 'nudo' proviene de la latina '*nodus, -us*', de donde también procede la palabra inglesa "node" [26]; pero esa no parece ser razón suficiente para preferir 'nodo' a 'nudo'. "Nudo" es mucho más apropiada por ser una palabra más descriptiva del concepto y del objeto –sobre todo del objeto real– a que se refiere. Hablar de nodos de carreteras, de nodos de una red de pescar o de nodos de una red eléctrica parece extraño, si no rebuscado.

En la última edición, la vigésimo segunda, del Diccionario la Real Academia Española, a la palabra *nodo* no se le atribuye el significado de *nudo* de una red. Pero en el avance de la edición siguiente, la vigésima tercera, que la Real Academia ofrece en Internet, se incluye una nueva definición de *nodo*, algo confusa, que podría identificarse con nudo de una red. Esa definición es la siguiente: "nodo. En un esquema o representación gráfica en forma de árbol, cada uno de los puntos de origen de las distintas ramificaciones". Como los árboles de cada red interconectan todos los nudos de esa red, parece que todos los nudos de una red, por ser nudos de cualquier árbol de esa red, son nodos según esa definición. En cualquier caso, en esta tesis se seguirá hablando de *nudos* de una red.

El diccionario de IEEE [32] da diferentes definiciones de nudo. La que se refiere a "(network analysis)", que es la primera, dice: "node: One of the set of discrete points in a flow graph".

Cada elemento $(\alpha,\beta) \in R$ es una *rama* de la red. Si (α,β) es una rama, y $f(\alpha) = A$ y $f(\beta) = B$, los nudos A y B se llaman *terminales* de la rama (α,β). De una rama de terminales A y B se dice que une o conecta los nudos A y B, o que parte o sale de A y llega a B. Si a un nudo llega una rama, de ese nudo parte la rama opuesta. Por tanto, el número de ramas que llegan a cada nudo es el mismo que el número de las que parten de él.

En la representación de una red los nudos se representan por puntos y cada rama se representa por un segmento de línea cuyos extremos coinciden con los nudos que sean sus terminales (fig. 2).

La aplicación f asigna un nudo a cada extremo de las ramas, es decir, determina a qué nudo se conecta cada extremo de las ramas. Por tanto, los mismos conjuntos de ramas y nudos pueden formar diferentes redes. O sea, si R y N están fijados, es f la que determina la red resultante de esos dos conjuntos de ramas y nudos (fig. 2).

Nótese también que la definición de red que se ha dado permite asignar el mismo nudo a dos o más extremos de ramas, y, en particular, se puede asignar el mismo nudo a los dos extremos de una rama, tal como ocurre a la rama 2 en la red de la figura 2b. De una rama así se dice que está *cerrada sobre sí misma*.

Por tanto, *se llama rama cerrada sobre sí misma a una rama en la que el terminal de uno de sus extremos es el mismo que el terminal de su otro extremo*[14].

La rama 2 de la figura 2b es una rama cerrada sobre sí misma: sus dos extremos tienen como terminal el nudo E.

[14] De esta manera quedan incluidas, como se dijo, las ramas a que se refiere el Diccionario de IEEE con la expresión "...or joining one node to itself" [32].

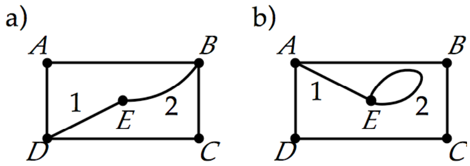

Fig. 2.- Las dos redes de esta figura tienen el mismo conjunto R de ramas y el mismo conjunto N de nudos, pero son redes distintas porque hay ramas que tienen como terminales en una red nudos distintos que en la otra; es decir, la red de la figura 2a, que será designada por (R,N,f_a) es distinta de la red (R,N,f_b) de la figura 2b porque las aplicaciones f_a y f_b son diferentes.

La exigencia de que f sea suprayectiva elimina la posibilidad de que haya nudos de una red que no sean terminales de alguna rama. En otras palabras, un punto al que no llega ninguna rama de una red no es nudo de esa red.

Como se ha dicho, de la definición de rama se deduce que si $(\alpha,\beta)\in R$, también $(\beta,\alpha)\in R$, por lo que, si R es un conjunto finito, su cardinal es un número natural par, que se designará por $2r$.

Si N es un conjunto finito, su cardinal es un número natural que se designará por n_t.

Por tanto, la red (R,N,f) tiene $2r$ ramas y n_t nudos.

En Teoría de Circuitos y en Electrotecnia el nombre 'rama' se emplea con dos significados distintos, aunque esta distinción no se haga casi nunca explícita. Un significado es el que se le ha atribuido hasta ahora en este texto, que distingue entre una rama y su opuesta; y otro el que designa al conjunto formado por una rama y su opuesta, sin distinguirlas. En general, se suele confiar en que el contexto aclare cuál de esos significados se utiliza en cada caso. Por ejemplo, cuando se dice que la intensidad de una rama de una red eléctrica es $5\ \mathrm{A}$, el significado de rama que ha de suponerse es el que distingue entre una rama y su opuesta, pues la rama opuesta a la citada no tiene por intensidad $5\ \mathrm{A}$ sino $-5\ \mathrm{A}$ (menos cinco amperios). Pero cuando se habla del número de las ramas de una red, el significado de rama no distingue entre una rama y su opuesta, considera al conjunto de las dos una sola rama. Este es el significado de la palabra 'ramas' cuando se dice de las redes de la figura 2 que tienen seis ramas y cinco nudos cada una.

Para evitar toda ambigüedad, cuando sea necesario se utilizará en esta tesis la expresión *rama orientada* para designar cada una de las $2r$ ramas de la red tal como aquí se han definido[15], y *rama no orientada* para designar el conjunto formado por una rama y su opuesta. Por tanto, si el número de ramas orientadas de una red es el número par $2r$, el de ramas no orientadas es el número natural r.

Cada conjunto básico de ramas orientadas de un red tiene también r ramas.

El nombre de *rama*, sin ningún calificativo, seguirá significando en esta tesis lo mismo que hasta ahora, es decir, *rama orientada*, o elemento de R.

Fig. 3.- Rama aislada es una red que solo consta de una rama no orientada y un par de nudos, que son sus terminales.

<u>Rama aislada</u>.- *Rama aislada es una red que solo consta de una rama y su opuesta, y sus dos terminales.*

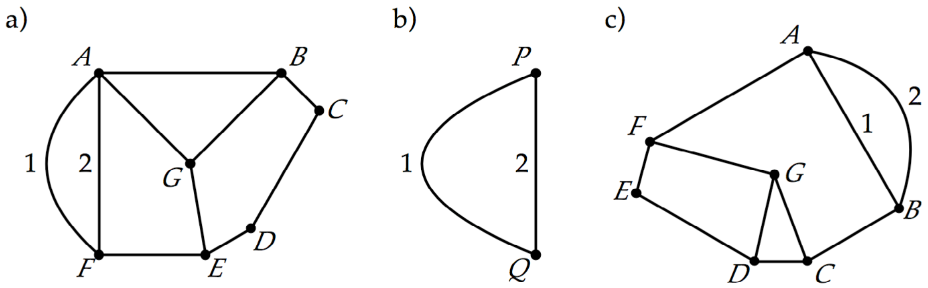

Fig. 4.- Redes.

[15] Se verá que referirse a ramas orientadas elimina toda ambigüedad sobre los sentidos de las intensidades y de las tensiones.

Una vez que las ramas forman parte de una red, no suelen ser ya identificadas por sus extremos -letras griegas en este texto-. Si dos nudos son terminales de una sola rama, ese par ordenado de nudos suele utilizarse para identificar esa rama. Así, en la red de la figura 4a las ramas AB, BA y ED quedan identificadas sin ambigüedad por sus terminales. Pero si un par de nudos está conectado por dos o más ramas, tal como el par de nudos AF en la figura 4a, cada rama que une esos dos nudos no puede ser identificada solo por esos dos nudos. Una forma habitual de identificar estas ramas en las redes eléctricas, que se utilizará aquí, es añadir a cada rama una identificación adicional, además de la proporcionada por sus terminales, como, por ejemplo, $AF1$ y $AF2$ en la figura 4a. De esa forma quedan inequívocamente identificadas cada rama y su opuesta. Por ejemplo, en la figura 4a, $FA1$ es la *rama opuesta* de $AF1$[16]. Otro procedimiento es identificar solo las ramas de un conjunto básico de ramas orientadas de la red. Se hace por medio de flechas situadas sobre el segmento que representa cada rama y su opuesta, y con números o letras, como se hace en la figura 5. En la red 5a, la rama 1 es la DA, y la rama 8 es la EC. Las ramas designadas mediante flechas y números en esa red forman un conjunto básico de ramas orientadas. En la red 5b la rama d es la DC, y la rama f es la EA. También en esta figura las ramas designadas mediante letras minúsculas y flechas forman un conjunto básico de ramas orientadas de la red.

[16] Ahora se ve que en la definición de red es necesario considerar por separado los extremos de las ramas, que son pares de elementos de R –designados por letras del alfabeto griego–, de los pares de elementos de N, que son los pares de nudos, pues, aunque en una red cada extremo de una rama coincide siempre con un nudo, dos nudos pueden ser a la vez terminales de varias ramas, por lo que, en general, un par de nudos puede no ser suficiente para identificar una rama. Además, los extremos de una rama pueden ser conectados a nudos distintos para formar redes distintas.

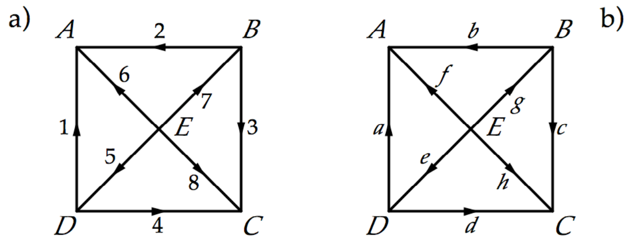

Fig. 5.- a) Ramas designadas por flechas y números. b) Ramas designadas por flechas y letras.

Una red eléctrica [22], [29], una red de pescar y una red de carreteras son realizaciones de la red formalmente definida aquí.

6.3. Red canónica de un conjunto de nudos

Dado un conjunto *N*, designemos por *I* el conjunto de los pares de *N* que tienen sus componentes iguales, es decir, $I = \{(a,a)/a \in N\}$. Entonces el conjunto $N^2 - I$ es un conjunto de ramas[17]. El conjunto de los extremos de las ramas de $N^2 - I$ es *N*.

Sea ahora f una aplicación tal que la imagen de cada extremo de las ramas de $N^2 - I$ es él mismo, es decir, $f(A) = A \quad \forall A \in N$. La red $(N^2 - I, N, f)$ tiene por nudos los extremos de las ramas. La llamaremos red canónica del conjunto de nudos *N*.

[17] Dicho de otra manera, si de cualquier conjunto de pares ordenados se eliminan los pares cuyas componentes son iguales, el conjunto de pares resultante es un conjunto de ramas. Esta afirmación es cierta cualquiera que sea el conjunto *N*. La única particularidad de este caso es que *N* va a ser también el conjunto de nudos de la red.

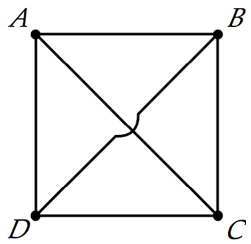

Fig. 6.- Red canónica de cuatro nudos.

Una característica de esta red es que todo par de nudos es una rama y solo una, cosa que no ocurre en otras redes, en las que puede haber pares de nudos que no estén unidos por ninguna rama o por más de una.

6.4. Intersección de redes

Intersección de redes.- *Sean* (R_1, N_1, f_1) *y* (R_2, N_2, f_2) *dos redes,* $R = R_1 \cap R_2$ *y* $N = N_1 \cap N_2$. *Si* $f_1^{-1}(A) = f_2^{-1}(A) \quad \forall A \in N$, *entonces la red* (R, N) *con la restricción de* f_1 *y* f_2 *a los extremos de las ramas de* R *se llama intersección de las redes* (R_1, N_1, f_1) *y* (R_2, N_2, f_2).

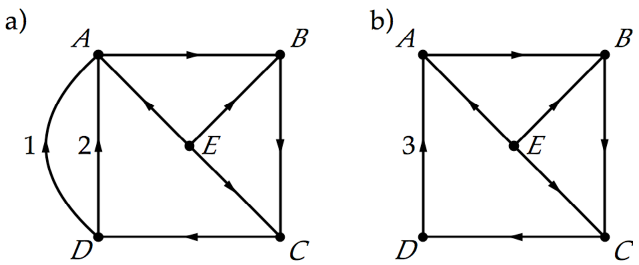

Fig. 7.- La intersección de estas dos redes está formada por todos los nudos y todas las ramas excepto las que conectan los nudos A y D.

O sea, la intersección de dos redes es el conjunto de ramas y nudos comunes a las dos redes con la misma posición relativa entre ellos.

La intersección de las dos redes de la figura 7 son todos los nudos y todas las ramas excepto las ramas de terminales A y D.

De dos redes que no tienen ninguna rama ni ningún par de nudos comunes se dice que su intersección es vacía.

6.5. Ramas en serie y ramas en paralelo

Ramas en serie.- *Dos ramas orientadas de una red están conectadas en serie si no son opuestas y el segundo terminal de una coincide con el primero de la otra, y si, además, a ese terminal no llega ninguna otra rama* [2].

Por simplificar, de dos ramas conectadas en serie se dice simplemente que están *en serie*. En la figura 4a las ramas BC y CD están en serie. Su terminal común es el C, al que no llega ninguna otra rama.

De la definición de ramas en serie se deduce que *si dos ramas están en serie también están en serie sus ramas opuestas*. Por ejemplo, en la figura 4a están en serie las ramas DC y CB, que son las opuestas de las anteriores, pero no están en serie las ramas DC y BC, pues el segundo terminal de una no coincide con el primero de la otra.

m *ramas están en serie si una rama está en serie con otra, esta lo está con una tercera, y así sucesivamente*.

En la figura 4a las ramas BC, CD y DE están en serie.

De esta última definición se deduce que, *si m ramas están en serie, también están en serie sus ramas opuestas*.

En la figura 4a las ramas ED, DC y CB están en serie. Estas ramas son las opuestas de las anteriores.

Ramas en paralelo.- *Dos o más ramas orientadas de una red están conectadas en paralelo si conectan el mismo par ordenado de nudos*. O, también, *dos o más ramas orientadas de una red están conectadas en paralelo si tienen el mismo par de terminales*.

Por simplificar, de dos ramas conectadas en paralelo se dice simplemente que están *en paralelo*.

Las ramas $AD1$ y $AD2$ de la red de la figura 7a están en paralelo.

De la definición de ramas en paralelo se deduce que si m ramas están en paralelo, sus opuestas también lo están. En la figura 7a, $DA1$ y

$DA2$, opuestas de las anteriores, están en paralelo. No están en paralelo $AD1$ y $DA2$. Desde luego tampoco están en paralelo una rama y su opuesta.

En la figura 4b las ramas $PQ2$ y $QP1$ están en serie, y $QP1$ y $QP2$ en paralelo[18].

[18] Las definiciones de ramas en serie y en paralelo que aquí se dan son definiciones topológicas. Se apoyan solo en la definición de red aquí dada, que también es una definición topológica de red. Utilizan exclusivamente el modo en que la aplicación f relaciona los nudos y las ramas, o sea, la "posición relativa" de ramas y nudos. Valen, por tanto, para todas las redes físicas que sean realizaciones de la red aquí definida, como, por ejemplo, una red de carreteras o una red eléctrica.

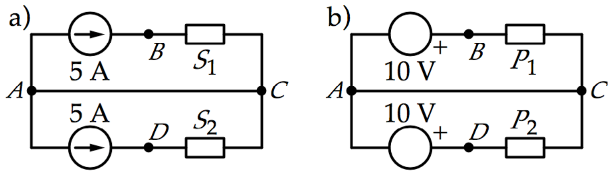

Fig. N1.- a) Las intensidades de las ramas S_1 y S_2 son iguales, con independencia de los elementos que las constituyan, y no parece que pueda decirse de ellas que están en serie. b) Las tensiones de las ramas P_1 y P_2 son también iguales con independencia de los elementos que las constituyan, y tampoco puede decirse de ellas que están en paralelo.

Otros autores que dan definiciones de ramas en serie y en paralelo lo hacen refiriéndose exclusivamente a redes eléctricas, y suelen mezclar conceptos topológicos, o sea, conceptos de posición, con conceptos eléctricos [34]. Por ejemplo, "Two branches are *in series* if they are physically connected so that the *same* current flows through them regardless of what makes up those two branches", y "Two branches are *in parallel* if they are physically connected so that the *same* voltage appears across them regardless of what makes up those two branches" [30]. Es verdad que en ramas en serie y en paralelo de redes eléctricas y, en general, de cualquier red de Kirchhoff, ocurre, como se verá, lo que se dice en las citas, pero también en otras ramas que no están en serie y en paralelo. Por ejemplo, sean cuales sean las ramas S_1 y S_2 de la figura N1a, están conectadas de forma que sus intensidades son iguales, y no parece que se pueda decir de esas ramas que están en serie. De forma similar, sean cuales sean las ramas $P1$ y $P2$ en la figura N1b, están conectadas de forma que sus tensiones son iguales, y tampoco podría decirse de ellas que están en paralelo. Por eso, esas definiciones parecen de dudosa validez, incluso para redes eléctricas. Sin embargo, si la expresión "...regardless of what makes up those two branches" no se limitara a las dos ramas, sino que abarcara al resto de la red, ambas definiciones podían valer para las redes eléctricas.

La idea de la misma intensidad para ramas en serie aparece sorprendentemente en otros autores como la única condición para que varias ramas sean consideradas conectadas en serie. Por ejemplo, en [22] se da la siguiente definición: "Series Connection: Circuit of a series of elements connected so that the same currents passes through each element". De la misma manera, parece que tener siempre la misma tensión es suficiente para que dos ramas sean consideradas en paralelo: "Parallel Connection: Arrangement of resistors so that each resistor has the same voltage appearing across it".

Desde luego, en último extremo, las definiciones consisten en elegir nombre para lo designable, y ese nombre puede ser cualquiera; pero que dos ramas estén en serie o en paralelo es un propiedad considerada por la mayoría como una cuestión de posición, una propiedad topológica, por lo que conviene que su definición sea topológica, con independencia de que de esa definición se deduzcan otras propiedades relacionadas con las intensidades y las tensiones, en particular, como se verá después, que la intensidad de ramas en serie en una red eléctrica y, en general, en una red de Kirchhoff sea la misma, y que ramas en paralelo de redes eléctricas y de redes de Kirchhoff tengan la misma tensión. Pero hay ramas que siempre tienen la misma intensidad sin estar en serie, y ramas que siempre tienen la misma tensión sin estar en paralelo.

El diccionario de IEEE [32] da dos definiciones de "series elements" referidas a "(networks)", que son exclusivamente topológicas: "Two-terminal elements are connected in series when they form a path between two nodes of a network such that only elements of this path, and no other elements, terminate at intermediate nodes along the path". La idea que esta definición transmite es la misma que la nuestra, salvo que aquí se refiere a 'elements' y, por tanto, a ramas no orientadas.

Nótese que nuestras definiciones de ramas en serie y de ramas en paralelo se refieren a ramas orientadas[19].

6.6. Conjuntos de corte

Conjunto de corte.- *Se llama conjunto de corte de un conjunto de nudos de una red al conjunto de las ramas que llegan a ese conjunto de nudos excluidas todas las que unen dos de ellos*[20] [1], [2].

Por tanto, si un conjunto de ramas es conjunto de corte de un conjunto de nudos de una red, sus ramas opuestas son el conjunto de corte del resto de los nudos de esa red.

En la figura 4a las ramas AG, BG, DE y FE son el conjunto de corte de los nudos G y E. Sus opuestas, las ramas GA, GB, ED y EF son el conjunto de corte del resto de los nudos, es decir, de los nudos A, B, C, D y F.

Según la definición, el conjunto de corte de un nudo es el conjunto de todas las ramas que llegan a ese nudo. Así, el conjunto de corte del nudo A de la red de la figura 4a es el conjunto de las ramas BA, GA, $FA1$ y $FA2$. El conjunto de corte de los N nudos de una red es el conjunto vacío.

Como se ve, en la definición de conjunto de corte que aquí se da, el

---

La segunda definición del diccionario de IEEE es "Two-terminal elements are connected in series when any mesh including one must include the other".

[19] Como se verá más adelante, referirse a ramas orientadas en las definiciones y teoremas relacionados con ramas en serie y en paralelo es imprescindible para una exposición de la teoría que elimine toda ambigüedad sobre los sentidos de tensiones e intensidades.

[20] Para los fines de la teoría que se elabora es indiferente definir conjunto de corte de un conjunto de nudos como el conjunto de las ramas que *llegan* a ese conjunto de nudos o que *salen* de ese conjunto de nudos excluidas todas las que unen dos de ellos.

conjunto de corte está asociado a un conjunto de nudos. En la bibliografía esta asociación solo aparece en la referencia [2].

El nombre 'conjunto de corte' se debe a que, si en la representación gráfica de una red se cortan -como con una tijera- todas las ramas que forman un conjunto de corte de esa red, quedan dos partes totalmente separadas de esa red[21]. Esa propiedad permite considerar de forma natural

[21] El libro más antiguo que hemos encontrado en el que se habla de conjuntos de corte (*cut sets*) es el de Guillemin [18]. En él no se da una definición de conjunto de corte, pero sí una muy amplia descripción de sus propiedades, principalmente de la propiedad que se refiere a la separación en dos partes que se puede conseguir si se cortan las ramas de un conjunto de corte. También se dan reglas para obtener conjuntos de corte.

Otros autores sí dan definiciones de conjunto de corte. Por ejemplo, "A *cut set* of a graph is a minimum set of elements that when cut, or removed, separates the graph into two groups of nodes" [22]. En la cita se llama *graph* a un tipo de representación gráfica de una red eléctrica, y *elements* parece designar a las ramas de una red eléctrica.

El diccionario de IEEE [32] da la siguiente definición de "cut-set": "A set of branches of a network such that cutting of all the branches of the set increases the number of separate parts of the network, but the cutting of all the branches except one does not".

Como se ve, estas definiciones utilizan principalmente el hecho de la división de la red en partes que cortar las ramas de un conjunto de corte origina.

Con independencia de las definiciones que aparecen en la bibliografía, la práctica muestra que, en general, todos los autores que se refieren a los conjuntos de corte –no todos lo hacen– coinciden en lo que entienden por conjunto de corte. Ese concepto común es el que recoge la definición dada en esta memoria.

El libro *Introducción a la Teoría de Circuitos*, que es traducción de *Introductory Circuit Theory* de Guillemin [18], [19] traduce al español 'cut set' como '*grupo* de corte'. En esta tesis se ha preferido *conjunto* de corte, como también hacen otros autores [2].

una red dividida en dos partes. En efecto, fijado un conjunto de corte de esa red, se pueden considerar dos partes de esa red conectadas por las ramas de ese conjunto de corte. Cada rama del conjunto de corte se puede incluir en una u otra parte de la red, según convenga. De esa manera, el conjunto formado por las dos partes es la red completa.

6.7. Redes conexas y redes inconexas

Red conexa.- *Se dice que la red (R,N,f) es conexa si el conjunto de corte de cada conjunto de nudos $M \subset N$, $M \neq N$ no es el conjunto vacío*. Una red que no es conexa se llama *red inconexa* [2].

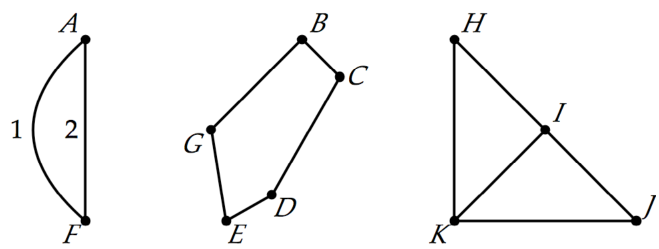

Fig. 8.- Red inconexa.

Si la figura 8 es la representación gráfica de la red (R,N,f), con $N=\{A,B,...,K\}$, esa red es inconexa, pues el conjunto de corte del conjunto de nudos $\{A,F\} \subset N$ es el conjunto vacío. También son vacíos los conjuntos de corte de los subconjuntos de N $\{B,C,D,E,G\}$, $\{H,I,J,K\}$, $\{A,B,C,D,E,F,G\}$, $\{B,C,D,E,G,H,I,J,K\}$ y $\{A,F,H,I,J,K\}$.

Intuitivamente, una red es conexa si, en su representación gráfica, se puede ir de cualquier nudo a cualquier otro por ramas de la red. Si no, es inconexa.

De la definición se deduce que si el conjunto de corte del conjunto de nudos $M \subset N$, $M \neq N$ es el conjunto vacío, y un terminal de la rama (α,β) es un nudo de M, también el otro terminal de (α,β) es un nudo de M. El conjunto de todas las ramas cuyos terminales son nudos de M será designado por R_M. Como $R_M \subset R$, el trío (R_M, M, f_M), donde f_M es la restricción de f a M, es una red. Si ningún subconjunto de M tiene conjuntos de corte vacíos, la red (R_M, M, f_M) es conexa. Por tanto, toda red inconexa da lugar, al menos, a dos redes conexas. Por eso, las redes inconexas se estudian como conjuntos de redes conexas, que serán las únicas a las que nos referiremos en lo que sigue. La red inconexa de la figura 8 da lugar a tres redes conexas.

El conjunto de corte de un nudo de una red conexa son las ramas opuestas del conjunto de corte del resto de los nudos. Por ejemplo, en la red de la figura 5 las ramas BA, EA y DA son el conjunto de corte del nudo A, y sus opuestas son el conjunto de corte del resto de los nudos de la red.

6.8. Caminos

Camino.- *Camino es una sucesión de pares ordenados* (A_h, B_h) *tal que* $1 < k \Rightarrow B_{k-1} = A_k$.

Es decir, la segunda componente de un par que no sea el último par de la sucesión es la primera componente del siguiente.

El par (A_h, B_h) de un camino se llama elemento que *ocupa* el lugar h, o *elemento* h del camino.

Las componentes de los pares que forman un camino se llaman *vértices del camino*. Por tanto cada A_h o cada B_h de los pares de un camino es un vértice del camino.

De un camino que tiene como uno de sus vértices el punto A se dice que es un camino que pasa por el vértice A.

Si existe un número natural m tal que (A_m, B_m) es un elemento de un camino, y para todo elemento (A_k, B_k) de ese camino ocurre que $k \leq m$, entonces ese camino se llama camino *finito*, y se dice de él que está formado por m elementos. Si tal número m no existe, el camino se llama *camino infinito*, y se dice de él que está formado por un número infinito de elementos.

El primer punto A_1 del primer elemento de un camino se llama *origen, principio* o *extremo inicial* del camino. Si el camino es finito con m pares ordenados, el segundo punto B_m del par m se llama *fin, final* o *extremo final* del camino. Un camino infinito solo tiene extremo inicial. Un camino finito de m pares ordenados tiene los dos extremos, el principio y el final, que son A_1 y B_m. Se llaman *extremos* del camino. De un camino de extremos A_1 y B_m se dice que está recorrido en el sentido de A_1 a B_m.

La sucesión de pares de nudos (A,B), (B,C), (C,D), (D,E) y (E,F) de la figura 8 es un camino de extremos A y F. A es el origen, y F es el fin de ese camino. Los nudos A, B, C, D, E y F son los vértices de ese camino, que, por ser nudos de una red, se llaman *nudos del camino*. Por simplificar, un camino formado por pares de nudos se llama *camino de nudos*, aunque lo correcto sería llamarlo *camino de pares de nudos*, pues los elementos del camino no son nudos, sino pares de nudos.

También para simplificar la escritura, un camino como el citado en el párrafo anterior se puede denotar así: AB, BC, CD, DE, EF; y, preferiblemente, por la sucesión de sus vértices o nudos: $ABCDEF$. El origen de ese camino es A y el final es F.

La sucesión de ramas $FA1$, AB y BG de la red de la figura 4a es un *camino de ramas*[22]. La sucesión $FA2$, AB y BG es otro camino de ramas de

[22] En el diccionario de IEEE se da una definición de camino que se refiere solo a un camino de ramas [32]. Para otros autores, sin embargo, un camino no tiene que estar constituido necesariamente por ramas "...a closed path can jump

esa red.

Con la notación establecida, la expresión $BCDE$ referida a la red de la figura 8b designa un camino de nudos y un camino de ramas. Sin embargo el camino $ABGF$ de la figura 4a solo designa un camino de nudos, pues GF no es una rama.

De un camino de ramas se dice que *interconecta* los nudos de ese camino.

Caminos opuestos.- *Dos caminos finitos de* m *elementos son caminos opuestos si cada elemento* k *de uno es opuesto al elemento* $m-(k-1)$ *del otro.*

Por ejemplo, el camino AB, BC, CD, DE, EF, y el camino FE, ED, DC, CB, BA son opuestos. O bien, con notación más cómoda, los caminos $ABCDEF$ y $FEDCBA$ son opuestos. Se dice también que el primer camino está recorrido en el sentido AF y el segundo en el sentido opuesto, FA.

6.9. Caminos cerrados y bucles

Camino cerrado.- *Se llama camino cerrado a cada camino cuyo principio y cuyo final coinciden* [2].

El camino opuesto de un camino cerrado es un camino cerrado.

En la red de la figura 4a el camino $ABCGFA$ y su opuesto $AFGCBA$ son caminos de nudos cerrados. El camino $ABCDEGA$ es un camino de nudos cerrado y un camino de ramas cerrado.

---

across several component or even across an open pair of terminals" [30]. La falta de uniformidad en lo que se entiende por camino suele desparecer cuando se enuncia la segunda ley de Kirchhoff: con independencia de la forma en que un autor haya definido camino, al enunciar la segunda ley de Kirchhoff suele entender por camino un camino de nudos, que puede ser o no camino de ramas, indistintamente [22].

Un camino cerrado en el que cada vértice es componente de un solo par del camino se llama camino cerrado simple. Se dice también que *el camino solo pasa una vez por cada vértice*.

Si un vértice de un camino cerrado es componente de dos o más pares del camino, el camino se llama camino cerrado compuesto. Si ese vértice es origen de c elementos del camino, se dice que el camino pasa c veces por ese vértice.

Los caminos cerrados de nudos y ramas de la red 4a citados hasta ahora en este apartado son caminos cerrados simples. El camino cerrado $ABCGFEGA$ es un camino cerrado compuesto, pues pasa dos veces por el vértice G.

Bucle.- *Se llama bucle a cada camino cerrado de ramas de una red*[23].

---

[23] En inglés 'loop'. El diccionario de IEEE identifica los significados de "loop" y "mesh" (malla). Así, define "**mesh** A set of branches forming a closed current path, provided that the omission of any branch eliminates the closed path". Y agrega: "*Note*: The term loop is sometimes used in the sense of mesh" [32]. En español se tiende a llamar malla a cada bucle más simple de una red si la red puede dibujarse en un plano sin que se crucen sus ramas [35], [36], [38], [39]. También algunos autores españoles llama *lazo* a lo que aquí se llama *bucle* [35], [37].

En [40] no se da una definición de bucle, pero se dice en la página 24 . "...we form a loop by traversing through elements (open circuits included!)". El signo de admiración y el paréntesis son de la cita.

En general existe una gran confusión en la bibliografía sobre los nombres e incluso los conceptos de camino, camino cerrado de nudos, camino cerrado de ramas, bucles, y mallas. De hecho, no hay una exposición ordenada mínimamente completa y coherente de esta parte de la topología de redes, sino descripciones con fuerte apoyo intuitivo, acompañadas a veces de definiciones también muy intuitivas, casi siempre aisladas, y no siempre acordes con lo que se dice después. No obstante, los conceptos y la nomenclatura empleados en esta

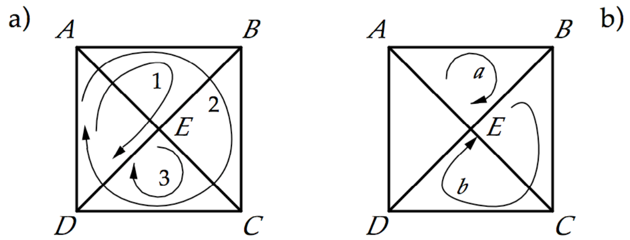

Fig. 9.- a) Bucles designados por flechas y números. b) Bucles designados por flechas y letras.

Con frecuencia los bucles de las redes se designan también por flechas y números como en la figura 9a, y con flechas y letras como en la figura 9b. En la red 9a el bucle 1 es el bucle $ABEDA$ y el bucle opuesto de 1, $ADEBA$. A veces el bucle opuesto del bucle 1 se designa por -1. El bucle 2 es el bucle $ABCDA$. En la red 8b el bucle a es el bucle $ABEA$, y el bucle b es el $BCDEB$.

Como para las ramas, se utilizará la expresión *bucle orientado*, para distinguir entre un bucle y su opuesto, y *bucle no orientado* para designar al conjunto de un bucle y su opuesto. En general, en esta tesis la palabra ´bucle´ designará al bucle orientado.

Si el principio y el final de un camino no coinciden, el camino se llama *camino abierto*.

En la red 9a, el camino ABC es un camino de nudos abierto y un camino de ramas abierto.

6.10. Árboles

<u>Árbol</u>.- *Se llama árbol de una red conexa a cada conjunto del mayor número de ramas no orientadas de esa red que no forma ningún bucle* [2].

En general, cada red tiene más de un árbol.

---

tesis son los más extendidos y, sobre todo, los que permiten una construcción progresiva, coherente y precisa de la teoría de las redes de Kirchhoff que se elabora.

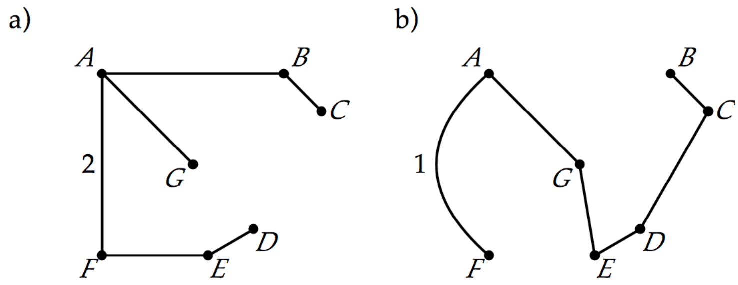

Fig. 10.- Dos árboles de la red 4a.

En la figura 10 se representan dos árboles de la red de la figura 4a. Se ve que esos conjuntos de ramas no forman ningún bucle. Si se añadiera cualquier otra rama se formaría un bucle, por lo que el conjunto resultante ya no sería un árbol. Si se suprime una rama, el conjunto resultante no tendría bucles, pero no sería un conjunto del mayor número posible de ramas sin bucles. Por tanto, esos dos conjuntos de ramas son árboles de la red[24].

Cada nudo de un árbol al que solo llega una rama se llama *extremo* del árbol. Los nudos *C*, *D* y *G* son los extremos del árbol de la figura 10a. *B* y *F* son los extremos del árbol de la figura 10b.

Si es n_t el número de nudos de una red, el número de ramas no orientadas de cada árbol de esa red es $n = n_t - 1$. En efecto, si desde un

[24] Las definiciones de árbol que aparecen en la bibliografía, además de exigir que las ramas del árbol no deben formar ningún bucle, utilizan principalmente el hecho intuitivo de que tienen que conectar todos los nudos, aunque en algunos casos con cierta oscuridad. Por ejemplo, "Tree Any connected set of branches of a graph that connects every node to evey other node directly without forming any closed path" [22]. El Diccionario de IEEE da la siguiente definición: "tree A set of connected branches including no meshes". Se ve la dificultad de entender el concepto que se define por quienes desconozcan el concepto de árbol de una red. Algunos autores no dan ninguna definición de árbol, pero sí describen sus propiedades y las utilizan. A pesar de la diversidad de tratamiento, y de la posible oscuridad de algunas definiciones, se ve que el concepto es el mismo para todos los autores, y coincide con el definido en esta memoria.

extremo de un árbol se comienza a contar sus ramas, la primera rama une dos nudos, la siguiente llega a otro, la siguiente a otro, y así sucesivamente. Salvo la primera, que hemos relacionado con dos nudos, a cada nudo restante corresponde una rama y, por tanto, cada árbol tiene tantas ramas como nudos menos uno.

Elegido un árbol de una red, las ramas que no pertenecen a él se llaman *enlaces* de ese árbol. Como todos los árboles tienen el mismo número de ramas, también todos los árboles tienen el mismo número de enlaces. El número de enlaces no orientados de cada árbol de una red conexa es

$$l = r - n = r - n_t + 1$$

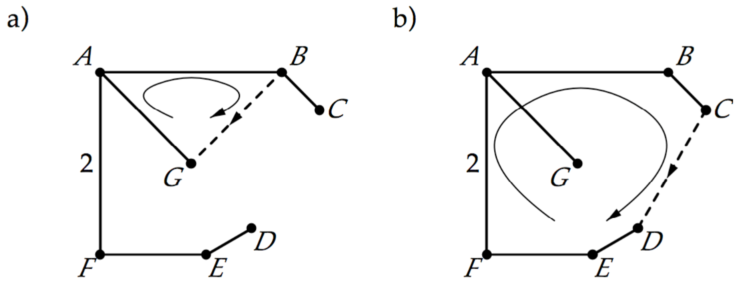

Fig. 11.- Bucles de enlaces.

Dado un árbol, si se añade un único enlace orientado, se forma un único bucle, que se llama *bucle de ese enlace*. En la figura 11a se ve que, elegido el árbol de la figura 10a, el bucle del enlace BG es el $ABGA$. En 11b se ve que el bucle del enlace CD es el $ABCDEFA$. En una red hay, por tanto, l bucles de enlaces no orientados. Una propiedad de esos bucles es que todos ellos tienen distinta, al menos, una rama, concretamente el enlace que les da nombre. Otra propiedad es, que cada rama de una red pertenece, al menos, a un bucle de enlace.

7. Intensidades de Kirchhoff

Una propiedad de las intensidades de las corrientes eléctricas estacionarias es la que se conoce como primera ley de Kirchhoff[25]. Pero esta es una propiedad de muchas otras variables, por ejemplo, de todos los flujos estacionarios de materia o de energía y, en general, de todos los flujos de campos solenoidales[26]. También de otras variables [6]. Por eso es útil obtener e identificar con nitidez los teoremas que derivan exclusivamente de la primera ley de Kirchhoff, sin pensar en un sistema físico concreto. De esta manera se pone de manifiesto que esos teoremas son propiedades de todas las variables que cumplen esa ley, no solo de las intensidades de las corrientes eléctricas estacionarias.

Ese es el fin de este capítulo: obtener propiedades que se deduzcan exclusivamente de la primera ley de Kirchhoff. Así la teoría constituida por esas propiedades resultará independiente de cualquier variable física concreta, sería lo que se llama una teoría abstracta.

7.1. Valores asignados a ramas

Valor asignado a una rama.- *Sea* R *el conjunto de ramas de una red,* G *un grupo conmutativo*[27]*, y* f_R *una aplicación de* R *en* G *tal que* $\forall(\alpha,\beta)\in R$

---

[25] También se llama ley de Kirchhoff de las intensidades o ley de Kirchhoff de las corrientes (Kichhoff's Current Law) [41].

[26] Tradicionalmente se ha venido llamando campos solenoidales a los campos vectoriales de divergencia nula. El paradigma de campo solenoidal es la inducción magnética $\boldsymbol{B}$, que puede ser creada por un solenoide. De ahí el adjetivo solenoidal para los campos vectoriales de divergencia nula [42], [43].

[27] Un grupo conmutativo es un conjunto G en el que se ha definido una operación o ley de composición interna, que será llamada suma, que es asociativa

ocurre que $f_R(\beta,\alpha)=-f_R(\alpha,\beta)$. *Entonces* $f_R(\alpha,\beta)$ *se llama valor asignado a la rama* (α,β).

O sea, si f_R asigna un elemento de G a cada rama de una red de forma que dos ramas opuestas tienen siempre asignados elementos opuestos, esos elementos de G asignados se llaman *valores* asignados a las ramas de la red. Por ejemplo, si a una rama se asigna $y \in G$, a su opuesta ha de asignarse $-y \in G$, y así a todas las ramas de la red. Por simplificar el lenguaje, cada *valor asignado* a una rama, se llamará, simplemente, *valor de esa rama*.

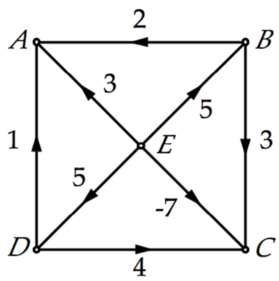

Fig. 1.- Forma de indicar valores asignados a las ramas de una red.

En la figura 1 se muestra una forma de indicar los valores asignados a las ramas en la representación gráfica de una red. En este caso los valores son números reales. El procedimiento consiste en designar por una flecha la rama a la que se ha asignado el valor que se escribe al lado. No hace falta escribir el valor asignado a la rama opuesta, pues, como se

---

y conmutativa, para la que existe en G un elemento neutro y para la que todo elemento de G tiene opuesto [44], [45].

El conjunto de los números reales con la suma ordinaria en ellos es un grupo conmutativo. El conjunto de los números complejos, el de las funciones reales de variable real y el de las funciones complejas de variable real, todos con la suma ordinaria en ellos, son grupos conmutativos.

Los grupos conmutativos se llaman también grupos abelianos.

supone que son valores, se entiende que a la rama opuesta se ha asignado el valor opuesto del que está escrito. Así, como a la rama BA se ha asignado el valor 2, a la rama AB se ha asignado el valor -2; y de la misma forma para el resto de las ramas.

7.2. Intensidades de Kirchhoff

Intensidades de Kirchhoff.- *Un conjunto de valores asignados a las ramas de una red es un conjunto de intensidades de Kirchhoff si la suma de los valores de las ramas que llegan a cada nudo de la red es cero*. Se dice entonces de esos valores que cumplen la *primera ley de Kirchhoff*[28].

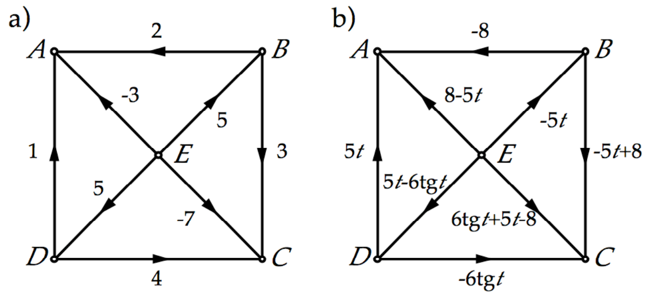

Fig. 2.- Redes de intensidades de Kirchhoff.

Los valores asignados a las ramas de la red de la figura 1 son números reales y no constituyen un conjunto de intensidades de Kirchhoff, pues la suma de los valores de las ramas que llegan al nudo A es $1+3+2=6\neq 0$. Los valores asignados a las ramas de la red de la figura 2a son también números reales y son intensidades de Kirchhoff, pues la suma de los valores de las ramas que llegan a cada nudo es cero. Por

---

[28] La razón de que se exija para los valores que sean elementos de un grupo conmutativo queda ahora clara: han de poder sumarse y su suma debe poder dar como resultado cero –el elemento neutro–. Por tanto, debe haber una suma con elemento neutro definida en el conjunto de valores, y todo valor debe tener su opuesto. Que la suma sea asociativa y conmutativa es también necesario para que los valores describan las variables físicas a las que se aplicará la teoría, principalmente flujos estacionarios, cuya suma es asociativa y conmutativa.

ejemplo, la suma de los valores de las ramas que llegan al nudo A es $1+(-3)+2=0$. La suma de los valores de las ramas que llegan al nudo B es $-2+5+(-3)=0$. Y así para el resto de los nudos.

7.3. Intensidades de Kirchhoff derivadas de otras

Teorema.- *Si cada elemento de un conjunto de intensidades de Kirchhoff del espacio vectorial G sobre el cuerpo K se multiplica por un mismo elemento de K, el conjunto de valores resultante es un conjunto de intensidades de Kirchhoff*[29].

Demostración.- Si $j_1, j_2, \ldots j_m$ son las intensidades de Kirchhoff de las ramas que llegan a un nudo, ocurre que $j_1+j_2+\cdots+j_m=0$. Si cada elemento del conjunto de intensidades se multiplica por $k \in K$, resulta

$$kj_1+kj_2+\cdots+kj_m=k\left(j_1+j_2+\cdots+j_m\right)=k0=0$$

Y el teorema está demostrado.

Otras transformaciones que se pueden efectuar sobre las intensidades de Kirchhoff producen también intensidades de Kirchhoff. Por ejemplo, si las intensidades de Kirchhoff son funciones derivables sus derivadas son intensidades de Kirchhoff.

En general, las transformaciones lineales de los elementos de un conjunto de intensidades de Kirchhoff da lugar a otro conjunto de intensidades de Kirchhoff.

[29] Si G solo es un grupo abeliano no hay definida una multiplicación en él, por lo que el teorema, en ese caso, carece de sentido. Para que el teorema tenga sentido se necesita que el conjunto al que pertenecen las intensidades de Kirchhoff tenga como mínimo estructura de espacio vectorial.

7.4. Redes de intensidades de Kirchhoff

Red de intensidades de Kirchhoff.- *Una red con intensidades de Kirchhoff asignadas a sus ramas se llama red de intensidades de Kirchhoff.*

Los valores asignados a las ramas de la red de la figura 2a son intensidades de Kirchhoff, por lo que esa red es una red de intensidades de Kirchhoff. Los valores asignados a las ramas de la red de la figura 1 no son intensidades de Kirchhoff, por lo que esa red no es una red de intensidades de Kirchhoff.

Los valores asignados a las ramas de la figura 2b son funciones reales de variable real[30]. Esos valores son intensidades de Kirchhoff, pues la suma de los valores de las ramas que llegan a cada nudo es cero. Por ejemplo, la suma de los valores de las ramas que llegan al nudo E es $\left(-8+5t\right)+\left(5t\right)+\left(-6\mathrm{tg}t-5t+8\right)+\left(-5t+6\mathrm{tg}t\right)=0$. Y de la misma forma para el resto de los nudos. Por tanto la red de la figura 2b es una red de intensidades de Kirchhoff.

El concepto de red de intensidades de Kirchhoff aquí definido trata de ser el más amplio posible. Incluye, desde luego, a las redes eléctricas de corrientes estacionarias si a cada rama de esas redes se asigna como valor la intensidad instantánea de esa rama, o las transformadas de Laplace de esas intensidades y, en general, si se asigna a cada rama cualquier transformación lineal de la intensidad instantánea. Si la red eléctrica es sinusoidal,[31] los fasores de sus intensidades y sus conjugados también cumplen la primera ley de Kirchhoff, por lo que esa red con los fasores de las intensidades asignados a sus ramas es una red de intensidades de

[30] Los números complejos y los números reales con la suma ordinaria son subgrupos del grupo conmutativo de las funciones complejas de variable real.

[31] Se llaman redes eléctricas sinusoidales a las redes eléctricas cuyas intensidades y tensiones de régimen permanente son funciones sinusoidales del tiempo de la misma frecuencia.

Kirchhoff. También si se asignan a sus ramas los conjugados de esos fasores resulta otra red de intensidades de Kirchhoff.

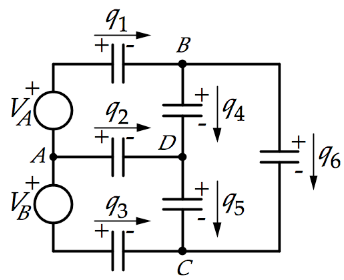

Fig. 3.- Si a cada rama de la red de esta figura se asigna la carga del condensador que está en ella, resulta una red de intensidades de Kirchhoff.

En la figura 3 se muestra una red eléctrica formada solo por condensadores y fuentes de tensión. Si se asigna como valor a cada rama la carga del condensador que forma esa rama, esos valores cumplen la primera ley de Kirchhoff. En efecto, para el nudo A, $-q_1 - q_2 - q_3 = 0$; para el B, $q_1 - q_4 - q_6 = 0$; para el nudo C, $q_3 + q_5 + q_6 = 0$; y para el nudo D, $q_2 + q_4 - q_5 = 0$. Resulta, por tanto, que esos valores, que son cargas eléctricas, son intensidades de Kirchhoff, por lo que la red de la figura 3 es una red de intensidades de Kirchhoff.

Una red hidráulica en régimen estacionario da lugar también a una red de intensidades de Kirchhoff si se asigna como valor a cada rama su caudal[32].

[32] Régimen estacionario significa aquí que la densidad del fluido en cada punto de la red es constante, no cambia con el tiempo, aunque puede ser distinta en puntos distintos. Caudal de una tubería es el volumen de fluido que atraviesa una sección de esa tubería por unidad de tiempo.

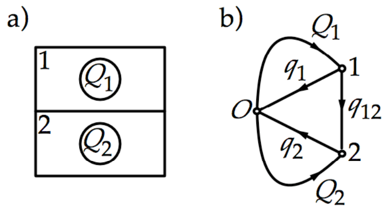

Fig. 4.- a) Vivienda de dos habitaciones con dos fuentes de calor, y b) red de intensidades de Kirchhoff que describe el flujo de potencia calorífica de esa vivienda.

En la figura 4a se muestra una vivienda de dos habitaciones, 1 y 2, separadas por una pared. Otra pared separa del exterior cada habitación. Q_1 y Q_2 son dos bombas de calor de potencia calorífica Q_1 y Q_2 situadas en cada habitación, cuyo efecto es transferir su potencia calorífica desde el exterior a cada habitación[33]. En general también hay flujo de calor a través de las paredes y de la cubierta del edificio, que supondremos aquí incluida en las paredes exteriores. Por eso entre el exterior O y cada recinto hay dos formas de transferencia de calor: a través de cada fuente de calor y a través de las paredes exteriores. Esta es la razón por la que en la red hay dos ramas en paralelo entre el exterior O y cada nudo 1 y 2. Los nudos 1 y 2 de la red representan las habitaciones 1 y 2. Así, entre el nudo O y el 1 se representa una rama a la que se asigna como valor la potencia calorífica Q_1 de la fuente que inyecta calor en la habitación 1, y otra rama a la que se asigna como valor la potencia calorífica q_1 que se intercambia entre la habitación 1 y el exterior a través de la pared. De forma similar entre el exterior O y el nudo 2. La rama conectada entre los nudos 1 y 2 representa la pared que separa esas dos habitaciones. Esa rama tiene asignado como valor la potencia calorífica que fluye a través de esa pared[34]. Con régimen

[33] Realmente cualesquiera fuentes de calor, como estufas eléctricas, de carbón o de gas situadas en los recintos pueden ser descritas por fuentes que transfieren potencia calorífica desde el exterior. Haber citado la bomba de calor es solo un forma de visualizar más claramente esa transferencia desde el exterior.

[34] Una descripción más precisa debería tener en cuenta también el flujo de potencia calorífica a través del suelo. Eso significaría simplemente considerar

estacionario de transferencia de calor, la suma de las potencias caloríficas hacia cada habitación es cero[35]. También la suma de potencias caloríficas hacia el exterior es cero. Por tanto las dos habitaciones y el exterior dan lugar a la red de intensidades de Kirchhoff de la figura 4b. Como se ha dicho, en ella los nudos 1 y 2 representan las habitaciones 1 y 2, y el nudo O representa al exterior. Como ya se dijo, la suma de las potencias caloríficas que llegan al exterior, o sea, al nudo O, es también cero, o sea, $q_1 + q_2 - Q_1 - Q_2 = 0$; lo mismo para el nudo 1, $Q_1 - q_1 - q_{12} = 0$, y para el nudo 2, $Q_2 + q_{12} - q_2 = 0$. Es decir, los valores asignados a las ramas de la red de la figura 4b cumplen la primera ley de Kirchhoff, por lo que constituyen un conjunto de intensidades de Kirchhoff, y la red es una red de intensidades de Kirchhoff [6].

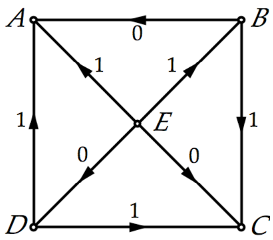

Fig. 5.- Red de intensidades de Kirchhoff con valores del grupo $\{0,1\}$ con la operación $(1+0=0+1=1; \quad 0+0=0; \quad 1+1=0)$.

---

otro nudo y las ramas que lo unen con los nudos 1 y 2, que representan los dos recintos del edificio. La descripción hecha es buena para la hipótesis de que no exista transferencia de calor a través del suelo de la vivienda.

[35] Régimen estacionario de transferencia de calor significa aquí que no hay ningún punto del edificio, es decir, de las habitaciones ni de las paredes, en el que aumente o disminuya la densidad de energía. Eso quiere decir que la temperatura de cada habitación, del exterior y de cada punto de las paredes es constante; pero también significa que no existen en el edificio procesos o transformaciones químicas o físicas que, a temperatura constante, almacenen o entreguen energía, como cambios de estado, por ejemplo.

Pero el concepto de red de intensidades de Kirchhoff es mucho más amplio aún, pues incluye redes con valores asignados a sus ramas que pueden ser elementos de cualquier grupo conmutativo, aunque no se refieran a ninguna variable física, siempre que esos valores asignados sean intensidades de Kirchhoff. Por ejemplo, los valores asignados a las ramas de la red de la figura 5 son elementos del conjunto $\{0,1\}$, en el que se ha definido la siguiente suma: $(1+0=0+1=1; \quad 0+0=0; \quad 1+1=0)$, que es asociativa y conmutativa; el elemento neutro es el 0, y los dos elementos tienen opuesto (0 es el opuesto de 0 y 1 es el opuesto de 1). Los valores de ese grupo conmutativo asignados a las ramas de la red de la figura 5 son intensidades de Kirchhoff, pues la suma de los valores de las ramas que llegan a cada nudo es 0. Por ejemplo, la suma de los valores de las ramas que llegan al nudo A es $1+1+0=0$; la suma de las que llegan a B es $(-0)+1+(-1)=0+1+1=0$ [36]; y de la misma forma para el resto de los nudos [6]. Por tanto, también los valores de las ramas de la red de la figura 5 son intensidades de Kirchhoff[37] y la red es una red de intensidades de Kirchhoff.

Con frecuencia, en lo que sigue, por simplificar el lenguaje, se llamará simplemente 'intensidades' a las intensidades de Kirchhoff.

Por tanto, si es i_h, $h=1,2,...,n$, la intensidad de cada una de las n ramas que llegan a un nudo de una red de intensidades de Kirchhoff, se cumple que

$$\sum_{h=1}^{n} i_h = 0 \tag{1}$$

[36] Recuérdese que el opuesto de 0 (cero) es cero, o sea, $-0=0$; y el opuesto de 1 es 1, o sea, $-1=1$.

[37] El concepto de intensidad de Kirchhoff aparece por primera vez en las referencias [1], [2] y [6].

(1) significa que *la suma de las intensidades de las ramas que llegan a cada nudo de una red de intensidades de Kirchhoff es cero*. Esta es la forma habitual de enunciar la primera ley de Kirchhoff.

De (1) se deduce que también se cumple que

$$\sum_{h=1}^{n}\left(-i_h\right)=0 \tag{2}$$

donde las $-i_h$, $h=1,2,\dots,n$, son las intensidades de las ramas que salen del nudo, es decir, las intensidades opuestas de las intensidades de la fórmula (1)[38]. La fórmula (2) significa, por tanto, que *la suma de las intensidades que salen de cada nudo de una red de intensidades de Kirchhoff es cero*, que es otra forma de expresar la primera ley de Kirchhoff.

---

[38] En efecto, supóngase que para m elementos a_1, $a_2,\dots,$ a_m de un grupo conmutativo ocurre que $a_1+a_2+\cdots+a_m=0$. Si a esa igualdad se suma la suma de los elementos $-a_1$, $-a_2,\dots,$ $-a_m$, que son los opuestos de los anteriores resulta:

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_m\right)+\left(-a_1-a_2-\cdots-a_m\right)=\left(a_1-a_1\right)+\left(a_2-a_2\right)+\cdots+\left(a_m-a_m\right)=$$

$$=0+0+\cdots+0=0$$

O sea,

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_m\right)+\left(-a_1-a_2-\cdots-a_m\right)=0+\left(-a_1-a_2-\cdots-a_m\right)=0;$$

lo que significa que el elemento suma $\left(-a_1-a_2-\cdots-a_m\right)$ es el elemento opuesto de cero, que es cero. Es decir,

$$-a_1-a_2-\cdots-a_m=0.$$

Nótese que multiplicar por -1 (menos uno) la ecuación (1) para obtener la (2) carece de sentido, pues en el grupo G solo está definida una operación, que es la suma; no hay ninguna multiplicación definida en G. Multiplicar por -1 solo es posible si la estructura algebraica de G fuera otra, por ejemplo, espacio vectorial.

7.5. Propiedades de las redes de intensidades de Kirchhoff

Si a un nudo de una red de Kirchhoff solo llega una rama, la intensidad de Kirchhoff de esa rama es cero. Por tanto, también es cero la intensidad de su rama opuesta.

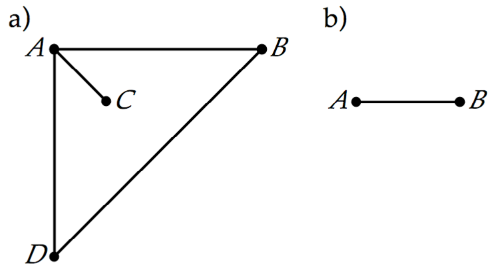

Fig. 6.- a) Al nudo C solo llega la rama AC. b) Representación de una rama aislada.

En efecto, si la figura 6a representa una red de intensidades de Kirchhoff, la suma de las intensidades de las ramas que llegan a cada nudo es cero. Al nudo C llega solo la rama AC; por tanto, $i_{AC} = 0$; e $i_{CA} = -i_{AC} = 0$.

Una consecuencia de lo anterior es que *si una red de Kirchhoff consiste solo en una rama aislada su intensidad vale cero*.

En efecto, si la red de la figura 6b es una red de Kirchhoff, como al nudo A solo llega la rama BA, por el teorema anterior $i_{BA} = 0$, e $i_{AB} = -i_{BA} = 0$.

Este hecho suele expresarse diciendo que *la intensidad de Kirchhoff de una rama aislada es siempre cero*. En particular, la intensidad de corriente eléctrica estacionaria de toda rama aislada es cero, con independencia de los dispositivos de que conste esa rama.

<u>Intensidad de Kirchhoff de ramas en serie</u>.- *Las intensidades de Kirchhoff de dos ramas en serie de una red de Kirchhoff son iguales.*

En efecto, que las ramas AB y BC de una red de Kirchhoff están en serie, significa que al nudo B solo llegan las ramas AB y CB, por lo que la suma de sus intensidades es cero:

$$i_{AB} + i_{CB} = i_{AB} - i_{BC} = 0 \tag{3}$$

de donde

$$i_{AB} = i_{BC} \tag{4}$$

Si otra tercera rama está en serie con la segunda, tiene su misma intensidad, y así sucesivamente. Por tanto, si m ramas están en serie, tienen la misma intensidad.

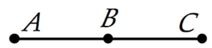

Fig. 7.- Ramas en serie de una red de intensidades de Kirchhoff.

Nótese la necesidad de considerar ramas orientadas para la correcta definición de 'ramas en serie', y para la deducción de (4), que solo es cierta si se consideran ramas orientadas. En concreto, las intensidades de las ramas AB y CB no son iguales, sino opuestas[39].

[39] Es frecuente hablar de intensidades de ramas sin aclarar si se trata de ramas orientadas o no. Esta forma de expresarse es el origen de importantes dificultades de comprensión, principalmente en quienes se inician en el conocimiento de las redes eléctricas, pues no existe un valor (número real, complejo, etc.), salvo el cero, que sea intensidad de una rama no orientada, sino que existen dos valores para cada rama no orientada: un valor y su opuesto. Saber cuál de los dos hay que utilizar en cada caso no queda aclarado por expresiones como la 'intensidad de esta rama es...' o parecidas si el concepto de rama que se emplea es el de rama no orientada. Esta ambigüedad provoca una considerable confusión en relación con los 'sentidos' de las intensidades, confusión que también se produce con las tensiones, como se comentará después. Esta confusión desaparece si se asume con claridad que cada intensidad está asignada a una rama orientada. Y que la flecha colocada en cada rama no orientada indica la rama orientada a la que se asigna la intensidad que se escribe

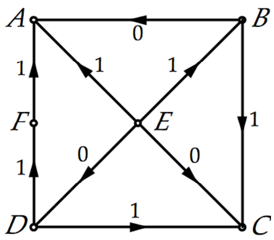

Fig. 8.- También en la red de la figura, en la que las intensidades de Kirchhoff son elementos del grupo $\{0,1\}$ definido anteriormente, dos ramas en serie tienen la misma intensidad.

Por tanto, que dos o más ramas en serie tengan la misma intensidad, no es una propiedad exclusiva de las redes eléctricas, sino de todas las redes de intensidades de Kirchhoff. También de la red de la figura 8. En efecto, en ella las ramas DF y FA que están en serie, tienen la misma intensidad, de valor 1. Como sus opuestas AF y FD también están en serie, tienen las dos la misma intensidad, de valor $-1=1$.

Teorema de las intensidades de un conjunto de corte.- *La suma de las intensidades de las ramas de cada conjunto de corte de una red de Kirchhoff es cero.*

Demostración.- La suma de las intensidades de las ramas que llegan a cada nudo de una red de Kirchhoff es cero. Por tanto, si se suman las intensidades de las ramas que llegan a m nudos, el resultado de esa suma es cero.

Por otra parte, si una rama no orientada de la red une dos cualesquiera de esos m nudos, tal como el A y el B, en la suma de las intensidades de las ramas que llegan al nudo A aparece como sumando la intensidad i_{BA}, y en la suma de las intensidades de las ramas que llegan al nudo B aparece como sumando $i_{AB}=-i_{BA}$. Por tanto, en la suma de las intensidades que llegan a todos los m nudos aparecen como sumandos

a su lado. No obstante, la confusión de los sentidos suele ser más acusada para las tensiones que para las intensidades, pero la forma de eliminarla es idéntica en ambos casos, por eso se insiste en ella también en el caso de las intensidades.

$i_{BA} + i_{AB} = i_{BA} - i_{BA} = 0$. Al ser nula esa suma, no aparecen como sumandos la intensidad i_{AB} ni su opuesta. Y así para todas las intensidades de las ramas que unen dos cualesquiera de los m nudos. De manera que la suma de las intensidades que llegan a un conjunto de nudos se reduce a la suma de las intensidades de *las ramas que llegan a esos nudos, excluidas todas las que unen dos de ellos*. La expresión en cursiva es la definición de conjunto de corte del conjunto de los m nudos. Por tanto, la suma de todas las intensidades de las ramas que llegan a cualquier conjunto de nudos, que es cero, coincide con la suma de las intensidades de las ramas de su conjunto de corte. O sea, *la suma de las intensidades de todo conjunto de corte de una red de Kirchhoff es cero.*

La ecuación que se obtiene de la suma de las intensidades de un conjunto de corte coincide con la suma de las ecuaciones que se obtienen al aplicar la primera ley de Kirchhoff a los nudos de ese conjunto de corte. Por tanto, *la ecuación del conjunto de corte es combinación lineal de las de esos nudos*.

Una consecuencia de lo anterior es que, para comprobar si una red con valores asignados a sus ramas es o no una red de intensidades de Kirchhoff, basta con comprobar que se cumple la primera ley de Kirchhoff en todos los nudos menos uno, ya que las ramas que parten del último nudo son el conjunto de corte de todos los demás. Por tanto, si la primera ley de Kirchhoff se cumple en los $n = n_t - 1$ nudos primeros, también se cumple en el último.

Ejemplo.

En la figura 8, las ecuaciones que se obtienen de aplicar la primera ley de Kirchhoff a los nudos A y B son

$$i_{BA} + i_{EA} + i_{FA} = 0$$

$$i_{AB} + i_{EB} + i_{CB} = 0$$

La suma de las dos ecuaciones es

$$i_{EA} + i_{FA} + i_{EB} + i_{CB} = 0$$

Que es la suma de las intensidades de las ramas del conjunto de corte de los nudos A y B. Al sumar se ha tenido en cuenta que $i_{BA} = -i_{AB}$.

Como en la red de la figura 3 las ramas 1, 2 y 3 forman un conjunto de corte de la red, la suma de sus intensidades de Kirchhoff es cero: $q_1 + q_2 + q_3 = 0$.

Como en la red de la figura 4b las ramas que unen el nudo O con los nudos 1 y 2 son también un conjunto de corte, la suma de sus intensidades de Kirchhoff es cero: $Q_1 + Q_2 - q_1 - q_2 = 0$.

Los enunciados '*la suma de las intensidades de las ramas de cada conjunto de corte es cero*' y '*la suma de las intensidades de las ramas que llegan a cada nudo es cero*' son equivalentes. En efecto, si se cumple el primer enunciado, se cumple el segundo, pues el conjunto de corte de un nudo es el conjunto de ramas que llegan a ese nudo. Si se cumple el segundo enunciado, ya se ha demostrado arriba que se cumple el primero. Por tanto, los dos enunciados son equivalentes. De hecho pueden ser considerados como dos formas de expresar la primera ley de Kirchhoff.

7.6. Número máximo de ecuaciones independientes de una red de intensidades de Kirchhoff

Como máximo, el número de ecuaciones independientes que relacionan las intensidades de las ramas de una red de intensidades de Kirchhoff es el número de nudos de la red menos uno: $n = n_t - 1$.

En efecto, el número de intensidades de una red de intensidades de Kirchhoff es $2r$, tantas como ramas orientadas tiene la red. Pero de ellas basta conocer las r intensidades de un conjunto básico de ramas orientadas de la red[40], pues las intensidades del resto de las ramas son opuestas de las de ese conjunto básico de ramas orientadas. Nos referiremos a las intensidades de las ramas de un conjunto básico de ramas orientadas de la red como las r intensidades de la red. Conociendo esas r intensidades están conocidas todas las intensidades de la red.

Pero entre las r intensidades de una red de intensidades de Kirchhoff existen las relaciones establecidas por la primera ley de Kirchhoff, es decir, que la suma de las intensidades que llegan a cada nudo es cero. De escribir esa ley para cada nudo se obtienen n_t ecuaciones. Sin embargo, como ya se vio, la ecuación que se obtiene del último nudo es combinación lineal de las anteriores. Por tanto, a lo sumo, de las n_t ecuaciones, solo $n = n_t - 1$ son independientes[41].

Pero, además, todas esas $n = n_t - 1$ ecuaciones son independientes, pues al aplicar la primera ley de Kirchhoff a cada nudo que no sea el último, siempre aparece, al menos, una rama nueva, que es la rama que une ese nudo con los siguientes. Eso no ocurre en el último nudo, en el que todas las ramas que llegan a él ya han sido consideradas en los anteriores nudos.

---

[40] Recuérdese que en un conjunto básico de ramas orientadas está solo una rama orientada de cada rama no orientada. Por ejemplo, si está la rama (α, β) no está la rama (β, α). Pero es suficiente conocer la intensidad de una rama orientada para conocer también la intensidad de su rama opuesta.

[41] También se pueden obtener ecuaciones de aplicar el teorema de las intensidades de los conjuntos de corte a todos los conjuntos de corte de una red, pero, como se vio, esas ecuaciones son combinaciones lineales de las ecuaciones que se obtienen de los nudos, por lo que no son independientes de las ecuaciones de los nudos.

7.7. Intensidades de las ramas de un árbol de una red de intensidades de Kirchhoff

Las intensidades de las ramas de cada árbol de una red de intensidades de Kirchhoff pueden ser escritas en función solo de las intensidades de los enlaces de ese árbol.

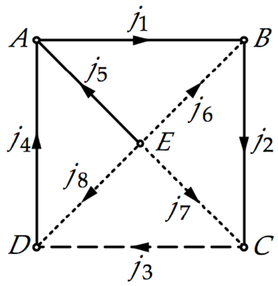

Fig. 9.- La intensidad de cada rama del árbol puede ser escrita solo en función de las intensidades de sus enlaces.

En efecto, fijado un árbol de una red y un conjunto básico de ramas orientadas en él (las indicadas por las flechas en la figura fig. 9), si se aplica la primera ley de Kirchhoff a cada nudo que sea extremo de ese árbol y se despeja la intensidad de la única rama del árbol que aparece en cada ecuación, la intensidad de esa rama del árbol ha quedado en función solo de intensidades de enlaces. En la figura 9 $j_4 = j_3 + j_8$; $j_5 = -j_6 - j_7 - j_8$; $j_2 = j_3 - j_7$. A partir de cada extremo del árbol se va aplicando la primera ley de Kirchhoff a los nudos siguientes. En la figura 9, para el nudo A, $j_1 = j_4 + j_5 = (j_3 + j_8) + (-j_6 - j_7 - j_8) = j_3 - j_6 - j_7$. La ecuación que resulta de aplicar la primera ley de Kirchhoff al nudo último, el B en la figura 9, es combinación lineal de las anteriores, lo que se manifiesta porque todas las intensidades de las ramas del árbol han sido ya puestas en función de las intensidades de los enlaces sin necesidad de esa ecuación. No obstante, se puede utilizar el nudo B en vez de el nudo A para hallar j_1, con el mismo resultado: $j_1 = j_2 - j_6 = (j_3 - j_7) - j_6$.

Por tanto, las intensidades de las ramas de un árbol pueden deducirse de las intensidades de sus enlaces. Ese hecho se expresa diciendo que las intensidades de las ramas de cada árbol dependen de las intensidades de sus enlaces.

Otra afirmación consecuencia de lo anterior es que *todas las intensidades de las ramas de una red de intensidades de Kirchhoff pueden escribirse en función solo de las intensidades de los enlaces de un árbol.*

7.8. Intensidades de bucle

Intensidad de bucle.- *Sea B el conjunto de todos los bucles de una red. Si f_B es una aplicación de B en un grupo conmutativo G tal que $f_B(-b) = -f_B(b)$ $\forall b \in B$, entonces $f_B(b)$ se llama intensidad del bucle b.*

f_B asigna un elemento cualquiera de G a cada bucle, con la condición de que si al bucle b ha asignado $y \in G$, al bucle opuesto de b debe asignar $-y \in G$.

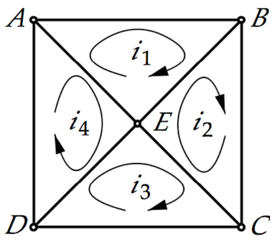

Fig. 10.- Forma de indicar intensidades de bucles.

En la figura 10 se muestra la forma de indicar las intensidades asignadas a los bucles. Las flechas indican el bucle al que se asigna el valor colocado a su lado. Por ejemplo, se ha asignado al bucle $ABEA$ la intensidad de bucle i_1. Se entiende que al bucle opuesto queda asignado el valor opuesto. Ha de entenderse, además, que a los bucles no indicados se ha asignado cero como intensidad de bucle[42]. Por ejemplo, la intensidad del bucle *ABCDA* y de su opuesto es cero.

7.9. Valores asignados a ramas, que derivan de intensidades de bucle

Si un valor asignado a una rama es la suma de las intensidades de todos los bucles de los que esa rama forma parte, se dice que el valor de esa rama deriva de las intensidades de bucle.

Por ejemplo, en la red de la figura 11 todos los valores asignados a las ramas derivan de las intensidades de los bucles. Así, el valor asignado a la rama AB es 1, el asignado a la rama EA es $1-3\mathrm{j}$, el asignado a la rama EC es $-\mathrm{j}-(-5)=5-\mathrm{j}$, y de forma parecida con las demás ramas.

---

[42] Como se verá más adelante, el concepto de intensidad de bucle o intensidad de malla (mallas son los bucles más sencillos de las redes planas) suele ser tratado en la bibliografía con cierta confusión. Eso a pesar de que la función que desempeñan las intensidades de bucle en el análisis de redes es utilizada correctamente y con mucha frecuencia, en concreto cuando se emplea el método de los bucles para analizar redes eléctricas. La razón de la confusión es que se intenta dotar de cierta identidad intuitiva, de cierto significado físico, a las intensidades de bucle, cuando en realidad es un concepto puramente funcional que no representa, como más adelante se verá, una intensidad concreta. Que en esta tesis se haya dado el nombre de intensidad de bucle a lo que se acaba de definir como tal, es solo para seguir una nomenclatura paralela a la nomenclatura de las redes eléctricas [6], pero el concepto de intensidad de bucle es solo el que se ha dicho: un valor (número real, número complejo, función o cualquier elemento de un grupo conmutativo) totalmente arbitrario que se asigna a cada bucle, con la única condición de que a cada bucle se asigne el valor opuesto del valor asignado a su bucle opuesto. Esta es la única condición que ha de exigirse a esos valores para que sean intensidades de Kirchhoff. Por lo demás, se insiste, pueden ser absolutamente arbitrarios.

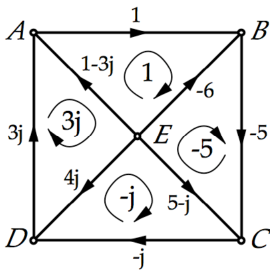

Fig. 11.- Todos los valores asignados a las ramas derivan de las intensidades de bucle.

El valor que se asigna a una rama por este procedimientos es la suma de las intensidades de todos los bucles a los que esa rama pertenece; pero, como los bucles de intensidad cero no aparecen en esa suma, suele decirse que las intensidades de las ramas están escritas en función solo de las intensidades de los bucles cuyas intensidades no son nulas. Así, de los valores asignados a las ramas de la figura 11 se dice que derivan de las intensidades de los bucles indicados.

7.10. Teorema de caracterización de intensidades de Kirchhoff

Teorema de caracterización de intensidades de Kirchhoff.- *Para que un conjunto de valores asignados a las ramas de una red sea un conjunto de intensidades de Kirchhoff es condición necesaria y suficiente que ese conjunto de valores derive de un conjunto de intensidades de bucle* [1], [2], [6].

Demostración.- Supóngase una red de intensidades de Kirchhoff y uno de sus árboles (Fig. 12). Considérense los bucles de los enlaces de ese árbol, y asígnese como intensidad de cada bucle la intensidad de su enlace. Como se vio, todas las intensidades de la red se pueden poner en función de las intensidades de los enlaces, que ahora son intensidades de los bucles, por lo que queda demostrado que las intensidades de toda red de Kirchhoff derivan de un conjunto de intensidades de bucle.

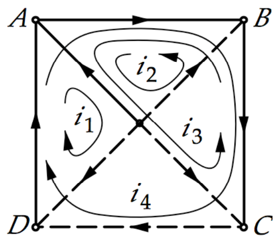

Fig. 12.- Las intensidades de una red de intensidades de Kirchhoff derivan de las intensidades de los enlaces de cualquiera de sus árboles.

Supóngase ahora que los valores que se asignan a las ramas de una red se hacen derivar de un conjunto de intensidades de bucle. Considérense todas las ramas que confluyen en un nudo de esa red tal como el A (fig. 13). Si la rama BA pertenece a un bucle de intensidad i, existe un nudo C tal que la rama CA, que también confluye en A, pertenece al bucle opuesto, por lo que la intensidad i_{BA} contiene a i como sumando e i_{CA} contiene a $-i$ como sumando. Y así para todas las ramas que confluyen en el nudo A y los bucles que les afecten. O sea, cada intensidad de bucle interviene en una rama que confluye en un nudo con signo positivo, y en otra que también confluye en ese nudo con signo negativo, de forma que, al sumar todas las intensidades de las ramas del nudo, el resultado es cero. Por tanto, si se asignan a las ramas los valores que se obtienen como suma de las intensidades de los bucles a que pertenecen, esos valores cumplen la primera ley de Kirchhoff, con lo que el teorema queda demostrado.

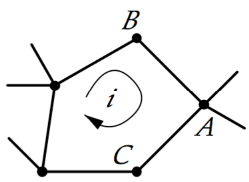

Fig. 13.- i_{BA} contiene a i; i_{CA} a $-i$. Al sumar $i_{BA} + i_{CA}$ se anula la contribución de la intensidad i. Así para el resto de las intensidades de bucle.

En la figura 14 se muestran dos ejemplos: en 14a se han asignado intensidades distintas de cero a los bucles que se indican –y, por tanto, las intensidades opuestas a los bucles opuestos–, y al resto, por ejemplo al

ADCEA o al *ABCDA*, intensidades nulas. Los valores asignados a las ramas de 14b derivan de estas intensidades de bucle. Se puede comprobar que esos valores cumplen la primera ley de Kirchhoff. En 14c se han asignado números complejos[43] arbitrarios distintos de cero como intensidades de algunos bucles y, por tanto, intensidades opuestas a sus opuestos. Las intensidades del resto de los bucles son cero. Los valores asignados a las ramas de la red 14d derivan de esas intensidades de bucle. Puede comprobarse que esos valores también cumplen la primera ley de Kirchhoff.

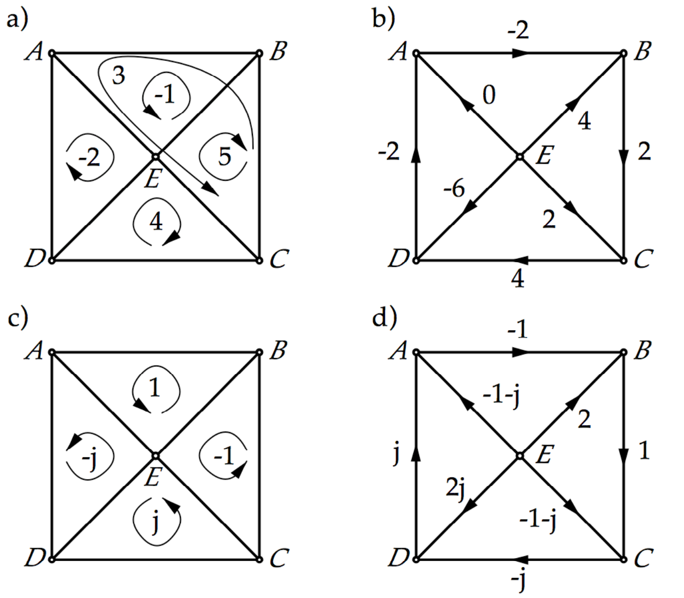

Fig. 14.- Las intensidades de las ramas de b) derivan de las de los bucles de a), y las de d) de las intensidades de malla de c).

Una consecuencia de este teorema es que, en general, para cada red de intensidades de Kirchhoff existen diferentes conjuntos de intensidades de bucle de los cuales derivan las intensidades de las ramas. En concreto, de cada red de intensidades de Kirchhoff se pueden obtener, en general, diferentes árboles y, por tanto, diferentes conjuntos de enlaces. Fijado un árbol, todas las intensidades de las ramas de la red pueden derivarse de

[43] En Electricidad la unidad imaginaria no se suele designar con la letra i, como es habitual en matemáticas, sino con la letra j (jota minúscula).

las intensidades de los bucles de los enlaces de ese árbol. Pero, si se elige otro árbol, las intensidades de las ramas de la red pueden también ser escritas en función de las intensidades de los bucles de los enlaces del nuevo árbol. Y así para cada árbol. Por tanto, *para cada conjunto de intensidades de las ramas de una red de intensidades de Kirchhoff existen, en general, más de un conjunto de intensidades de bucle de los que derivan las intensidades de sus ramas*[44].

[44] Es conveniente insistir en el papel puramente funcional o auxiliar que desempeñan las intensidades de los bucles, como ha quedado puesto de manifiesto. A pesar de ello, en algunos textos parece que se les atribuye cierta realidad física, como cuando se dice "Estas corrientes de bucle circulan por los contornos..." [19], o cuando se dan definiciones del estilo "**Mesh Current** The current that flows around the periphery of a mesh; the current that flows through the elements constituting the mesh" [22]. Nótese que ninguna de las definiciones del último entrecomillado se corresponde con lo que en esta tesis ni en la práctica del análisis de redes se entiende por intensidad de bucle, pues, en general, una intensidad de bucle no "circula" por ninguna de las ramas que forman el bucle.

El diccionario de IEEE parece también atribuir cierta realidad física a las intensidades de bucle, que define así: "**mesh current** A current assumed to exist over all cross sections of a given closed path in a network" [32]. No obstante, en este caso, la expresión "...assumed to exist..." parece querer expresar una prudente ambigüedad en relación con la existencia de esa corriente. Se recuerda que este diccionario identifica de hecho, como ya se dijo, los significados de *mesh* y *loop*, malla y bucle.

8. Tensiones de Kirchhoff

La segunda ley de Kirchhoff[45] es tenida por una ley propia de las tensiones eléctricas, si no exclusiva de ellas. En gran parte de la bibliografía se la considera una consecuencia del Principio de Conservación de la Energía aplicado a las redes eléctricas [22], [30]. Sin embargo, como ocurría con la primera ley de Kirchhoff, muchos otros conjuntos de variables que no son tensiones eléctricas y que no están relacionados con la energía cumplen la segunda ley de Kirchhoff. Por eso, de la misma forma que se hizo con la primera ley de Kirchhoff, se intentará ahora deducir todas las propiedades que derivan exclusivamente de la segunda ley sin pensar en ninguna variable física concreta. De esta manera se dotará a la teoría que surge de la segunda ley de Kirchhoff del grado de abstracción necesario para contribuir a identificar otras variables distintas de las tensiones eléctricas que también cumplen la segunda ley de Kirchhoff.

8.1. Tensiones de Kirchhoff

<u>Valor asignado a un par de nudos</u>.- *Sea N un conjunto a cuyos elementos llamaremos nudos. Sea G un grupo conmutativo, y f_P una aplicación de $N^2 = N \times N$ en G tal que $\forall (A,B) \in N^2$ ocurre que $f_P(B,A) = -f_P(A,B)$ y que $f_P(A,A) = 0$. Entonces $f_P(A,B)$ se llama valor asignado al par de nudos (A,B).*

---

[45] La segunda ley de Kirchhoff se llama también ley de Kirchhoff de las tensiones (Kirchhoff's Voltage Law) [41].

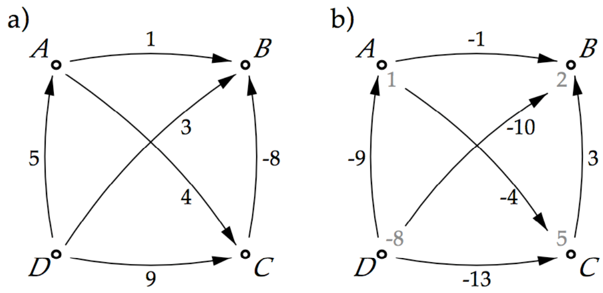

Fig. 1.- Forma de indicar valores asignados a pares de nudos.

Es decir, f_p asigna un elemento del grupo conmutativo G a cada par de nudos, de forma que si al par (A,B) asigna el elemento y, al par (B,A) asigna $-y$ (menos y); además, a los pares de nudos de componentes iguales asigna el cero. Con esas condiciones, el conjunto de los elementos de G asignados se llama *conjunto de valores asignados a los pares de nudos*. En la figura 1a se muestra una forma de indicar valores asignados a pares de nudos: las flechas indican a qué par de nudos se asigna el valor que se coloca a su lado. Por ejemplo, el valor 1 se asigna al par de nudos (A,B); aunque no se indique, se entiende que al par (B,A) queda asignado el valor -1 (menos uno). Y así para el resto de pares.

Para simplificar el lenguaje, llamaremos simplemente *valor* de un par de nudos al valor asignado a ese par de nudos.

<u>Tensiones de Kirchhoff</u>.- *Un conjunto de valores asignados a un conjunto N^2 de pares de nudos se llama conjunto de tensiones de Kirchhoff si la suma de los valores de los pares de nudos de cada camino cerrado de N^2 es cero.*

Por ejemplo, los valores de los pares de nudos de la figura 1a, que son elementos del grupo de los números reales con la suma ordinaria, no son tensiones de Kirchhoff, pues la suma de los valores de los pares de nudos del camino cerrado $ABDA$, es decir, de los pares (A,B), (B,D) y (D,A) no suman cero: $(1)+(-3)+(5)=3\neq 0$. Los valores de los pares de nudos de la figura 1b, que también son números reales, sí son tensiones de Kirchhoff, pues la suma de los valores de los pares de nudos que forman cada camino cerrado es cero[46]. Así, la suma de los valores de los pares de nudos del camino cerrado $ABDA$ es $(-1)-(-10)+(-9)=0$, y el mismo resultado para todos los demás caminos cerrados que pueden formarse con el conjunto de nudos considerado, $\{A,B,C,D\}$.

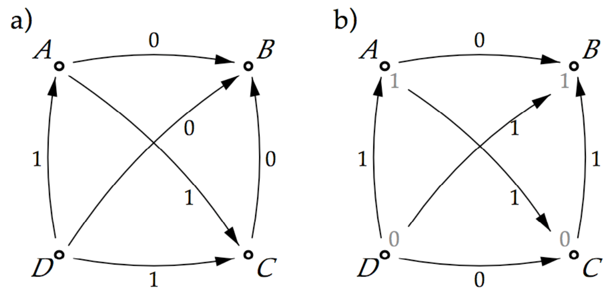

Fig. 2.- Valores del grupo conmutativo $\{0,1\}$ con la operación $(1+0=0+1=1;\quad 0+0=0;\quad 1+1=0)$ asignados a los pares de nudos. La figura 2a no es una red de tensiones de Kirchhoff; la 2b sí lo es.

En la figura 2 se han asignado como valores a los pares de nudos elementos del grupo conmutativo $\{0,1\}$ con la suma conmutativa $(1+0=0+1=1;\quad 0+0=0;\quad 1+1=0)$. Los valores asignados en la figura 2a no son tensiones de Kirchhoff, pues la suma de los valores de los pares de nudos del camino cerrado $ABDA$ es $0+0+1=1\neq 0$. Los valores asignados en la figura 2b sí son tensiones de Kirchhoff, pues la suma de los valores de los pares de nudos de cada camino cerrado es cero. Por ejemplo, la suma de los valores de los pares de nudos del camino cerrado $ABDA$ es $0+1+1=0$; y el mismo resultado se obtiene para todos los

[46] Como se vio en el capítulo anterior, si la suma de un conjunto de elementos de un grupo conmutativo G es cero, también lo es la suma de los opuestos de esos elementos. Eso implica que si se comprueba que la suma de los valores de los pares de un camino cerrado es cero, también es cero la suma de los valores de los pares del camino cerrado opuesto. Por eso, para comprobar que un conjunto de valores cumple la segunda ley de Kirchhoff, no es necesario comprobarlo en cada bucle y su opuesto, sino solo en uno de los dos.

demás caminos cerrados que se pueden formar con el conjunto de nudos $\{A,B,C,D\}$.

En lo que sigue, por simplificar el lenguaje, con frecuencia se llamarán simplemente ‘tensiones’ a las tensiones de Kirchhoff.

Teorema.- *Si cada elemento de un conjunto de tensiones de Kirchhoff del espacio vectorial G sobre el cuerpo K se multiplica por el mismo elemento de K, el conjunto de valores resultante es un conjunto de tensiones de Kirchhoff.*

Demostración.- Si $u_1, u_2, \ldots, u_m$ son sendas tensiones de Kirchhoff de los pares de nudos de un camino cerrado, ocurre que $u_1 + u_2 + \cdots + u_m = 0$. Si cada elemento del conjunto de tensiones se multiplica por $k \in K$, resulta

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_m = k\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_m\right) = k0 = 0$$

Y el teorema está demostrado.

Otras transformaciones que se pueden efectuar sobre las tensiones de Kirchhoff producen también tensiones de Kirchhoff. Por ejemplo, si las tensiones de Kirchhoff son funciones derivables sus derivadas son tensiones de Kirchhoff.

En general, como ocurre con las intensidades de Kirchhoff, transformaciones lineales de los elementos de un conjunto de tensiones de Kirchhoff dan lugar a otro conjunto de tensiones de Kirchhoff.

8.2. Red de tensiones de Kirchhoff

Red de tensiones de Kirchhoff.- *Un conjunto de nudos con tensiones de Kirchhoff asignadas a sus pares de nudos se llama red de tensiones de Kirchhoff*[47].

---

[47] A pesar de que en este capítulo no se ha hablado de ninguna red y sí solo de un conjunto de nudos, todo conjunto de los nudos origina su red canónica (ver las figuras 1 y 2), por lo que no hay inconveniente en dar el nombre de red

Los conjuntos de nudos de las figuras 1b y 2b con los valores asignados a sus pares de nudos son redes de tensiones de Kirchhoff.

Por tanto, si $v_h, h = 1, 2, \ldots n$ son las tensiones de los pares de nudos de un camino cerrado de una red de tensiones de Kirchhoff, se cumple que

$$\sum_{h=1}^{n} v_h = 0 \qquad (1)$$

La fórmula (1) significa que *la suma de las tensiones de los pares de nudos que forman cada camino cerrado de una red de tensiones de Kirchhoff es cero*. Esta es la forma habitual de enunciar la segunda ley de Kirchhoff, aunque, en la bibliografía esta ley suele ser atribuida solo a las redes eléctricas[48].

<u>Teorema de la tensión entre dos puntos</u>.- *La tensión del par de nudos (A,B) de una red de tensiones de Kirchhoff es la suma de las tensiones de los pares de nudos de cualquier camino de pares nudos de la red cuyos extremos sean A y B.*

<u>Demostración</u>.- El camino formado por los pares de nudos (A,C_1), $(C_1,C_2),\ldots,(C_n,B)$ de una red de tensiones de Kirchhoff tiene por extremos A y B, y se cumple que la suma de las tensiones del camino cerrado $AC_1C_2\ldots C_nBA$ es cero:

$$v_{AC_1} + v_{C_1C_2} + \cdots + v_{C_nB} + v_{BA} = 0$$

---

de tensiones de Kirchhoff a un conjunto de nudos con tensiones de Kirchhoff asignadas a sus pares ordenados.

[48] Y a veces con enunciados confusos: "En cualquier malla cerrada formada por elementos de circuito, fuentes de voltaje o ambas, la suma algebraica de las tensiones de excitación alrededor de la malla es igual a la suma algebraica de las caídas de voltaje a través de los elementos de la malla, considerando todos los voltajes en el mismo instante de tiempo" [60].

Si se despeja v_{BA} se obtiene:

$$v_{AB} = -v_{BA} = v_{AC_1} + v_{C_1C_2} + \cdots + v_{C_nB}$$

Con lo que el teorema está demostrado: la tensión v_{AB} es la suma de las tensiones de los pares de nudos de cualquier camino de nudos de extremos A y B.

Por ejemplo, en la red de tensiones de Kirchhoff de la figura 2b, recordando que para los valores allí asignados el opuesto de 1 es 1, la tensión v_{AD}, que es 1, coincide con $v_{AB} + v_{BC} + v_{CD} = 0 + 1 + 0 = 1 = v_{AD}$. También $v_{AB} + v_{BD} = 0 + 1 = 1 = v_{AD}$, ó $v_{AC} + v_{CD} = 1 + 0 = 1 = v_{AD}$.

8.3. Potenciales de Kirchhoff

<u>Potencial de Kirchhoff</u>.- *Sea N un conjunto a cuyos elementos llamaremos nudos. Se llama potencial de Kirchhoff del nudo $A \in N$ a $f_N(A)$, donde f_N es una aplicación de N en un grupo conmutativo G.*

Es decir, f_N asigna un elemento cualquiera de G a cada nudo. El elemento asignado a cada nudo se llama *potencial de Kirchhoff* de ese nudo. A veces, los potenciales de Kirchhoff serán llamados, simplemente, *potenciales*, *potenciales de nudo*, o *valores asignados a los nudos*.

<u>Valores de pares de nudos que derivan de potenciales de nudo</u>.- *Si un valor asignado a un par ordenado de nudos es la diferencia entre los potenciales del primero y segundo nudos del par, se dice que el valor de ese par deriva de los potenciales de sus nudos.*

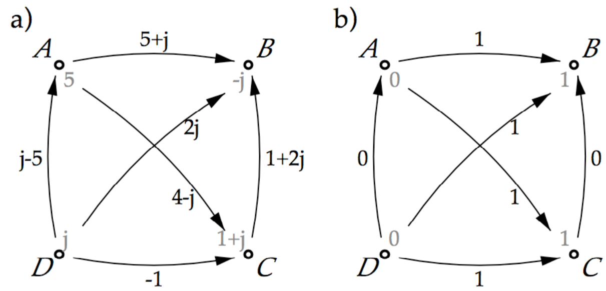

Fig. 3.- Valores asignados a los pares de nudos (en negro) que derivan de potenciales de nudo (en gris).

Por ejemplo, los valores asignados a los pares de nudos de la figura 3a derivan de los potenciales de los nudos que se indican, que son elementos del grupo de los números complejos con la suma ordinaria. Los valores asignados a los pares de nudos de la figura 3b derivan de los potenciales de los nudos que también se indican, que hora son elementos del grupo $\{0,1\}$ con la suma ya definida.

8.4. Teorema de caracterización de tensiones de Kirchhoff

<u>Teorema de caracterización de tensiones de Kirchhoff</u>.- *Para que un conjunto de valores asignados a los pares de nudos de un conjunto N sean tensiones de Kirchhoff es condición necesaria y suficiente que deriven de un conjunto de potenciales de sus nudo*s [1], [2], [6].

<u>Demostración</u>.- Si los valores asignados a los pares de nudos son tensiones, para cualquier camino cerrado de nudos $A_1A_2...A_nA_1$ se cumple que la suma de las tensiones de todos los pares de nudos de ese camino cerrado es cero:

$$y_{A_1A_2} + y_{A_2A_3} + ... + y_{A_{n-1}A_n} + y_{A_nA_1} = 0$$

$y_{A_1A_2}$ es la tensión del par de nudos (A_1, A_2). Asignemos un potencial a cada nudo de la siguiente manera: al nudo A_1 un potencial cualquiera, por ejemplo v_{A_1}; y, $\forall h \neq 1$, al nudo A_h el potencial $v_{A_h} = v_{A_1} + y_{A_hA_1}$. O sea,

$y_{A_hA_1} = v_{A_h} - v_{A_1}$, y también $y_{A_1A_h} = -\left(v_{A_h} - v_{A_1}\right)$. Utilizando estas dos igualdades, la tensión $y_{A_hA_k}$ del par de nudos $\left(A_h, A_K\right)$ resulta:

$$y_{A_hA_k} = y_{A_hA_1} + y_{A_1A_k} = \left(v_{A_h} - v_{A_1}\right) - \left(v_{A_k} - v_{A_1}\right) = v_{A_h} - v_{A_k}$$

Queda demostrado, por tanto, que para cualquier conjunto de tensiones existe un conjunto de potenciales de los nudos de los que esas tensiones derivan.

Recíprocamente, si el valor asignado a cada par de nudos tal como el $\left(A,B\right)$ es $y_{AB} = v_A - v_B$, donde v_A es el potencial del nudo A y v_B el potencial del nudo B, a lo largo de cada camino cerrado de nudos se tiene:

$$\begin{gathered} y_{A_1A_2} + y_{A_2A_3} + \ldots + y_{A_{n-1}A_n} + y_{A_nA_1} = \\ = (v_{A_1} - v_{A_2}) + (v_{A_2} - v_{A_3}) + \ldots + (v_{A_{n-1}} - v_{A_n}) + (v_{A_n} - v_{A_1}) = 0 \end{gathered}$$

por lo que también queda demostrado que los valores y_{AB} que derivan de un conjunto de potenciales de nudo son tensiones de Kirchhoff. Y el teorema completo queda demostrado[49].

[49] El teorema de caracterización de tensiones de Kirchhoff fue publicado de forma parecida a la que se expone aquí en las referencias [1], [2] y [6]. Muestra la amplia generalidad de la segunda ley de Kirchhoff, en el sentido de que es una propiedad de alcance mucho mayor que el limitado a las tensiones eléctricas. En efecto, el teorema pone de manifiesto con claridad que cualquier conjunto de diferencias cumple la segunda ley de Kirchhoff, pues los potenciales de Kirchhoff, –de los cuales derivan siempre las tensiones, como demuestra el teorema–, son elementos arbitrarios de cualquier grupo conmutativo, y pueden representar cualquier magnitud. Por tanto, las diferencias de altura, de temperatura, de presión, de densidad, de edad, las diferencias de los saldos de las cuentas corrientes de los clientes de un banco, y, desde luego, las diferencias de potencial eléctrico, cumplen la segunda ley de Kirchhoff. Por eso esa ley podría enunciarse también así: *la suma de las diferencias de valores asignados a un conjunto de nudos, a lo largo de cada camino cerrado de pares de esos nudos es cero*.

Como los valores de los pares de nudos de la figura 3a y 3b derivan de los potenciales de los nudos, cumplen la segunda ley de Kirchhoff y resultan ser tensiones de Kirchhoff. Así, para el camino cerrado $ACDA$ de la figura 3a se tiene: $(4-\mathrm{j})-(-1)+(\mathrm{j}-5)=0$, con el mismo resultado para los demás caminos cerrados. En el camino $ABCDA$ de la figura 3b la suma es $1+0+1+0=0$, con el mismo resultado también para el resto de los caminos cerrados de esa figura. Por tanto, ambas figuras representan redes de tensiones de Kirchhoff.

Obsérvese que, fijado el potencial de Kirchhoff de cada nudo, el conjunto de tensiones de Kirchhoff de los pares de nudos queda unívocamente determinado. Sin embargo, de la primera parte del teorema de caracterización de tensiones se deduce que son infinitos los conjuntos de potenciales que dan lugar a un conjunto de tensiones, ya que el potencial de uno de los nudos es arbitrario. De esta propiedad se ocupa el

---

Conviene hacer notar que también las diferencias de cualquier conjunto de vectores del plano o del espacio son tensiones de Kirchhoff, pues estos conjuntos con la suma ordinaria en ellos son grupos conmutativos. Por ejemplo, las diferencias de los campos eléctricos, magnéticos o gravitatorios de un conjunto cualquiera de puntos del espacio cumplen la segunda ley de Kirchhoff.

En realidad, pues, la segunda ley de Kirchhoff es una propiedad de los elementos de cualquier grupo conmutativo apropiadamente asignados a los pares de nudos de una red de tensiones de Kirchhoff: los elementos asignados a pares de nudos que forman caminos cerrados suman cero. O sea, la segunda ley de Kirchhoff es una propiedad relacionada con la posición relativa de unos pares con otros. Es, por tanto, una propiedad topológica más que una propiedad de las magnitudes, de variables físicas concretas. Precisamente las variables físicas que cumplen la segunda ley de Kirchhoff lo hacen porque pueden ponerse como diferencias de otras variables. La tensión eléctrica entre dos nudos, en concreto, es diferencia de los potenciales eléctricos de esos nudos. Por eso las tensiones eléctricas, como cualquier otro conjunto de diferencias, cumplen la segunda ley de Kirchhoff.

siguiente teorema.

Teorema.- *Sea una red de tensiones de Kirchhoff que derivan de un conjunto de potenciales del grupo conmutativo* G *asignados a sus nudos. Si se suma el mismo elemento* K *de* G *a todos los potenciales, las tensiones de los pares de nudos que derivan de los nuevos potenciales son las mismas que las que derivan de los primeros.*

Demostración.- Si v_A y v_B son los potenciales de dos nudos cualesquiera A y B, la tensión del par (A,B) es

$$v_{AB} = v_A - v_B$$

Si se suma a todos los potenciales el mismo elemento $K \in G$, los nuevos potenciales de los nudos A y B son $v_A + K$ y $v_B + K$ respectivamente, por lo que la nueva tensión del par (A,B) es

$$v'_{AB} = (v_A + K) - (v_B + K) = v_A - v_B = v_{AB}$$

La misma que la anterior, con lo que el teorema está demostrado.

Lo anterior significa que para cada conjunto de tensiones de una red de Kirchhoff existen infinitos conjuntos de potenciales de los cuales derivan esas tensiones. Los potenciales de cada conjunto asignados a un mismo nudo difieren en el mismo valor K.

Por tanto, lo anterior puede resumirse así:

a) *Dado un conjunto de potenciales de los nudos, existe un único conjunto de tensiones que derivan de ese conjunto de potenciales.*

b) *Dado un conjunto de tensiones, existen infinitos conjuntos de potenciales de los cuales derivan esas tensiones.*

Cero del potencial.- Un corolario del teorema anterior es la arbitrariedad del origen de potenciales, y que, por tanto, *cualquier nudo de una red de tensiones de Kirchhoff puede ser tomado como origen de potenciales,* sin que cambien las tensiones entre los pares de nudos.

En efecto, sea v_A el potencial del nudo A de una red de tensiones de Kirchhoff; si se suma $-v_A$ a todos los potenciales de los nudos, el nuevo potencial del nudo A es $v_A - v_A = 0$. Según el teorema anterior, con esos nuevos potenciales asignados, las tensiones no han cambiado, pero sí los potenciales, resultando cero el potencial del nudo A. Eso se expresa diciendo que el nudo A es el nuevo origen de potenciales.

Es decir, *para cada nudo A de una red de tensiones de Kirchhoff existe un conjunto de potenciales de esa red en el que el potencial del nudo A es cero.* O, más sencillamente: *cualquier nudo de una red de tensiones de Kirchhoff puede ser tomado como origen de potenciales*[50].

[50] Las propiedades del potencial expuestas aquí, incluida la arbitrariedad del cero del potencial, suelen aparecer en la bibliografía atribuidas exclusivamente a los potenciales energéticos, tales como el potencial eléctrico [42] y el potencial gravitatorio [46], con demostraciones específicas para estos casos. Sin embargo, las conclusiones aquí obtenidas muestran que estas propiedades se extienden a todos los potenciales de Kirchhoff [1], [2], [6], y pueden ser consideradas, por tanto, propiedades topológicas, más que propiedades exclusivas de algunas magnitudes físicas.

9. Redes de Kirchhoff

Red de Kirchhoff.- *Una red de Kirchhoff es una red con intensidades de Kirchhoff asignadas a sus ramas y con tensiones de Kirchhoff asignadas a sus pares de nudos, en la que esas tensiones e intensidades son elementos de un mismo cuerpo conmutativo*[51].

Una red eléctrica de corrientes estacionarias da lugar a una red de Kirchhoff si se asigna a cada rama la intensidad eléctrica de esa rama, y a cada par de nudos la tensión eléctrica de ese par de nudos o, lo que es lo mismo, si se asigna a cada nudo su potencial eléctrico con cualquier

---

[51] En las redes de intensidades de Kirchhoff y en las redes de tensiones de Kirchhoff basta que las intensidades y las tensiones sean, por separado, elementos de grupos conmutativos, pues en cada una de esas redes solo se utiliza la suma de intensidades y la suma de tensiones. Sin embargo, en las redes de Kirchhoff, las intensidades de Kirchhoff y las tensiones de Kirchhoff, como se verá enseguida, se han de poder multiplicar entre sí, y unas con otras, tensiones con intensidades e intensidades con tensiones. Por eso las intensidades y tensiones deben asignarse de un único conjunto de valores que, desde luego, debe tener definida una suma con la que adquiera estructura de grupo conmutativo; pero, además, en ese conjunto ha de estar definido, junto a la suma conmutativa, un producto también conmutativo, que debe ser distributivo respecto a esa suma. Ambas exigencias quedan cubiertas si los dos tipos de valores son elementos de un mismo cuerpo conmutativo.

Recuérdese que en un cuerpo conmutativo hay definidas una suma y un producto, y que ambas operaciones son conmutativas; además el producto es distributivo respecto a la suma.

Los conjuntos de los números reales, de los números complejos, de las funciones reales y de las funciones complejas de variable real, con la suma y la multiplicación ordinarias en todos ellos, son cuerpos conmutativos.

referencia de potenciales, pues las tensiones eléctricas de los pares de nudos son las diferencias entre esos potenciales.

Una misma red puede dar lugar a diferentes redes de Kirchhoff, dependiendo de las intensidades que se asignen a sus ramas y de las tensiones que se asignen a sus pares de nudos. Por ejemplo, si todas las intensidades de una red de Kirchhoff se multiplican por el mismo elemento del cuerpo conmutativo de valores al que pertenecen las intensidades y las tensiones, los nuevos valores son también intensidades de Kirchhoff. Lo mismo ocurre si se multiplican las tensiones. También las derivadas de las intensidades o de las tensiones, si son valores derivables, originan otras redes de Kirchhoff. Lo mismo con la integración. En general cualquier transformación lineal que se aplique a las tensiones o a las intensidades de una red de Kirchhoff origina otra red de Kirchhoff. Por tanto, el número de redes de Kirchhoff que se pueden obtener de una misma red por asignación de distintos conjuntos de intensidades y de tensiones es infinito.

Si un conjunto de funciones reales de variable real asignadas como valores a las ramas de una red cumple la primera ley de Kirchhoff, el conjunto de sus transformadas de Laplace y, en general, de cualquier transformación lineal de esas funciones, cumple también la primera ley de Kirchhoff. De la misma forma, si un conjunto de funciones reales de variable real asignadas como valores a los pares de nudos de una red cumple la segunda ley de Kirchhoff, el conjunto de sus transformadas de Laplace y, en general, de cualquier transformación lineal de esas funciones, cumple también la segunda ley de Kirchhoff[52]. Por eso, la

[52] Asignar como valores a los pares de nudos de una red las transformadas de Laplace de las funciones reales de variable real ya asignadas a esos pares de nudos, equivale a asignar como potenciales de nudo las transformadas de Laplace de los potenciales de nudo originales, que son también funciones reales de variable real. De forma semejante ocurre, si en vez de la transformación de

misma red eléctrica citada anteriormente da lugar a otra red de Kirchhoff si se asignan como intensidades de las ramas las transformadas de Laplace de las intensidades instantáneas, y como potenciales de los nudos los potenciales instantáneos o sus transformadas de Laplace.

Si esa red eléctrica es sinusoidal, y se asignan a sus ramas como valores los fasores de las intensidades sinusoidales de las corrientes eléctricas, y a los nudos como potenciales los fasores de los potenciales eléctricos de los nudos de la red sinusoidal, se obtiene también una red de Kirchhoff, que se suele llamar red fasorial. La razón es que los fasores de esas intensidades cumplen la primera ley de Kirchhoff y los fasores de esas tensiones cumplen la segunda ley de Kirchhoff [1], [2].

Como los conjugados de los fasores de las intensidades de la red anterior asignados a las ramas también cumplen la primera ley de Kirchhoff, y los conjugados de los fasores de las tensiones asignados a los pares de nudos cumplen la segunda, la misma red eléctrica anterior con los conjugados de los fasores de las intensidades asignados como valores a sus ramas, y los conjugados de las tensiones asignados como valores a los pares de nudos originan otra red de Kirchhoff. La nuevas tensiones de Kirchhoff son las diferencias de los conjugados de los fasores de los potenciales eléctricos sinusoidales de los nudos. Los conjugados de los fasores de los potenciales eléctricos son los potenciales de los nudos de esta nueva red de Kirchhoff.

Realmente las combinaciones entre intensidades y potenciales de nudos para dar redes de Kirchhoff a partir de una red eléctrica pueden ser muy variadas. En efecto, a una red eléctrica dada se puede asignar como conjunto de intensidades de Kirchhoff cualquier conjunto de entre los citados arriba. Por ejemplo, como intensidades de Kirchhoff pueden asignarse a las ramas las intensidades eléctricas instantáneas de la red, sus

Laplace se trata de otra transformación lineal; las transformadas de los potenciales sirven como potenciales de las transformadas de las tensiones.

transformadas de Laplace o cualesquiera otras transformadas lineales de esas intensidades, los fasores de las intensidades instantáneas si esas intensidades son sinusoidales o los conjugados de esos fasores. Asignado como conjunto de intensidades de Kirchhoff cualquier conjunto de los citados, puede asignarse como potencial de cada nudo cualquier conjunto de potenciales, como por ejemplo, el potencial eléctrico instantáneo de cada nudo de la red eléctrica original, su transformada de Laplace u otra transformada lineal, su fasor si la red es sinusoidal, o el conjugado de ese fasor. Cualquier combinación de esas dos clases conjuntos –de intensidades de Kirchhoff con cualquier conjunto de potenciales de Kirchhoff– origina una red de Kirchhoff. En concreto, una red eléctrica de corrientes estacionarias a la que se asignan como valores de sus ramas las intensidades eléctricas instantáneas, y como potenciales de nudo las transformadas de Laplace de los potenciales eléctricos de los nudos, es una red de Kirchhoff, supuesto, como siempre, que los valores que se asignan a los pares de nudos se hacen derivar de los potenciales de los nudos. Y lo mismo para el resto de combinaciones: todas originan redes de Kirchhoff.

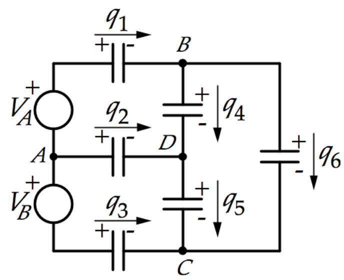

Fig. 1.- Red de Kirchhoff en la que las cargas de los condensadores son las intensidades de Kirchhoff y los potenciales eléctricos de los nudos los potenciales de Kirchhoff.

La figura 1 muestra una red de Kirchhoff en la que las intensidades de Kirchhoff de las ramas son las cargas de los condensadores, que, como se vio en el capítulo 7, dedicado a las intensidades de Kirchhoff, son intensidades de Kirchhoff. Los potenciales de Kirchhoff de los nudos son los potenciales eléctricos de la red, por lo que las tensiones de Kirchhoff de esa red son las tensiones eléctricas entre sus nudos.

Una red hidráulica de caudal estacionario da lugar también a una red de Kirchhoff si se asigna a cada una de sus ramas, –que son tuberías, bombas, turbinas, etc.–, su caudal, y a sus nudos, –que son los puntos de unión de dos o más ramas–, la presión del fluido en esos puntos.

La misma red hidráulica da lugar a otra red de Kirchhoff cuyas intensidades de Kirchhoff sigan siendo los caudales de las ramas, y cuyos potenciales de Kirchhoff sean las temperaturas del fluido en cada nudo.

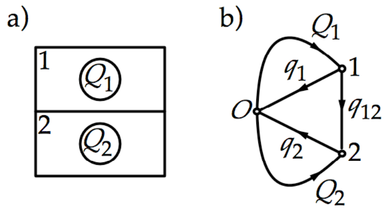

Fig. 2.- a) Edificio de dos recintos. b) Red de Kirchhoff que lo representa en relación con el flujo de calor y la temperatura.

Los recintos de un edificio con temperatura uniforme cada uno y flujo estacionario de calor a través de las paredes pueden ser representados por una red de Kirchhoff[53]. En la figura 2a se muestra el edificio de dos habitaciones ya considerado en el capítulo 7. La figura 2b representa la red de Kirchhoff que describe el flujo de potencia calorífica. Como se explicó en el capítulo 7, las ramas de esa red representan las paredes que separan los recintos entre ellos y del exterior, a las que se asignan como valores las potencias caloríficas que se transfieren por las paredes que representan. Además, entre el nudo O, que representa al exterior, y cada nudo 1 y 2, que representan los recintos, existe otra rama, a la que se asigna la potencia calorífica de la fuente de calor correspondiente. Como se mostró en el capítulo de Intensidades de Kirchhoff, el conjunto de esos valores asignados a las ramas son intensidades de Kirchhoff. Si a cada uno de los nudos 1 y 2 se asigna la

[53] Temperatura uniforme en un recinto significa que la temperatura es la misma en cada punto del recinto, o sea, que dentro de cada recinto, la temperatura no depende de las coordenadas espaciales x, y, z.

temperatura del recinto representado por el nudo correspondiente, y al nudo *O* se asigna la temperatura del exterior, el conjunto de esas temperaturas son potenciales de Kirchhoff. Si a cada par de nudos se asigna como valor la diferencia de temperaturas entre los dos nudos que forman ese par, esas diferencias de temperaturas son un conjunto de tensiones de Kirchhoff. Resulta, por tanto, que la red de la figura 2b tiene asignadas a las ramas un conjunto de intensidades de Kirchhoff, que son flujos de potencia calorífica, y a los pares de nudos un conjunto de tensiones de Kirchhoff, que son diferencias de temperaturas. Es, por tanto, una red de Kirchhoff [6].

Pero el concepto de red de Kirchhoff no es un concepto necesariamente ligado a un sistema físico. Es decir, las tensiones e intensidades de Kirchhoff no necesitan ser resultados de medidas de variables físicas o de otro tipo, sino simples valores adecuadamente asignados a ramas y pares de nudos teniendo en cuenta la posición relativa entre ellos para que cumplan la primera y segunda leyes de Kirchhoff respectivamente. Eso es lo que se quiere expresar en esta tesis cuando se dice que el concepto de red de Kirchhoff es un concepto topológico, y que las propiedades de las redes de Kirchhoff son, por tanto, propiedades topológicas, o sea, debidas a la posición relativa de ramas y nudos [1], [2], [6].

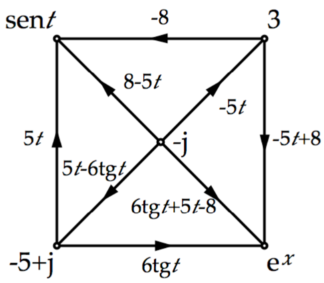

Fig. 3.- Red de Kirchhoff.

Por ejemplo, la figura 3 muestra una red de Kirchhoff en la que las intensidades son funciones de variable real, sin que sean resultados de medidas de ninguna magnitud, sino elegidas con la única condición de que cumplan la primera ley de Kirchhoff; y los potenciales de los nudos son también números complejos y funciones de variable real arbitrarios, sin que sean resultados de medidas de magnitudes físicas.

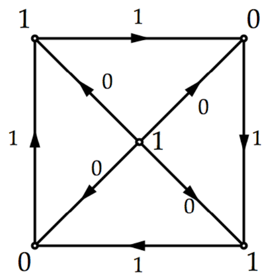

Fig. 4.- Red de Kirchhoff con valores del cuerpo $\{0,1\}$.

La red de la figura 4 utiliza como valores elementos del cuerpo conmutativo formado por el conjunto $\{0,1\}$ con la suma conmutativa, ya definida, $(1+0=0+1=1; \quad 0+0=0; \quad 1+1=0)$, y el producto conmutativo definido así: $(0\times 1=1\times 0=0; \quad 1\times 1=1; \quad 0\times 0=0)$, que tiene la propiedad asociativa, su elemento unidad es 1, y es distributivo respecto a la suma. Con esas dos operaciones el conjunto $\{0,1\}$ es, como se ha dicho, un cuerpo conmutativo. La figura 4 es una red de Kirchhoff en la que las intensidades de las ramas y los potenciales de los nudos son elementos de ese cuerpo conmutativo [6].

Todas las redes de Kirchhoff, respecto a sus intensidades, son redes de intensidades de Kirchhoff, representen o no algún sistema físico, por lo que todas tienen las propiedades de las redes de intensidades de Kirchhoff. Respecto a sus tensiones, todas las redes de Kirchhoff son también redes de tensiones de Kirchhoff, por lo que tienen todas las propiedades de las redes de tensiones de Kirchhoff. Pero, como se verá, las redes de Kirchhoff tienen, además, otras propiedades de interés que derivan de la existencia simultánea en la misma red de intensidades asignadas a las ramas y de tensiones asignadas a sus pares de nudos[54].

---

[54] La expresión "Red de Kirchhoff" con el significado que aquí se le da solo aparece en [1], [2] y [6]. Sin embargo esa expresión, "Red de Kirchhoff", ha sido

9.1. Redes de Kirchhoff equivalentes

El concepto de equivalencia se utiliza de continuo en Teoría de Circuitos o Teoría de Redes Eléctricas referido a redes eléctricas, circuitos, dipolos, multipolos, ramas, etc. No siempre estos objetos aparecen bien identificados en la bibliografía, pues no pocas veces se utilizan diferentes palabras para nombrarlos, e incluso se confunden sus nombres. Especialmente la confusión se produce, como se verá, entre los conceptos de red, circuito y multipolo[55]. Además, en gran parte de la bibliografía se emplea el concepto de equivalencia sin incluir una definición clara de ese concepto. Los pocos autores que sí incluyen definiciones suelen referirse al concepto de equivalencia y al objeto al que se aplica esa equivalencia con notable vaguedad. Pero, a pesar de esa confusión y vaguedad de conceptos, la equivalencia se utiliza con mucha frecuencia. En lo que sigue nos ocuparemos de la equivalencia de redes eléctricas[56]. Aquí se ha

---

utilizada con anterioridad, al menos por dos autores [50], [61], aunque siempre con significados limitados a las redes eléctricas, y en ningún caso para designar una teoría formal como la que aquí se expone.

[55] En particular, es habitual llamar redes a los dipolos y, en general, a los multipolos. Por eso, muchos autores se refieren en realidad a la equivalencia de multipolos cuando hablan de redes equivalentes [62].

[56] El diccionario de IEEE da una definición de red equivalente a otra; pero se trata de una definición práctica, nada formal ni precisa, inútil para nuestros fines: "**equivalent network** A network that, under certain conditions of use, may replace another network without substantial effect on electrical performance". Sin embargo, la explicación que en ese diccionario sigue a la definición, sí contiene elementos de equivalencia coincidentes con los que se emplean en la definición que se da en esta tesis [32].

Como se ha dicho, tanto en la definición de redes equivalentes del diccionario de IEEE, como en las definiciones de algunos pocos autores, aparece una notable confusión en el concepto de red (designado con frecuencia con la palabra 'circuito') a que se refiere la equivalencia, que no suele ser el concepto de red que se maneja en esta tesis, sino que casi siempre designa solo a una parte de elaborado una definición de esa equivalencia que está de acuerdo con la forma práctica de utilizar ese concepto por la mayor parte de los autores, y que encaja con la Teoría de la Redes de Kirchhoff que se construye en esta tesis.

En la práctica que se observa en la bibliografía general, la forma de obtener redes equivalentes a partir de una red inicial consiste en ir transformando la red inicial de Kirchhoff (en realidad la bibliografía solo se refiere a redes eléctricas) en otra más sencilla de analizar, de la que se dice que es "equivalente a la anterior". Esta es la forma habitual de citar la equivalencia, sin que, como se ha dicho, se defina con claridad en qué consiste esa equivalencia.

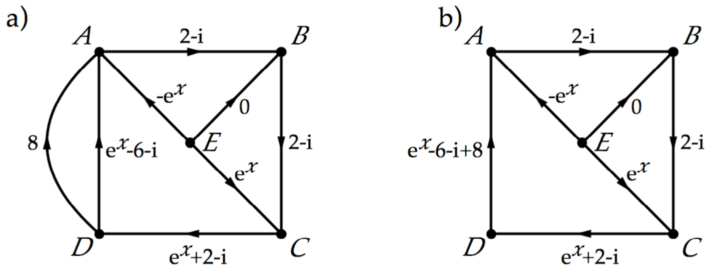

Fig. 5.- Basta que los nudos designados con la misma letra en cada red tengan asignado el mismo potencial para que estas dos redes de Kirchhoff sean equivalentes.

La definición que se propone es la siguiente:

<u>Redes de Kirchhoff equivalentes</u>.- *Dos redes de Kirchhoff cuya intersección es no vacía son equivalentes si cada rama y cada par de nudos que pertenecen a esa intersección tienen la misma intensidad de Kirchhoff y la misma tensión de Kirchhoff respectivamente en ambas redes.*

---

una red, lo que será llamado posteriormente aquí multipolo [6], [63]. Por ejemplo, en [28] se definen redes equivalentes así: "Two circuits are equivalent if they have identical terminal voltages, currents, and waveforms when connected to any other network". Está claro que no se refiere a una red completa, sino a una parte que se conecta a otra parte de otra red por medio de terminales.

Por ejemplo, las dos redes de la figura 5 son redes de Kirchhoff. Su intersección está formada por todos los nudos y por todas las ramas excepto las que unen los nudos A y D. Se ve que las intensidades de Kirchhoff de todas las ramas de la intersección son las mismas. Basta que a los nudos designados por la misma letra en cada red se asigne el mismo potencial para que las dos redes de Kirchhoff sean equivalentes, pues de esa forma los pares de nudos correspondientes de las dos redes tienen las mismas tensiones.

Conviene notar que la *intersección* fue definida para cualquier red, sin necesidad de que la red tenga valores asignados a sus ramas y nudos. Sin embargo, la definición de *redes equivalentes* se refiere exclusivamente a redes de Kirchhoff.

9.2. Sustitución de ramas en paralelo

Hay diferentes formas de obtener una red de Kirchhoff equivalente a una dada. Por ejemplo, si m ramas que están en paralelo en una red de Kirchhoff se sustituyen por una sola rama conectada entre los mismos nudos que las m iniciales, y se asigna a la nueva rama como valor la suma de las intensidades de las m ramas, se obtiene una nueva red de Kirchhoff que es equivalente a la primera. Eso se ha hecho en la figura 5: se han sustituido las dos ramas en paralelo conectadas entre los nudos A y B de la figura 5a por una sola rama cuya intensidad es la suma de las dos a las que reemplaza. La red obtenida es la de la figura 5b, que es una red de Kirchhoff equivalente a la primera. Como la nueva rama se conecta entre los mismos nudos que las que sustituye, la tensión de la nueva rama es la misma que la tensión de las que sustituye.

De la rama que sustituye a m ramas en paralelo se dice que es la resultante de esas m ramas en paralelo. Por tanto, *la resultante de m ramas en paralelo de una red de Kirchhoff tiene la misma tensión de Kirchhoff que ellas y su intensidad de Kirchhoff es la suma de las intensidades de Kirchhoff de las m ramas*.

La operación inversa también origina redes equivalentes: una rama puede ser sustituida por dos o más ramas en paralelo conectadas entre los mismos terminales que la primera asignando a las nuevas ramas intensidades cuya suma sea la intensidad de la primera. Los potenciales de los nudos no han de alterarse. La red de Kirchhoff que resulta de esta sustitución es equivalente a la red de Kirchhoff original.

9.3. Sustitución de ramas en serie

La red de la figura 6b se ha obtenido sustituyendo en 6a las ramas en serie DF y FA por la rama DA. Para que la sustitución origine una red de Kirchhoff equivalente a la primera, a la nueva rama ha de asignársele la misma intensidad que tenían asignada las dos ramas en serie, 1 en este caso, y como tensión ha de asignársele la tensión del par de nudos DA, que resulta ser la suma de las tensiones de las ramas en serie, es decir, la tensión de la rama DF, más la tensión de la rama FA. Por tanto, en general, *si en una red de Kirchhoff se sustituyen dos ramas en serie cuyos terminales extremos son A y B, por una sola rama conectada entre esos terminales A y B, y se asigna a esa nueva rama la intensidad de las originales, y como tensión entre sus terminales la suma de las tensiones de las ramas originales, se obtiene una red equivalente a la primera.*

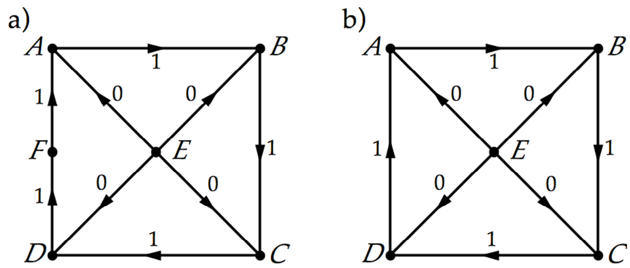

Fig. 6.- Al sustituir las ramas en serie DF y FA por la rama DA, se obtiene la red b, equivalente a la red a.

La rama que sustituye a m ramas en serie en una red de Kirchhoff se llama rama resultante de las m ramas en serie. Por tanto, *la rama resultante* *de m ramas en serie tiene la misma intensidad que las ramas en serie y su tensión es la suma de las tensiones de esas ramas.*

También el proceso inverso da redes de Kirchhoff equivalentes: si una rama se sustituye por varias en serie entre los mismos terminales que la primera, y se asignan intensidades a cada una iguales a la intensidad de la primera rama, se obtiene una red de Kirchhoff equivalente a la red primera. En esta operación no han de modificarse los potenciales de los nudos. Eso equivale a decir que la suma de las tensiones de las nuevas ramas en serie debe ser igual a la tensión de la primera.

9.4. Sustitución de una parte de una red unida a otra por un conjunto de corte

La sustitución de ramas en serie y en paralelo por sus ramas resultantes para obtener redes equivalentes es práctica habitual en las transformaciones de redes eléctricas, y es un método que vale, como se ha visto, para cualquier red de Kirchhoff. Otros procedimientos para obtener redes de Kirchhoff equivalentes a partir de una red de Kirchhoff dada, como el que se muestra a continuación, no suelen ser citados explícitamente para redes eléctricas, aunque sí se aplican a veces transformaciones parecidas de forma intuitiva y un tanto confusa.

Elimínense de una red de Kirchhoff un conjunto de nudos y todas las ramas que los conectan entre sí. Las ramas que conectan los nudos eliminados con el resto de los nudos de la red son un conjunto de corte (fig. 8). Manténganse los valores de las intensidades de esas ramas y reúnanse en un nudo O los terminales que de esas ramas quedan libres. Si a ese nudo O se asigna cualquier potencial, se ha obtenido una red de Kirchhoff equivalente a la original. En efecto, la nueva red es también una red de Kirchhoff, pues las intensidades de las ramas que permanecen en la intersección no han sido modificadas, ni siquiera las que se reúnen en el nudo O, que suman cero, por ser un conjunto de corte de la red original, por lo que la primera ley de Kirchhoff se cumple para todos los nudos, también para el O. Los potenciales de los nudos de la intersección no han sido modificados, por lo que las tensiones de los pares de nudos de la intersección también son los mismos en las dos redes. El potencial del punto O puede ser arbitrario, pues eso no impide que la red sea de Kirchhoff, ya que para ello basta asignar cualquier conjunto de potenciales a los nudos. Los pares de nudos que tienen a O como una de sus componentes tienen tensiones arbitrarias, pero esos pares no pertenecen a la intersección de las dos redes, porque el nudo O no pertenece a esa intersección. Esta sustitución, como se ha dicho, origina otra red equivalente a la primera, y la expresaremos con el siguiente teorema:

Teorema.- *Si una parte de una red unida a otra por un conjunto de corte se sustituye por un nudo O al que se asigna potencial arbitrario, y en el que se hacen confluir las ramas de ese conjunto de corte, se obtiene una red de Kirchhoff equivalente a la primera.*

Nótese que no se modifican las intensidades de Kirchhoff de las ramas del conjunto de corte ni tampoco las intensidades de Kirchhoff de otras ramas. Tampoco se modifican los potenciales de los nudos. Solo al nuevo nudo O se asigna un potencial cualquiera.

Por ejemplo, la red de la figura 7b se ha obtenido de eliminar en la red de la figura 7a los nudos B y C y la rama que los interconecta. Las ramas que llegan a esos nudos desde el resto son su conjunto de corte, y se han reunido en el nudo O, al que se asigna cualquier potencial. Los potenciales de los nudos de la intersección, de los nudos que permanecen, no se alteran. La red resultante es una red de Kirchhoff, pues, en efecto, la suma de los valores de las ramas que confluyen en el nuevo nudo O es cero, pues esas ramas son un conjunto de corte de la red original. También las ramas que confluyen en cada uno de los otros nudos, pues no han sido alteradas. Como los valores de los pares de nudos derivan de un conjunto de potenciales, son tensiones de Kirchhoff. Por tanto en efecto, la nueva red es una red de Kirchhoff. La intersección con la red inicial son todas las ramas y todos los nudos excepto el O. En todas las ramas de la intersección las intensidades son las mismas en ambas redes, y también son los mismos los potenciales de los nudos de la intersección en ambas redes, por lo que la red 7b es equivalente a la 7a.

Conviene notar que, si bien las ramas del conjunto de corte, que son las ramas que confluyen en el nuevo nudo *O*, tienen la misma intensidad en las dos redes, en general no tienen la misma tensión en las dos redes, pues el potencial que se ha asignado al nuevo nudo *O* es arbitrario.

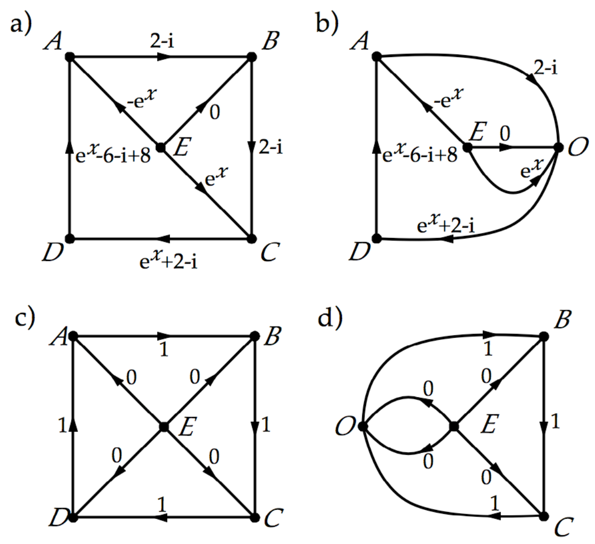

Fig.7.- b) Red equivalente a la red de la figura 7a. d) Red equivalente a la red de la figura 7c.

En la figura 7d se dibuja una red equivalente a la de la figura 7c. Se ha obtenido de eliminar los nudos A y D y la rama que los une.

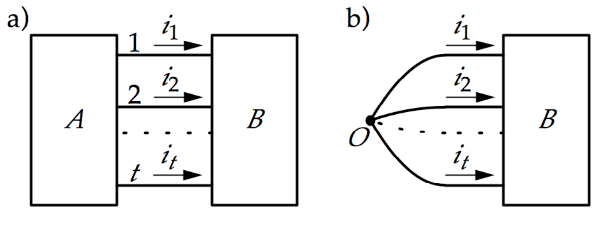

Fig. 8.- Las redes de las figuras 8a y 8b son equivalentes.

La figura 8 indica de forma general la manera de obtener una red equivalente a otra por el procedimiento de eliminar parte de la red de partida y sustituirla por un nudo *O* al que se asigna potencial arbitrario. La figura 8a representa la red completa. Nótese que las partes *A* y *B* de esta red están unidas por ramas que son un conjunto de corte de la red.

Eso significa que la suma de las intensidades de esas ramas que unen las dos partes es cero. La figura 8b es una red equivalente a la red de la figura 8a. La red 8b se ha obtenido sustituyendo la parte A de la red por el nudo O, al que confluyen todas las ramas que se dirigían a la parte A, que es la parte eliminada de la red. En la nueva red esas ramas siguen teniendo asignadas las mismas intensidades, por lo que la suma de las intensidades de las ramas que confluyen en el nuevo nudo O de la red de la figura 8b es cero. El resto de la red no se modifica, por lo que la red 8b resultante es una red de Kirchhoff, cuyos potenciales de los nudos comunes con la red 8a no han variado. Tampoco lo han hecho, por tanto, las tensiones en los pares de nudos comunes con la red 8a. Y tampoco han variado las intensidades de las ramas comunes a las redes 8a y 8b. Resulta por ello que la red 8b es equivalente a la red 8a.

La operación inversa de la anterior también origina una red equivalente a la primera. Consiste en sustituir un nudo por una parte de una red de Kirchhoff que se une a la inicial por las ramas que confluían en el nudo eliminado, que son el conjunto de corte que une las dos partes de la red. Se trata del proceso que transforma la figura 8b en la figura 8a.

9.5. Sustitución de un nudo por una rama y dos nudos

La figura 9b es una red equivalente a la red de la figura 9a. El paso de la red de la figura 9a a la red de la figura 9b ha consistido en sustituir el nudo E de la red de la figura 9a por dos nudos, E_1 y E_2, y una rama que une esos dos nudos. A los nudos E_1 y E_2 se asigna como potenciales de nudo el potencial de E, y a la rama E_1E_2 como intensidad de rama la suma de las intensidades de todas las ramas que llegan E_1, suma que coincide con la suma de las intensidades de las ramas que parten de E_2. La red resultante de la figura 9b es una red de Kirchhoff equivalente a la red de la figura 9a, pues las intensidades de las ramas de la intersección no se han modificado, y tampoco se han modificado las tensiones entre los pares de nudos que pertenecen a la intersección. Incluso las tensiones de las ramas que confluyen en los nuevos nudos E_1 y E_2 no se han alterado, pues los potenciales de esos dos nudos son los mismos que el potencial de E. La tensión de la nueva rama E_1E_2 es cero o, en general, el elemento neutro del cuerpo conmutativo al que pertenecen los valores asignados a las ramas y a los nudos.

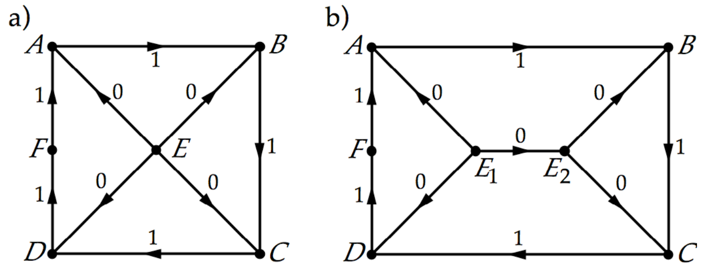

Fig. 9.- Las dos redes de Kirchhoff de la figura son equivalentes.

En general, *si se sustituye un nudo de una red de Kirchhoff por dos nudos con los mismos potenciales que el nudo sustituido, y una rama cuya intensidad sea la suma de las intensidades de las otras ramas que llegan en la nueva red al nudo del que esa rama parte, la red de Kirchhoff que se obtiene es equivalente a la primera.*

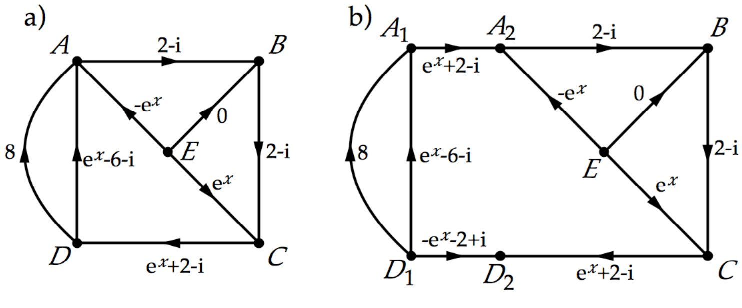

Fig. 10.- Redes de Kirchhoff equivalentes. El nudo A de la red de a) se ha sustituido por dos nudos y una rama: A_1 y A_2 y la rama que los une. De forma parecida se ha hecho con el nudo D. La red aparece así formada por dos dipolos separados por dos ramas cuya tensión es cero: las ramas A_1A_2 y D_1D_2.

Este último procedimiento para obtener redes de Kirchhoff equivalentes a otra es muy útil cuando se quieren separar visiblemente dos partes de una red cuya intersección es un conjunto de nudos. Esa separación se consigue sustituyendo cada nudo de esa intersección por dos nudos con el mismo potencial que el primero y una rama que los une, cuya intensidad es la suma de las intensidades de las ramas que en la nueva red llegan al nudo del que esa rama parte. Por ejemplo, la red de la figura 10b es una red de Kirchhoff equivalente a la red de la figura 10a. El nudo A de la figura 10a se ha sustituido por los nudos A_1 y A_2 y la rama A_1A_2 de la figura 10b, y el D de la figura 10a se ha sustituido por los nudos D_1 y D_2 y la rama D_1D_2 de la figura 10b. La intensidad asignada a la rama A_1A_2 es $8+\mathrm{e}^x-6-\mathrm{i}=2+\mathrm{e}^x-\mathrm{i}$, y la intensidad asignada a la rama D_1D_2 es $-8-\mathrm{e}^x-6-\mathrm{i}=-2-\mathrm{e}^x+\mathrm{i}$. La red de Kirchhoff que resulta en la figura 10b es equivalente a la red de la figura 10a, pero en la de la figura 10b aparece claramente dividida en dos partes: la constituida por los nudos A_1 y D_1 y las dos ramas que los unen por una parte, y la constituida por el resto de los nudos y las ramas que los unen. Las tensiones de las nuevas ramas A_1A_2 y D_1D_2 son cero. Por tanto, la red de la figura 10b aparece claramente dividida en dos partes unidas por las ramas A_1A_2 y D_1D_2.

Nótese que las ramas A_1A_2 y D_1D_2 son un conjunto de corte de la nueva red, por lo que la suma de sus intensidades es cero.

9.6. Sustitución de un conjunto de nudos con el mismo potencial

También es posible la operación inversa a la descrita en el apartado anterior para obtener redes equivalentes a una dada: un conjunto de dos o más nudos de una red de Kirchhoff que tienen el mismo potencial, y todas las ramas cuyos dos terminales sean nudos de ese conjunto, se pueden sustituir por un solo nudo con el mismo potencial que los otros dos. A ese nudo llegan todas las ramas que llegaban al conjunto de nudos sustituido desde fuera de ese conjunto. La operación descrita sigue siendo válida aunque los dos nudos que tienen el mismo potencial no estén unidos por ninguna rama.

En términos más simples, todos los nudos de una red de Kirchhoff con el mismo potencial pueden reunirse en un solo nudo al que ha de asignarse el potencial común de los sustituidos. La red que se obtiene es equivalente a la original.

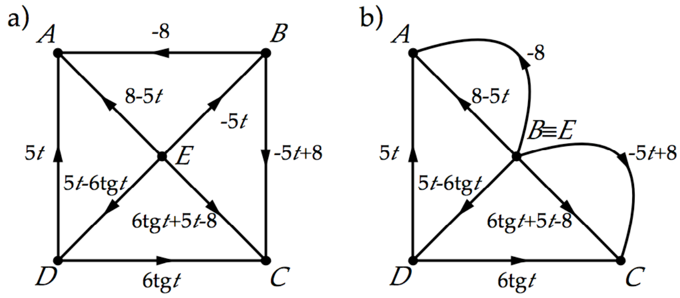

Fig. 11.- Si los nudos B y E de la red a) tienen el mismo potencial, la red b) es equivalente a la a).

La red de la figura 11b se ha obtenido de la red de la figura 11a aplicando ese procedimiento, supuesto que los nudos B y E tienen el mismo potencial. Se ve que la red de la figura 11b es una red de Kirchhoff equivalente a la red de Kirchhoff de la figura 11a.

Obtener redes de Kirchhoff equivalentes de otra es útil cuando interesan datos de solo una parte de la red. Entonces se obtiene una red equivalente cuya intersección con la primera sea solo la parte de la red de la que interesan los datos, que ahora se pueden obtener más fácilmente si la red equivalente obtenida es más sencilla que la primera.

10. Teorema de Tellegen

Como se verá, una de las consecuencias más importantes de entre las que se desprenden de la teoría abstracta de las Redes de Kirchhoff es el alcance tan amplio que para el teorema de Tellegen se descubre con ella.

El teorema que hoy se llama teorema de Tellegen se publicó en 1952, en un artículo de título "A general network theorem, with applications" [13], cuyo autor es B. D. H. Tellegen [47]. En ese artículo se expone dicho teorema como una propiedad de las redes eléctricas[57], pero se muestra con claridad que es consecuencia solo de que las intensidades de las corrientes eléctricas cumplen la primera ley de Kirchhoff, y de que las tensiones eléctricas cumplen la segunda ley. Y, de hecho, esas dos leyes son las únicas hipótesis que se utilizan en el artículo para demostrar el teorema[58]. Tellegen se da cuenta de la generalidad de su teorema, pues

---

[57] Solo en el primer renglón de la introducción del artículo de Tellegen "A general network theorem, with applications" se habla de redes eléctricas: "Many properties of electrical networks...". En el resto del artículo se utiliza solo la palabra 'network', *red*, pero claramente con el significado de red eléctrica.

[58] Incluso puede parecer que Tellegen solo utiliza la primera ley de Kirchhoff, la ley de las intensidades, para demostrar el teorema, pues sí utiliza directamente en la demostración el hecho de que la suma de las intensidades de las ramas que llegan a un nudo es igual a cero, pero no utiliza de forma directa que la suma de las tensiones en un camino cerrado es cero. Sin embargo sí se utiliza la segunda ley de Kirchhoff en la demostración de Tellegen, pues se identifica tensión eléctrica con diferencia de potencial eléctrico. Por el teorema de caracterización de tensiones del capítulo 8 de esta tesis [2], [6] sabemos que los valores asignados a los pares de nudos que deriven de cualquier conjunto de potenciales son tensiones de Kirchhoff, es decir, cumplen la segunda ley de Kirchhoff, y recíprocamente, que si los valores asignados a un conjunto de pares de nudos cumplen la segunda ley, derivan de potenciales de nudo. Esta última

insiste en la amplitud de su aplicación, aunque sin sobrepasar las redes eléctricas: "The theorem holds for all types of networks, linear and non linear, constant and variable, passive and active". Estos tres tipos de clasificaciones son típicos de las redes eléctricas.

Esta generalidad del teorema es comentada por algunos autores [48], [49] y también en libros de texto, e ilustrada con ejemplos, pero sin abandonar nunca el ámbito de las redes eléctricas [28], [29], excepto en [1], [2] y [6]. Además, en las publicaciones posteriores el teorema es permanentemente relacionado con el Principio de Conservación de la Energía, de forma que algunos autores incluso parten de ese principio aplicado a las redes eléctricas para la demostración que ofrecen del teorema de Tellegen [30], [50]. Otros autores parecen incluso identificar, el teorema de Tellegen con el teorema de conservación de la energía[59].

La relación del teorema de Tellegen con la conservación de la energía la establece el propio Tellegen en su artículo. En él considera al teorema que ahora lleva su nombre como un método "... in order to prove the energy theorem...", *teorema de la energía*, que es como parece designar al Primer Principio de la Termodinámica cuando se aplica a las redes eléctricas.

Sin embargo, como se verá en lo que sigue, el alcance del teorema de Tellegen rebasa ampliamente las redes eléctricas, pues es válido para cualquier red de Kirchhoff, es decir, puede ser considerado y presentado como una propiedad topológica, y servirá, junto con el análisis de redes equivalentes que se ha elaborado en el capítulo anterior, para deducir con

afirmación es la que utiliza Tellegen, e identifica tensión eléctrica entre dos nudos de una red eléctrica con la diferencia de potencial eléctrico entre esos nudos. De esta forma da por supuesto que esas tensiones cumplen la segunda ley de Kirchhoff, aunque no se diga explícitamente [13].

[59] Por ejemplo, "...este resultado se conoce como conservación de potencia (algunas veces llamado también teorema de Tellegen)" [51].

claridad algunas consecuencias importantes relacionadas con las potencias. También se aclarará totalmente su relación con el Primer Principio de la Termodinámica, relación que, como también se verá, solo existe para algunos sistemas.

10.1. Potencia de Kirchhoff de una rama de una red de Kirchhoff

En la figura 1 se muestra una rama no orientada de una red de Kirchhoff. No se trata de una rama aislada, sino que ha de suponerse que está formando parte de una red de Kirchhoff, de manera que su intensidad no es necesariamente cero.

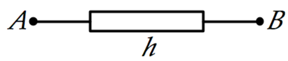

Fig. 1.- Rama que forma parte de una red de Kirchhoff.

Potencia de Kirchhoff que absorbe una rama.- *Se llama potencia de Kirchhoff que absorbe la rama orientada de terminales* A *y* B*, de una red de Kirchhoff, a* $p_{AB} = v_{AB} i_{AB}$.

Es decir, la potencia de Kirchhoff que absorbe una rama orientada es el producto de la tensión de Kirchhoff de la rama por su intensidad de Kirchhoff.

Por tanto, la potencia de Kirchhoff que absorbe la rama orientada opuesta a la anterior es

$$p_{BA} = v_{BA} i_{BA}$$

Pero como

$$v_{BA} = -v_{AB},$$

e

$$i_{BA} = -i_{AB},$$

resulta:

$$p_{BA} = (-v_{AB})(-i_{AB}) = v_{AB} i_{AB} = p_{AB} = p_h \qquad (1)$$

La (1) indica que la potencia de Kirchhoff que absorbe una rama orientada es igual a la que absorbe su rama opuesta. Por eso es posible referirse, simplemente, a la potencia de Kirchhoff que absorbe la rama no orientada h, que se designará por p_h, como la potencia de Kirchhoff que absorbe cualquiera de las dos ramas orientadas que la constituyen. Así se hará en lo que sigue. O sea, la potencia de Kirchhoff que absorbe la rama no orientada h de la figura 1 es

$$p_h = v_{AB} i_{AB} = v_{BA} i_{BA}$$

Recuérdese que la rama no orientada h es el conjunto de las dos ramas orientadas AB y BA.

Por tanto, la expresión 'potencia de Kirchhoff que absorbe una rama' significa indistintamente potencia de Kirchhoff que absorbe esa rama, considerada como rama no orientada, o potencia de Kirchhoff que absorbe cada una de las dos ramas orientadas que constituyen esa rama no orientada.

Por eso, con frecuencia, la potencia de Kirchhoff que absorbe la rama h se escribe así:

$$p_h = v_h i_h$$

Entonces v_h designa a v_{AB} si i_h designa a i_{AB}; y v_h designa a v_{BA} si i_h designa a i_{BA}. Como se ve, con cualquiera de esos dos pares de designaciones p_h es la misma. Este significado de v_h e i_h se expresa a veces diciendo que v_h e i_h han de tener sentidos correspondientes en la fórmula de la potencia que absorbe una rama. Pero esa afirmación es una manera de expresar que si v_h designa a v_{AB}, e i_h designa a i_{BA}, entonces el producto $v_h i_h$ no es la potencia de Kirchhoff que absorbe la rama h.

Potencia de Kirchhoff que entrega una rama.- *El opuesto de la potencia de Kirchhoff que absorbe una rama se llama potencia de Kirchhoff que entrega esa rama.*

10.2. Potencia de Kirchhoff y potencia en sentido termodinámico

Las potencias de Kirchhoff que absorben o entregan las ramas de una red de Kirchhoff pueden ser, o no, potencias en sentido termodinámico. En el caso de redes eléctricas, si se eligen como intensidades de Kirchhoff y tensiones de Kirchhoff las intensidades y tensiones eléctricas instantáneas, las potencias de Kirchhoff de las ramas son potencias en sentido termodinámico. Pero si la red de Kirchhoff que se hace derivar de la red eléctrica real, utiliza las transformadas de Laplace de las intensidades eléctricas instantáneas como intensidades de Kirchhoff, y las transformadas de Laplace de las tensiones eléctricas instantáneas como tensiones de Kirchhoff, las potencias de Kirchhoff de esa red de Kirchhoff no son potencias en sentido termodinámico.

Si en una red hidráulica de flujo estacionario se toman los caudales de las ramas como intensidades de Kirchhoff, y las presiones en los nudos como potenciales de Kirchhoff, las tensiones de Kirchhoff que derivan de esos potenciales resultan ser las diferencias de presión del fluido entre los extremos de cada rama. La potencia de Kirchhoff que absorbe una rama cuya diferencia de presión entre sus nudos extremos es π, y su caudal es G, es, por tanto

$$p = \pi G \tag{2}$$

La potencia p de (2) sí es potencia en sentido termodinámico; en concreto es la potencia mecánica que el fluido entrega a esa rama[60]. Si esa rama es una turbina, y no hay pérdida de energía por viscosidad u otras causas, esa sería la potencia mecánica que el fluido entrega a la turbina, que se suele llamar potencia hidráulica. En cualquier caso p es la potencia que se

[60] Si π se sustituye en (2) en pascales, y G en $\mathrm{m^3/s}$, la potencia de Kirchhoff resulta en $\mathrm{Pa}\left(\mathrm{m^3/s}\right) = \left(\mathrm{N/m^2}\right)\left(\mathrm{m^3/s}\right) = (\mathrm{Nm})/\mathrm{s} = \mathrm{J/s} = \mathrm{W}$.

entrega a toda la rama, incluida la potencia hidráulica que se pierde, sea lo que sea lo que constituya esa rama.

Si en la red hidráulica anterior se toman como potenciales de los nudos las temperaturas del fluido, y se mantienen los caudales como intensidades de las ramas, la potencia de Kirchhoff es

$$p = \tau G \tag{3}$$

τ es la diferencia entre las temperaturas de los terminales de la rama cuyo caudal es G.

En (3) la potencia de Kirchhoff p no es potencia en sentido termodinámico[61]. Pero si esa potencia se multiplica por la densidad del fluido d y por su calor específico c, se obtiene

$$p_1 = cdp = cd\tau G \tag{4}$$

p_1 de (4) es la potencia calorífica que el fluido entrega a la rama[62].

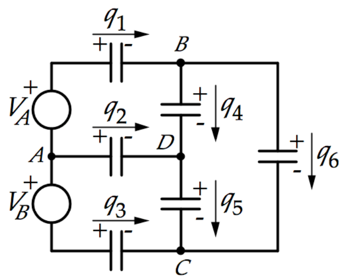

Fig. 2.- La potencia de Kirchhoff de cada rama de esta red no es potencia en sentido termodinámico.

La potencia de Kirchhoff de cada rama de la red de la figura 2 es el producto de la carga eléctrica del condensador de esa rama por la tensión

61 Las unidades de p en (3) son $\mathrm{K}\left(\mathrm{m}^3/\mathrm{s}\right)$.

62 Si c se sustituye en $\mathrm{J}/(\mathrm{kg\,K})$, d en kg/m^3 y G en m^3/s, la potencia p_1 resulta en $\left(\mathrm{J}/(\mathrm{kg\,K})\right)\left(\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3\right)\mathrm{K}\left(\mathrm{m}^3/\mathrm{s}\right) = \mathrm{J/s} = \mathrm{W}$.

eléctrica de esa rama[63]. Esa potencia de Kirchhoff no es potencia en sentido termodinámico[64].

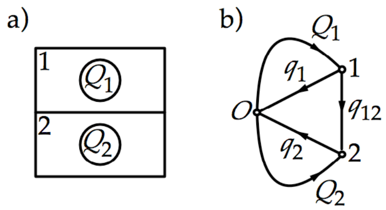

Fig. 3.- La potencia de Kirchhoff de cada rama de la red b) no es potencia en sentido termodinámico.

La potencia de Kirchhoff de las ramas de la red de la figura 3b es el producto de la potencia calorífica a través de cada rama, que es su intensidad de Kirchhoff, por la diferencia de temperatura entre los terminales de esa rama, que es su tensión de Kirchhoff. Tampoco esa potencia de Kirchhoff es potencia en sentido termodinámico[65]

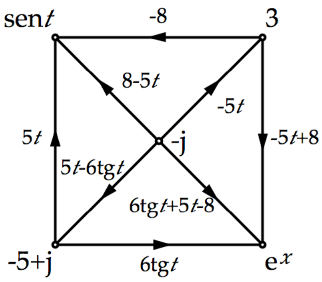

Fig. 4.- Las intensidades y tensiones de Kirchhoff de esta red de Kirchhoff no son medida de ninguna magnitud física, por lo que las potencias de Kirchhoff de sus ramas carecen también de cualquier significado físico.

---

[63] Recuérdese que, en esta red, las intensidades de las ramas son las cargas de los condensadores, y la tensiones de los pares de nudos son las tensiones eléctricas.

[64] Esa potencia de Kirchhoff tiene dimensiones de energía. Su unidad es $\mathrm{VC} = \mathrm{J}$.

[65] La dimensión de esa potencia de Kirchhoff es de potencia-temperatura. Su unidad es, pues, WK.

La potencia de Kirchhoff de las ramas de las redes de las figuras 4 y 5 son simplemente los productos de las tensiones de Kirchhoff y de las intensidades de Kirchhoff de las ramas. Esas tensiones e intensidades no son resultados de medidas de ninguna magnitud física, por lo que su producto tampoco tiene significado físico alguno.

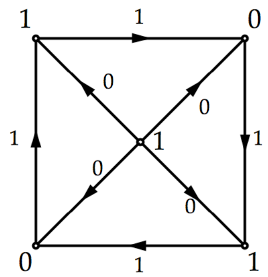

Fig. 5.- Las intensidades y tensiones de Kirchhoff de esta red de Kirchhoff carecen de significado físico, y son elementos del cuerpo conmutativo $\{0,1\}$ con las operaciones definidas en capítulos anteriores. Tampoco las potencias de Kirchhoff de las ramas de esta red de Kirchhoff tienen significado físico alguno.

Pero, con independencia de que sean o no potencias en sentido termodinámico, o sean o no medidas de magnitudes físicas, todas esas potencias de Kirchhoff tienen, como se verá, propiedades comunes, algunas de gran importancia.

10.3. Energía de Kirchhoff

Energía de Kirchhoff que absorbe una rama.- *Se llama energía de Kirchhoff que absorbe una rama* h *de una red de Kirchhoff entre los tiempos* t_1 *y* t_2 *a*

$$W_h = \int_{t_1}^{t_2} p_h \mathrm{d}t$$

p_h es la potencia de Kirchhoff que absorbe la rama h.

Es decir la energía de Kirchhoff que absorbe la rama h en un periodo de tiempo es la integral en ese periodo de la potencia que absorbe la rama h.

Energía de Kirchhoff que entrega una rama.- *El opuesto de la energía de Kirchhoff que absorbe la rama* h *en un intervalo de tiempo se llama energía de Kirchhoff que entrega esa rama en ese intervalo.*

Tampoco la energía de Kirchhoff que absorben las ramas de una red de Kirchhoff es siempre energía en sentido termodinámico. Sí lo es si la red de Kirchhoff representa a una red eléctrica de corrientes estacionarias, y se han tomado como intensidades de Kirchhoff las intensidades eléctricas, y como tensiones de Kirchhoff las tensiones eléctricas. No lo es si como intensidades y tensiones de Kirchhoff se han tomado las transformadas de Laplace, por ejemplo.

Si la potencia de Kirchhoff que se integra para hallar una energía de Kirchhoff es potencia en sentido termodinámico, la energía que resulta es energía en sentido termodinámico. Si la potencia de Kirchhoff no es potencia en sentido termodinámico, tampoco es energía en sentido termodinámico la energía de Kirchhoff que se obtiene por integración de esa potencia de Kirchhoff[66].

---

[66] Los nombres que en esta tesis se vienen dando a las variables de las redes de Kirchhoff son los mismos que los correspondientes de las redes eléctricas, añadiendo la expresión 'de Kirchhoff'. De esa manera se muestran permanentemente las correspondientes referencias eléctricas de los conceptos más amplios y se facilita la comprensión del nuevo enfoque. Así, se habla de 'intensidades de Kirchhoff', de 'tensiones de Kirchhoff', de 'potencia de Kirchhoff', de 'energía de Kirchhoff', etc. Todos estos nombres aparecieron por primera vez en los libros que constituyen las referencias [1] y [2]. También fueron incluidos en el artículo "A general approach to Kirchhoff's laws" [6], aceptado por IEEE para su publicación. En este último artículo aparecen todos estos nombres excepto 'potencia de Kirchhoff' y 'energía de Kirchhoff'. La energía de Kirchhoff no hace falta citarla en el artículo; y la expresión 'potencia de Kirchhoff' se nombra en el artículo, simplemente, como 'producto vi', donde v es la tensión de Kirchhoff, e i es la intensidad de Kirchhoff de la rama de que se trate. No hubo ningún comentario ni sugerencia por parte de ninguno de los

10.4. Teorema de Tellegen

Teorema de Tellegen.- *La suma de las potencias de Kirchhoff que absorben todas las ramas de una red de Kirchhoff es cero.*

Demostración.- La potencia de Kirchhoff que absorbe la rama orientada de terminales k y l es el producto de la tensión por la intensidad de Kirchhoff de esa rama:

$$p_{kl} = v_{kl} i_{kl}$$

Según el teorema de caracterización de tensiones de Kirchhoff, toda tensión de Kirchhoff deriva de un conjunto de potenciales de nudo, por lo que la tensión de la rama de terminales k y l es $v_{kl} = v_k - v_l$, donde v_k y v_l son los potenciales de los terminales k y l de la rama, respectivamente. Por tanto, la potencia de Kirchhoff que absorbe la rama de terminales k y l es

$$\left(v_k - v_l\right) i_{kl} = v_k i_{kl} - v_l i_{kl} = v_k i_{kl} + v_l i_{lk} \tag{5}$$

i_{kl} es la intensidad de Kirchhoff de la rama orientada que une los nudos k y l. Si hubiera más de una rama que conectara los nudos k y l, i_{kl} es la suma de las intensidades de todas esas ramas, y entonces (5) sería la suma de las potencias de Kirchhoff de todas esas ramas en paralelo. Si entre los nudos k y l no existe ninguna rama, la intensidad i_{kl} es cero, y también lo es (5).

La potencia de Kirchhoff que absorben todas las ramas orientadas que parten del nudo k se obtienen dando a l en (5) todos los valores posibles, es decir

---

evaluadores respecto a esos nombres, lo que parece sugerir su razonable adecuación.

$$\sum_{l=1}^{n_t}(v_k - v_l)i_{kl} = \sum_{l=1}^{n_t}(v_k i_{kl} + v_l i_{lk}) = v_k\sum_{l=1}^{n_t} i_{kl} + \sum_{l=1}^{n_t} v_l i_{lk} = \sum_{l=1}^{n_t} v_l i_{lk} \qquad (6)$$

La última igualdad de (6) se obtiene porque el primer sumando del penúltimo miembro de (6) es cero:

$$v_k\sum_{l=1}^{n_t} i_{kl} = 0 \qquad (7)$$

En efecto, el sumatorio de (7) expresa la suma de las intensidades de Kirchhoff que parten del nudo k, que es cero:

$$\sum_{l=1}^{n_t} i_{kl} = 0$$

Podrían excluirse de los valores de l de (6) el valor $l = k$, ya que ese valor designaría a una rama cuyos dos terminales son el nudo k, es decir, una rama que parte de k y vuelve a k, pero no es imprescindible eliminar ese valor, pues para $l = k$ la tensión de la rama es $v_k - v_k = 0$, con lo que esa rama no contribuye a (6) con ninguna potencia, pues una rama que conecte un nudo con él mismo no absorbe potencia de Kirchhoff, ya que su tensión de Kirchhoff es cero.

(6) es la potencia de Kirchhoff que absorben las ramas orientadas que parten del nudo k. La potencia de Kirchhoff que absorben todas las ramas orientadas que parten de todos los nudos se obtiene sumando (6) para todos los n_t nudos, o sea, haciendo recorrer a k los valores desde uno a n_t:

$$\sum_{k=1}^{n_t}\sum_{l=1}^{n_t}(v_k - v_l)i_{kl} = \sum_{k=1}^{n_t}\sum_{l=1}^{n_t} v_l i_{lk} = \sum_{l=1}^{n_t} v_l \sum_{k=1}^{n_t} i_{lk} = 0 \qquad (8)$$

(8) expresa que la suma de las potencias de Kirchhoff que absorben todas las ramas orientadas de una red de Kirchhoff es cero. Esa potencia es el doble de la potencia que absorben las ramas no orientadas, por lo que la suma de la potencia que absorben las ramas no orientadas es también cero,

y el teorema está demostrado cualquiera que sea la red de Kirchhoff de que se trate, sean o no las potencias de Kirchhoff de las ramas de esa red potencias en sentido termodinámico[67].

[67] La demostración de este teorema a partir exclusivamente de las dos leyes de Kirchhoff está en el artículo de Tellegen de la referencia [13]. También está en las referencias [1] y [2], y en otras publicaciones. En todas estas publicaciones, salvo en [1] y [2], esta demostración se hace solo sobre redes eléctricas y, por tanto, el teorema se aplica a redes eléctricas exclusivamente.

En algunas publicaciones [48], [49], sin embargo, se estudian ejemplos concretos de aplicación del teorema de Tellegen, pero nunca con un enfoque exclusivamente topológico y, por tanto, totalmente general.

Tellegen parte en su artículo de identificar las tensiones eléctricas de las ramas con las diferencias del potencial eléctrico de los terminales de esas ramas. Esa identificación es lo que le permite demostrar el teorema. Pero esa identificación es lo que también nos permite a nosotros demostrarlo para todas las tensiones de Kirchhoff, no solo para las eléctricas. La razón de esta posibilidad de generalización la proporciona el teorema de caracterización de tensiones, que afirma que todo conjunto de tensiones de Kirchhoff deriva de un conjunto de potenciales. Por eso es posible escribir la tensión de Kirchhoff de cada rama de una red de Kirchhoff como diferencia de los potenciales de los terminales de esa rama.

En las redes eléctricas la potencia de Kirchhoff que cada rama absorbe es potencia en sentido termodinámico. Por otra parte, el enunciado del teorema de Tellegen para esas redes, o sea, que la suma de las potencias que absorben todas las ramas de una red eléctrica sea cero, equivale a decir que las potencias que unas ramas absorben son positivas y otras negativas. Solo así la suma de esas potencias –que en las redes eléctricas son funciones reales de variable real– pueden sumar cero. Que la potencia que absorbe una rama sea negativa equivale a decir que esa rama entrega el valor absoluto de esa potencia. Por consiguiente, el teorema de Tellegen para las redes eléctricas significa que la potencia –potencia en sentido termodinámico en esas redes– que absorben unas ramas de la red es entregada por otras, que es el Primer Principio de la Termodinámica aplicado a las redes eléctricas. Esta parece ser la razón de que haya autores que presentan el teorema de Tellegen como una *consecuencia* del primer principio de la Termodinámica, e incluso, como se ha dicho, que algunos partan de ese principio para demostrar el teorema de Tellegen [50].

Tellegen demuestra su teorema en el punto 2 de su artículo, que titula "The general theorem". El punto 3 lo titula "The energy theorem of networks". En él establece la relación de su teorema, que él llama "general theorem", con la energía, solo con estas palabras de su comienzo: "If i and v denote branch currents and voltages simultaneously present in a network, $\sum iv = 0$ means that total power consumption is zero. This constitutes the energy theorem of networks". Este "the energy theorem of networks" se ha interpretado como el Principio de la Conservación de la Energía aplicado a las redes eléctricas.

La demostración del teorema de Tellegen que se incluye en esta tesis utiliza exclusivamente la teoría que se viene construyendo, a partir solo de las dos leyes de Kirchhoff. En este sentido, esta demostración es como la de Tellegen, que solo utiliza las dos leyes de Kirchhoff. Hay, sin embargo, como se ha dicho, una diferencia esencial, y es que, en esta tesis, debido al teorema de caracterización de tensiones, se muestra inequívocamente la validez del teorema para toda red de Kirchhoff, no solo para las redes eléctricas.

Como se ha visto, en muchas redes de Kirchhoff los productos de las tensiones de Kirchhoff por las intensidades de Kirchhoff de sus ramas no son potencias en sentido termodinámico. Eso significa que, en realidad, el teorema es una propiedad no incluida en el Primer Principio de la Termodinámica, como parecen expresar algunos autores, es decir, no es una propiedad que sea consecuencia del Principio de Conservación de la Energía, sino que es independiente de él. Más bien se trata de una propiedad puramente topológica, que se debe exclusivamente a que los valores asignados a ramas y nudos cumplen las leyes de Kirchhoff. Ese cumplimiento se debe a la elección de los valores que se asignan en función de la posición relativa entre las ramas y los nudos, y no a que esos valores sean medidas de ciertas magnitudes físicas. Pero, cuando los productos de las tensiones de Kirchhoff por las intensidades de Kirchhoff de una red de Kirchhoff son potencias en sentido termodinámico, como ocurre en las redes eléctricas, y no solo en ellas, el teorema de Tellegen confirma el Primer Principio de la Termodinámica. Esta sería la interpretación más

Por ejemplo, en una red eléctrica se cumple que

$$\sum_{h=1}^{r} v_h i_h = 0 \tag{9}$$

En (9) v_h e i_h son la tensión eléctrica y la intensidad de la corriente eléctrica, respectivamente, de la rama h. Cada producto $p_h = v_h i_h$ de la suma de (9) es la potencia de Kirchhoff que absorbe la rama h, que es potencia en sentido termodinámico.

Pero, en la misma red, también se cumple el teorema de Tellegen en la forma

$$\sum_{h=1}^{r} V_h(s) I_h(s) = 0 \tag{10}$$

$V_h(s)$ e $I_h(s)$ son las transformadas de Laplace de v_h e i_h. (10) es cierta porque esas transformadas de Laplace son también tensiones e intensidades de Kirchhoff, pues cumplen la primera y la segunda leyes de Kirchhoff, respectivamente [1], [2]. En este caso el producto $V(s)I(s)$ no es potencia en sentido termodinámico[68].

Si las tensiones e intensidades eléctricas de la red anterior son funciones sinusoidales del tiempo de la misma frecuencia, sus fasores y los conjugados de esos fasores también cumplen la primera y la segunda leyes

adecuada del teorema de Tellegen y su relación con el Primer Principio: el teorema de Tellegen es una propiedad de las redes de Kirchhoff –una propiedad topológica, por tanto– que confirma el Principio de Conservación de la Energía cuando las potencias de Kirchhoff son potencias en sentido termodinámico [1], [2], [6].

[68] La unidad de $V(s)$ es Vs (voltio segundo), y la de $I(s)$ es As (amperio segundo), por lo que la unidad del producto, que es una potencia de Kirchhoff, es $\mathrm{VAs}^2 = \mathrm{Ws}^2$.

de Kirchhoff respectivamente [1], [2], por lo que el teorema de Tellegen también se cumple en las formas[69]

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{V}_h \boldsymbol{I}_h = 0 \tag{11}$$

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{V}_h \boldsymbol{I}_h^* = 0 \tag{12}$$

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{V}_h^* \boldsymbol{I}_h = 0 \tag{13}$$

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{V}_h^* \boldsymbol{I}_h^* = 0 \tag{14}$$

En las fórmulas anteriores $\boldsymbol{V}_h$ es el fasor de la tensión sinusoidal v_h, $\boldsymbol{V}_h^*$ es el conjugado de $\boldsymbol{V}_h$, $\boldsymbol{I}_h$ es el fasor de la intensidad sinusoidal i_h, e $\boldsymbol{I}_h^*$ el conjugado de $\boldsymbol{I}_h$.

De entre los productos anteriores ninguno es potencia en sentido termodinámico. No obstante, el producto $\boldsymbol{S}_h = \boldsymbol{V}_h \boldsymbol{I}_h^*$ es la potencia compleja que absorbe la rama h, cuya parte real es, como se sabe, la potencia activa P_h que absorbe esa rama, y cuya parte imaginaria es la potencia reactiva Q_h que también absorbe la rama h. Por tanto la (12) significa que la suma de las potencias complejas que absorben todas las ramas de una red sinusoidal es cero. La (12) puede ponerse también así:

$$\boldsymbol{S} = P + \mathrm{j}Q = \sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{V}_h \boldsymbol{I}_h^* = \sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{S}_h = \sum_{h=1}^{r} P_h + \mathrm{j}\sum_{h=1}^{r} Q_h = 0 \tag{15}$$

$\boldsymbol{S}$ es la suma de las potencias complejas de todas las ramas de la red sinusoidal de que se trate, que, según el teorema de Tellegen es cero.

---

[69] En lo que sigue, los fasores y, en general, los números complejos, se designarán con letra **negrita**.

La componente real P de $\boldsymbol{S}$ en (15) es la suma de las potencias activas que absorben todas las ramas de la red, suma que también es cero según el teorema. La componente imaginaria Q de $\boldsymbol{S}$, es la suma de las potencias reactivas que absorben las ramas de la red, que también es cero según se desprende de (15). Por tanto, un corolario del teorema de Tellegen aplicado a las redes sinusoidales, es que la suma de las potencias complejas que absorben todas las ramas de una red sinusoidal es cero; y, consecuencia de esta afirmación es que la parte real de esa suma, que es la suma de las potencias activas que absorben todas las ramas de una red sinusoidal, es cero. Esta última consecuencia sí confirma el Primer Principio de la Termodinámica, pues la potencia activa es potencia en sentido termodinámico. Otra consecuencia es que también es cero la parte imaginaria de la potencia compleja total, que es la suma de las potencias reactivas que absorben todas las ramas de la red sinusoidal. Esta última afirmación, sin embargo, no tiene nada que ver con el Principio de Conservación de la Energía, ya que la potencia reactiva no es potencia en sentido termodinámico. Se trata, por tanto, de una aportación propia del teorema de Tellegen al conocimiento de las redes sinusoidales, de un corolario de suma importancia de ese teorema, que, por lo que sabemos, no tiene otra fuente de deducción:

Teorema.- *La suma de las potencias reactivas que absorben todas las ramas de una red sinusoidal es cero*[70].

De una red sinusoidal se pueden obtener muchas otras expresiones que son consecuencias directas del Teorema de Tellegen, además de las escritas en las fórmulas de (11) a (14). Por ejemplo, del teorema se deduce también que

[70] A veces se llama teorema de Boucherot a este corolario y al de que la suma de las potencias complejas que absorben las ramas de una red sinusoidal es cero [35].

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{V}_h I_h(s) = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{r} v_h \boldsymbol{I}_h^* = 0$$

o

$$\sum_{h=1}^{r} V_h(s) i_h = 0,$$

y en general, que la suma de los productos de cualquier conjunto de tensiones de Kirchhoff por cualquier conjunto de intensidades de Kirchhoff de la misma red es igual a cero [6].

En una red hidráulica de flujo estacionario cuyas intensidades sean los caudales de las ramas, y las tensiones sean las diferencias de presión entre los nudos, el teorema de Tellegen expresa que

$$\sum_{h=1}^{r} \pi_h G_h = 0 \tag{16}$$

π_h es la diferencia de las presiones entre los terminales de la rama h, y G_h es el caudal de la rama h. Cada producto $p_h = \pi_h G_h$ es la potencia hidráulica que absorbe la rama h. Por tanto, (16) sí confirma el Principio de Conservación de la Energía, pues significa que la potencia hidráulica que absorben unas ramas la entregan otras, que no se crea ni se destruye energía.

Si las intensidades de Kirchhoff de la red hidráulica anterior siguen siendo las caudales, pero las tensiones son las diferencias de temperaturas entre los nudos, el teorema de Tellegen expresa ahora que

$$\sum_{h=1}^{r} \tau_h G_h = 0 \tag{17}$$

τ_h es la diferencia de temperaturas entre los terminales de la rama h. Los productos $\tau_h G_h$ no son potencias en sentido termodinámico; pero si se multiplica (17) por la densidad d del fluido y por su calor específico, queda:

$$\sum_{h=1}^{r} cd\tau_h G_h = 0 \tag{18}$$

Cada producto $p_h = cd\tau_h G_h$ es ahora la potencia térmica que absorbe cada rama[71]. Por tanto (18) significa que la suma de las potencias térmicas absorbidas por las ramas de la red es cero. (18) confirma el Primer Principio de la Termodinámica.

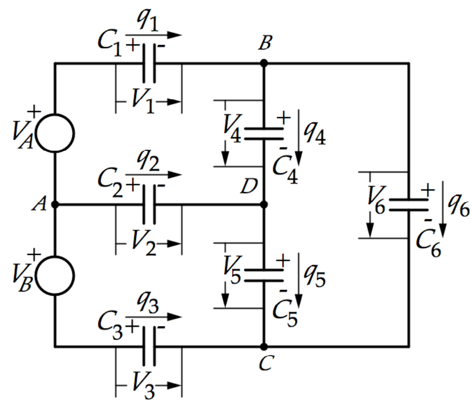

Fig. 6.- Red de Kirchhoff en la que las intensidades son las cargas de los condensadores y las tensiones las tensiones eléctricas entre los nudos.

En la red de Kirchhoff de la figura 6 las intensidades de Kirchhoff son las cargas de los condensadores situados en cada rama. Como las intensidades de ramas en serie son iguales, las intensidades de las dos fuentes de tensión eléctrica de la red son q_1 y q_3 respectivamente, con los sentidos indicados en la figura 6. Las tensiones de Kirchhoff de la red son las tensiones eléctricas. Por tanto, el teorema de Tellegen pare esa red expresa que

[71] Las ramas pueden ser radiadores térmicos, fuentes de calor o simplemente tuberías.

$$\sum_{h=1}^{r} v_h q_h = 0 \tag{19}$$

v_h es la tensión eléctrica de la rama h y q_h la intensidad de Kirchhoff de la rama h. En concreto, de forma explicita,

$$V_1 q_1 + V_2 q_2 + V_3 q_3 + V_4 q_4 + V_5 q_5 + V_6 q_6 - V_A q_1 + V_B q_3 = 0 \tag{20}$$

Cada sumando es la potencia de Kirchhoff de la rama correspondiente. Todos los sumandos tienen dimensiones de energía[72], aunque sin ninguna interpretación física de interés. No obstante, si se multiplica (20) por $1/2$, queda:

$$\frac{1}{2}V_1 q_1 + \frac{1}{2}V_2 q_2 + \frac{1}{2}V_3 q_3 + \frac{1}{2}V_4 q_4 + \frac{1}{2}V_5 q_5 + \frac{1}{2}V_6 q_6 - \frac{1}{2}V_A q_1 + \frac{1}{2}V_B q_3 = 0 \tag{21}$$

Ahora, los sumandos de (21), que siguen teniendo dimensión de energía, sí tienen significado físico de interés. Cada uno de los primeros seis sumandos es la energía que tiene almacenada el condensador correspondiente, y que ha sido adquirida en el proceso de carga de los condensadores, cuando sus tensiones han pasado de valer cero a valer la tensión final, que es la indicada en la figura. Cada uno de los dos últimos sumandos de (21) es la energía que ha absorbido cada una de las dos fuentes de tensión de la red en el proceso de carga de los condensadores. La fuente de tensión V_B realmente ha absorbido energía, pues el término es positivo. La fuente de tensión V_A ha entregado energía durante el proceso de carga de los condensadores, pues el sumando correspondiente a esta energía es negativo. De forma que, durante el proceso de carga de los condensadores, solo la fuente de tensión V_A ha entregado energía. Tanto la fuente de tensión V_B como los condensadores la han absorbido. Pero la suma de toda la energía absorbida es cero, lo que significa que la fuente de tensión V_A ha entregado toda la energía que han absorbido los

[72] La unidad de cada sumando es $\mathrm{VC} = \mathrm{J}$.

condensadores más la que ha absorbido la fuente de tensión V_B. Por tanto (21) también confirma el Principio de Conservación de la Energía [6].

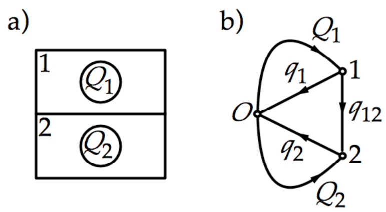

Fig. 7.- a) Edificio de dos habitaciones con fuentes de calor. b) Red de Kirchhoff que lo representa.

La figura 7b es la red de Kirchhoff que describe los flujos de calor en el edificio representado en 7a. Las intensidades de Kirchhoff de la red 7b son las potencias caloríficas a través de las paredes y las potencias caloríficas de las fuentes de calor de la figura 7a. Las tensiones de Kirchhoff son las diferencias de temperaturas de las habitaciones entre sí, representadas por los nudos 1 y 2 de la figura 7b, y las diferencias de temperaturas entre esas habitaciones y el exterior, representado por el nudo O. El teorema de Tellegen aplicado a esa red expresa que

$$\sum_{h=1}^{r} \tau_h q_h = 0 \tag{22}$$

τ_h es la diferencia de temperaturas entre los terminales de la rama h. q_h es la potencia calorífica de la rama h. De forma explícita, la igualdad (22) para la red 7b toma la forma

$$\tau_1 q_1 + \tau_2 q_2 + \tau_{12} q_{12} - \tau_1 Q_1 - \tau_2 Q_2 = 0 \tag{23}$$

$\tau_1 = T_1 - T_O$ es la diferencia de temperaturas entre la habitación 1 y el exterior, es decir, entre los nudos 1 y O. $\tau_2 = T_2 - T_O$ es la diferencia entre las temperaturas de la habitación 2 y el exterior, o sea, la tensión de Kirchhoff del par de nudos $(2,O)$. τ_{12} es la diferencia entre las temperaturas de las habitaciones 1 y 2.

Los sumandos de (22) y (23) no son potencias en sentido termodinámico[73].

Como se ve, las aplicaciones del teorema de Tellegen abarcan otros sistemas además de las redes eléctricas. De hecho, como las diferencias de cualquier conjunto de potenciales son tensiones de Kirchhoff, asignado a una red un conjunto de intensidades de Kirchhoff, cualquier conjunto de valores asignados a los nudos son potenciales, sean cuales sean las magnitudes de las que esos valores son medida, o sin ser medida de nada. El teorema de Tellegen se cumple para esas intensidades y las tensiones de Kirchhoff que surjan de esos potenciales. Por eso, en realidad son innumerables los sistemas en los que se cumple el teorema de Tellegen, sin que sea una propiedad específica de variables físicas concretas. Esta es la razón de la conveniencia de considerarlo como una propiedad topológica, una propiedad de valores asignados a ramas y pares de nudos, que es consecuencia de la posición relativa de las ramas y de los nudos de la red.

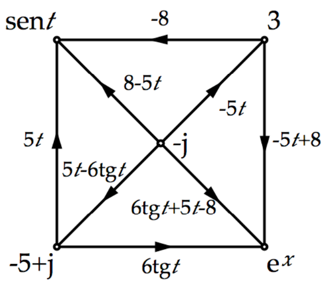

Fig. 8.- Red de Kirchhoff.

Por ejemplo, en la red de Kirchhoff de la figura 8 las intensidades de Kirchhoff no son medida de ninguna variable, ni tampoco los potenciales de sus nudos. Pero la suma de los productos de las tensiones de Kirchhoff por las intensidades de Kirchhoff es en ella

[73] La unidad de cada sumando de (22) y (23) es WK.

$$\begin{gathered}(\mathrm{sen}t-3)(-8)+\left(3-\mathrm{e}^{x}\right)(-5t+8)+\left(\mathrm{e}^{x}-(-5+\mathrm{j})\right)(-6\mathrm{tg}t)+((-5+\mathrm{j})-\mathrm{sen}t)5t+\\+(-\mathrm{j}-\mathrm{sen}t)(8-5t)+(-\mathrm{j}-3)(-5t)+\left(-\mathrm{j}-\mathrm{e}^{x}\right)(6\mathrm{tg}t+5t-8)+\\+(-\mathrm{j}-(-5+\mathrm{j}))(5t-6\mathrm{tg}t)=0\end{gathered}$$

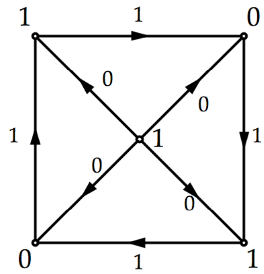

Fig. 9.- Red de Kirchhoff con valores del cuerpo $\{0,1\}$ con las operaciones definidas en el capítulo de Intensidades de Kirchhoff.

La figura 9 es otro ejemplo de red de Kirchhoff en la que las intensidades y tensiones no son resultados de ninguna medida. Además, las intensidades y tensiones de Kirchhoff de esa red son valores del cuerpo conmutativo $\{0,1\}$ con la suma y el producto que se viene utilizando para él en esta tesis. También en esta red se cumple el teorema de Tellegen:

$$(1-0)1+(0-1)1+(1-0)1+(0-1)1+(1-1)0+(1-0)0+(1-1)0+(1-0)0=0$$

11. Multipolos

Hasta aquí se han considerado redes de Kirchhoff completas. Pero con frecuencia es útil considerar las redes de Kirchhoff como formadas por dos partes. Por ejemplo, la gestión de las redes eléctricas constituidas por las instalaciones reales requiere considerar muchas veces esas redes formadas por dos partes unidas por terminales. Las dos partes concretas que conviene considerar en una misma red son, en general, diversas. Así, en la gestión de los sistemas eléctricos de potencia, cada alternador trifásico de una central se une al resto de la red por tres terminales. Lo que interesa para el gobierno y control del sistema eléctrico del que forma parte el alternador son, principalmente, las variables de la red en los puntos de unión, en los terminales del alternador o en los terminales del transformador a través del cual se conecta el alternador a la red. Interesa la tensión entre terminales, la intensidad por cada terminal y la potencia que se entrega al resto de la red a través de los terminales de conexión. Para estos fines de gobierno y control del alternador en relación con el resto del sistema eléctrico, la red es considerada como formada por dos partes: una es el alternador, o alternador-transformador, y la otra es el resto de la red. En este caso esas dos partes que forman la red completa están unidas por tres terminales.

El conjunto de las instalaciones eléctricas de cada consumidor está unido al resto del sistema eléctrico por medio de dos, tres o cuatro terminales, dependiendo de si la instalación recibe energía eléctrica por medio de una línea monofásica o trifásica de tres o cuatro hilos. De nuevo, para la gestión de la parte del sistema eléctrico que pertenece al consumidor, se considera el sistema eléctrico dividido en dos partes. Una es la parte de la instalación del consumidor, y la otra es el resto de la red. En los conductores que unen esas dos partes se miden y se controlan las variables de interés: tensiones, intensidades, potencias y energías.

También la forma de extraer energía del sistema eléctrico para hacer funcionar pequeños o grandes receptores considera, de hecho, la red dividida en dos partes, el receptor y el resto, pues los datos que interesan son la tensión en los terminales de la unión de esas dos partes y la potencia que el resto de la red entrega al receptor a través de esos terminales. Esos son, precisamente, los valores que se emplean para caracterizar cada receptor, sea una lámpara, una lavadora o una estufa eléctrica, además del factor de potencia, que permite conocer también las intensidades de los terminales.

Esta forma de considerar las redes eléctricas divididas en dos partes no es exclusiva de las redes de potencia, sino que se aplica a cualquier red eléctrica para su diseño e, incluso, para poder comprender su funcionamiento. Así, los circuitos electrónicos se dividen también en partes conectadas entre sí, y las medidas de control y de comprobación se hacen en los terminales que unen esas partes.

Pero incluso esta división se utiliza también en otros tipos de redes, se puedan o no describir por medio de redes de Kirchhoff. Las redes hidráulicas y de fluidos son consideradas a veces de esta manera, como dos partes unidas por tuberías, que son los terminales. Por ejemplo, la red de calefacción de una vivienda de un edificio con calefacción central puede estar conectada a la red general por dos o más tuberías, por dos o más terminales. Midiendo en esos terminales caudales de fluido y temperaturas se puede saber la energía térmica absorbida por esa vivienda.

Por tanto, plantear el análisis de las redes de Kirchhoff desde el punto de vista de considerarlas formadas por dos partes es de notable utilidad. El objetivo de este planteamiento ha de ser principalmente el de crear métodos para obtener toda la información posible sobre cada parte de la red a partir solo de valores de variables que se puedan medir en los terminales.

Multipolos.- *Si las tensiones de Kirchhoff de las ramas de un conjunto de corte de una red de Kirchhoff son cero, cada una de las dos partes en que ese* *conjunto de corte divide a la red se llama multipolo. Las ramas del conjunto de corte se llaman terminales de los multipolos*[74].

Si el número de terminales de un multipolo es uno, el multipolo se llama monopolo; si es dos, dipolo; si es tres tripolo; si es cuatro, cuadripolo; y así sucesivamente [1], [2][75].

Cada terminal une, por tanto, dos nudos de la red que tienen el mismo potencial. Ese potencial común a los dos nudos se llama potencial de ese terminal.

Como los terminales de un multipolo son un conjunto de corte, *la*

---

[74] Realmente la definición permite que cualquier red de Kirchhoff pueda ser considerada dividida en dos multipolos, pues, como se vio en el capítulo 9, cualquier nudo puede ser sustituido por dos nudos con el mismo potencial y una rama que los une, cuya tensión, por tanto es cero, y resulta una red equivalente a la primera. Eligiendo un conjunto de nudos adecuado, siempre es posible separar una red en dos multipolos por el procedimiento citado de sustituir cada uno de esos nudos por un par de nudos y una rama. De esa manera se ha conseguido, por ejemplo, que la red de la figura 1 aparezca dividida en dos dipolos.

Excepto en [1] y [2], en la bibliografía no existe una parte que se dedique al estudio agrupado y sistemático de los multipolos tal como aquí se hace. Sí existen partes que se dedican al estudio de redes de dos puertas con dos terminales en cada puerta, que se suelen denominar redes de dos puertas y también cuadripolos [51]-[53]. Pero, como se verá, realmente las redes de varias puertas, o redes multipuerta, son casos particulares de multipolos, pero no se identifican con ellos. En [54] se dedica una parte extensa a Multipolos, y se distingue entre multipolos y multipuertas, que es a lo que se dedica ese capítulo a pesar de su título. Además, ese autor considera que cada puerta de las multipuertas solo tiene dos terminales, de forma que solo los multipolos con un número par de terminales serían candidatos a ser redes multipuertas. Insistiendo en la paridad de los terminales incluso cita el nombre de multipolos para designar a las redes multipuertas.

[75] En inglés se ha utilizado preferentemente 'multi-terminal network' para designar lo que aquí se llama multipolo [6], [55], [56].

suma de las intensidades de los terminales de un multipolo es cero.

De una red dividida en dos multipolos se dice que es un *acoplamiento* de esos dos multipolos.

Nótese que si una red está dividida en dos multipolos A y B, esos dos multipolos tienen el mismo número de terminales.

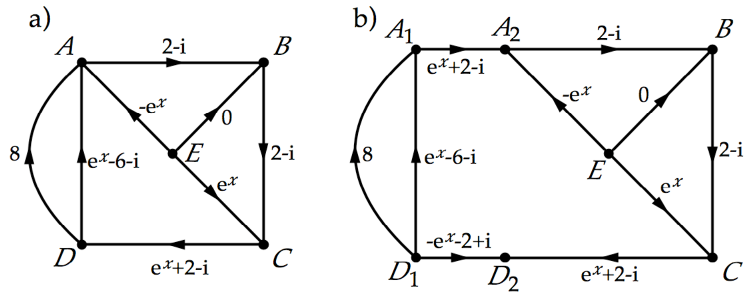

Fig. 1.- La red de Kirchhoff de la figura b) es equivalente a la de la figura a); pero en la de la figura b) la red aparece dividida en dos dipolos de terminales A_1A_2 y D_1D_2.

La red de Kirchhoff de la figura 1a se ha transformado en otra red de Kirchhoff equivalente, la 1b, que aparece dividida en dos dipolos por el conjunto de corte constituido por las ramas A_1A_2 y D_1D_2. El potencial de los nudos A_1 y A_2 es el potencial del nudo *A*, y también el potencial del terminal A_1A_2; el potencial de los nudos D_1 y D_2 es el potencial del nudo *D*, y del terminal D_1D_2. Las intensidades $i_{A_1A_2}$ e $i_{D_1D_2}$ son las intensidades de los terminales A_1A_2 y D_1D_2 respectivamente. Como esos terminales constituyen un conjunto de corte, la suma de esas intensidades es cero:

$$\left(\mathrm{e}^x + 2 - i\right) + \left(-\mathrm{e}^x - 2 + i\right) = 0$$

11.1. Potenciales e intensidades de los terminales de los multipolos

En la figura 2 se muestra una red dividida en dos multipolos de t terminales. La red de la figura 2 es el acoplamiento de los multipolos A y B.

La intensidad de Kirchhoff de un terminal dirigida hacia un multipolo, se llama *intensidad de ese terminal* del multipolo. En la figura 2, i_1 es la intensidad de Kirchhoff del terminal 1 del multipolo B. La intensidad del terminal 1 del multipolo A es $-i_1$.

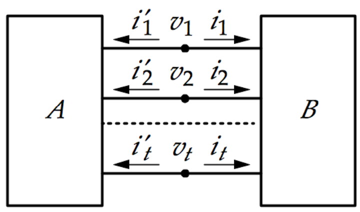

Fig. 2.- Una red dividida en dos multipolos de t terminales.

Si $v_1, v_2, \dots, v_t$ son los potenciales, e $i_1, i_2, \dots, i_t$ las intensidades de Kirchhoff de los terminales de un multipolo, esos potenciales e intensidades de Kirchhoff se llaman *variables de entrada del multipolo*. Pueden ordenarse en forma de matrices columna así:

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_t \end{bmatrix} \qquad [i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdots \\ i_t \end{bmatrix}$$

La matriz $[v]$ se llama *matriz de los potenciales de Kirchhoff de los terminales*, y la matriz $[i]$ *matriz de las intensidades de Kirchhoff de los terminales* del multipolo.

De la definición de intensidad de un terminal se deduce que la intensidad de Kirchhoff de un terminal de un multipolo es opuesta a la intensidad de ese mismo terminal del multipolo acoplado al primero. En la figura 2, $i'_1 = -i_1$ y, en general, $i'_k = -i_k$. Es decir, si $[i']$ es la matriz de las intensidades de Kirchhoff de los terminales de un multipolo, e $[i]$ la matriz de las intensidades de los terminales del multipolo acoplado a él, con el que forma la red completa, se cumple que

$$[i'] = -[i]$$

Como se ha dicho, los terminales de un acoplamiento de multipolos son un conjunto de corte de la red, por lo que la suma de las intensidades de Kirchhoff de los terminales de un multipolo es cero. Por ejemplo, en el multipolo de la figura 2

$$\sum_{k=1}^{t} i_k = 0 \tag{1}$$

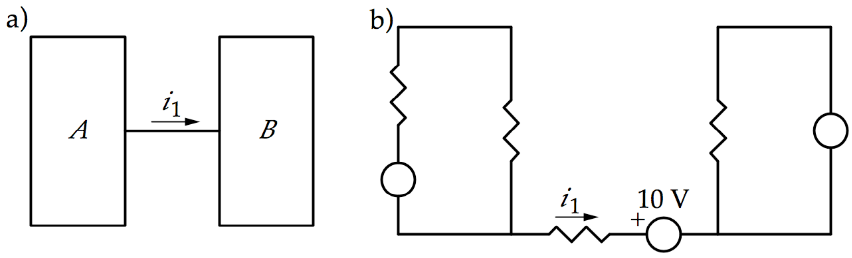

Fig. 3.- Si a) y b) son dos redes de Kirchhoff, $i_1 = 0$ en ambas.

Una consecuencia es que si las dos partes de una red de Kirchhoff que se consideran son monopolos, la intensidad por su terminal es cero. Eso se expresa diciendo que la intensidad del único terminal de un monopolo de una red de Kirchhoff es cero (fig. 3). Por tanto, si dos partes de una red eléctrica de corrientes estacionarias están unidas por un solo conductor, la intensidad por ese conductor es cero (fig. 3b), y también lo es su transformada de Laplace, y su fasor si se trata de una red sinusoidal.

Si la red 3a es una red hidráulica de corrientes estacionarias con dos partes unidas por una tubería, e i_1 representa al caudal de esa tubería, ese caudal es cero[76].

Otra consecuencia de (1) es que si la red de Kirchhoff consiste en el acoplamiento de dos dipolos, la intensidad que entra por un terminal hacia un dipolo es la misma que sale de ese dipolo por el otro terminal. En efecto, la fórmula (1) aplicada a la red de Kirchhoff de la figura 4 es $i_1 - i_2 = 0$, con lo que $i_1 = i_2$. Como una rama de una red de Kirchhoff es un dipolo acoplado al resto de la red, que es otro dipolo, la intensidad que entra a la rama por un terminal es igual a la intensidad que sale de la rama por el otro terminal. De hecho, para muchos fines, dipolo y rama se toman como sinónimos en la Teoría de Redes de Kirchhoff y en la Teoría de Redes Eléctricas.

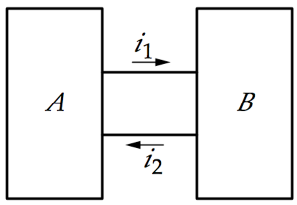

Fig. 4.- En una red de Kirchhoff, formada por acoplamiento de dos dipolos, $i_1 = i_2$.

De forma general, la suma de las intensidades de Kirchhoff de las ramas que unen dos partes de una red de Kirchhoff es cero. En particular, para redes eléctricas, la suma de las intensidades instantáneas de los conductores que unen dos partes de una red es cero, independientemente del número de conductores de que se trate. Por ejemplo, la suma de las intensidades instantáneas de los conductores de una línea trifásica que una dos partes de una red es cero, sea la línea de tres o cuatro hilos, y estén las intensidades equilibradas o no.

[76] Desde el punto de vista físico, que el caudal del único terminal es cero es consecuencia de que flujo estacionario significa que en la red hidráulica no hay depósitos y que el fluido es incompresible.

Como el origen de los potenciales de los nudos de una red de Kirchhoff puede ser cualquier punto, ese punto puede ser cualquiera de los terminales, por ejemplo el terminal t. En ese caso, $v_t = 0$. Como, además, $i_t = -i_1 - i_2 - \cdots - i_{t-1}$, si el terminal t se toma como origen de potenciales, se consideran matrices de los potenciales y de las intensidades de los terminales de un multipolo respectivamente a

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_{t-1} \end{bmatrix} \qquad [i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdots \\ i_{t-1} \end{bmatrix}$$

<u>Acoplamientos equivalentes de multipolos</u>.- *Dos acoplamientos de multipolos son equivalentes si su intersección es uno de lo multipolos con los mismos potenciales de sus nudos y terminales, y con las mismas intensidades de sus ramas y terminales.*

Por tanto, el multipolo común de dos acoplamientos equivalentes de multipolos tiene los mismos potenciales de los nudos y de sus terminales en las dos redes equivalentes, y también tiene iguales las intensidades de sus ramas y de sus terminales en las dos redes.

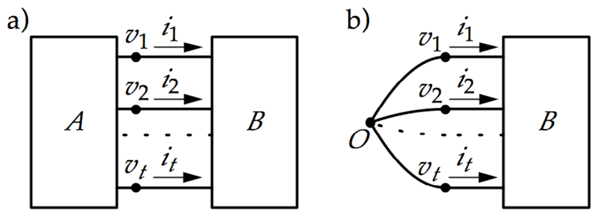

Fig. 5.- La red de Kirchhoff de la figura a) es el acoplamiento de los multipolos *A* y *B*. Esa red se ha transformado en el acoplamiento de multipolos de la figura b), que es equivalente al anterior, pues los potenciales de todos los nudos de *B* y las intensidades de todas sus ramas son las mismas en las dos redes.

La figura 5a es una red de Kirchhoff constituida por el acoplamiento de los multipolos *A* y *B*. En la figura 5b el multipolo *A* se ha sustituido por un nudo *O* del que parten los t terminales iniciales, que unen ahora el nudo *O* con el multipolo *B*. A la vez se han de mantener asignadas a esos t

terminales sus respectivas intensidades anteriores. Al nuevo nudo O se puede asignar cualquier potencial. Con esta operación se obtiene un acoplamiento de multipolos, el de la figura 5b, equivalente al de la figura 5a, pues los potenciales de todos los nudos del multipolo B y las intensidades de todas sus ramas, incluyendo las de sus terminales, son las mismas en la figura 5a que en la figura 5b.

12. Teorema de la potencia de multipolos

Potencia de Kirchhoff que absorbe un multipolo.- *Se llama potencia de Kirchhoff que absorbe un multipolo a la suma de las potencias de Kirchhoff que absorben sus ramas*. Es decir,

$$p = \sum_{h=1}^{r} p_h = \sum_{h=1}^{r} u_h j_h \tag{1}$$

$p_h = u_h j_h$ es la potencia de Kirchhoff que absorbe la rama h del multipolo. u_h y j_h son la tensión y la intensidad de la rama h. p es la potencia de Kirchhoff que absorbe el multipolo (figura 1). r es el número de ramas del multipolo.

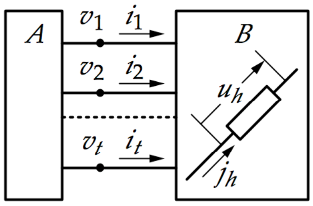

Fig. 1.- Se llama potencia que absorbe un multipolo a la suma de las potencias que absorben sus ramas.

Teorema de la potencia de multipolos.- *Sean* $v_1, v_2, ..., v_t$ *los potenciales, e* $i_1, i_2, ..., i_t$ *las intensidades de los terminales de un multipolo. La potencia de Kirchhoff que absorbe ese multipolo es*

$$p = \sum_{k=1}^{t} v_k i_k \tag{2}$$

Demostración[77].- La red de la figura 2 se ha obtenido de la red de la figura 1 por sustitución del multipolo A por un nudo O y por t ramas, sin alterar las intensidades ni los potenciales de Kirchhoff del multipolo B. Por tanto, las redes de Kirchhoff de las figuras 1 y 2 son equivalentes. En ellas coinciden todas las tensiones e intensidades de Kirchhoff de las ramas del multipolo B, por lo que la potencia de Kirchhoff que absorbe el multipolo B en ambas redes es la misma, y vale

$$p = \sum_{h=1}^{r} u_h j_h \tag{3}$$

u_h y j_h son la tensión y la intensidad de cada rama h del multipolo B con los sentidos correspondientes.

[77] Este teorema aparece por primera vez con este nombre y aplicado a todas las redes de Kirchhoff en [1], [2] y [6]. También en [55], aunque en este caso para redes eléctricas exclusivamente.

Como se verá, el teorema de la potencia de multipolos es una consecuencia del teorema de Tellegen [13]. Aunque Tellegen no lo deduce, sí parece referirse a algo parecido al teorema, solo para redes eléctricas, de forma un tanto confusa y con una importante limitación que es innecesaria. Exactamente Tellegen se refiere a ese teorema usa estas palabras: “For networks with terminal pairs it implies that the power absorbed by the branches is equal to the power delivered to the network through the terminal pairs”. La referencia a “pares de terminales” es una limitación innecesaria que parece exigida por el teorema, pero solo aparentemente. Esta limitación ha sido reproducida y mantenida por algunos autores al pie de la letra [30] –incluidos quienes se han dedicado con intensidad al estudio del teorema de Tellegen [48], [49]– de forma que solo consideran multipolos con un número par de terminales. No obstante el teorema se ha aplicado a veces en casos concretos de redes eléctricas, principalmente en sistemas trifásicos, con justificaciones particulares más o menos confusas [57].

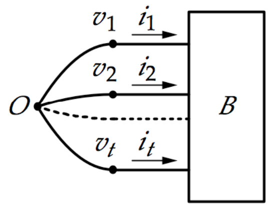

Fig. 2.- Como el acoplamiento de multipolos de esta figura es equivalente al acoplamiento de multipolos de la figura 1, el multipolo B de esta figura absorbe la misma potencia de Kirchhoff que el multipolo B de la figura 1.

Al nudo O de la red de la figura 2 se puede asignar cualquier potencial sin que la equivalencia de las redes de las figuras 1 y 2 se vea afectada. Si se asigna a ese nudo O el potencial cero, la red sigue siendo una red de Kirchhoff, pero entonces las tensiones de las ramas que van del punto O a cada terminal del multipolo B son $-v_1$, $-v_2$, ..., $-v_t$. O sea, los valores opuestos de los potenciales de los terminales. Si se aplica ahora el teorema de Tellegen a la red de la figura 2 se obtiene

$$p - v_1 i_1 - v_2 i_2 - \cdots - v_t i_t = 0$$

Se ha utilizado el hecho de que p es la suma de los productos de las tensiones e intensidades de las ramas del multipolo.

Si se despeja p se tiene:

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \cdots + v_t i_t$$

O bien

$$p = \sum_{k=1}^{t} v_k i_k \tag{4}$$

Y el teorema queda demostrado[78].

[78] La demostración del teorema de la potencia de multipolos se puede hacer aunque se suponga que el punto O de la red de la figura 2 tiene un potencial cualquiera v_O. En efecto, con ese potencial, la tensión de la rama $O1$ de la figura

Cada producto $p_k = v_k i_k$ se llama *potencia de Kirchhoff que el multipolo B absorbe por el terminal* k .

La (4) también se puede escribir así:

$$p = [v]^t [i]$$

$[v]^t$ es la matriz transpuesta de la matriz columna de los potenciales de los terminales, e $[i]$ es la matriz de las intensidades de Kirchhoff de los terminales del multipolo.
El teorema de la potencia de multipolos es de gran generalidad y también de gran utilidad, pues permite conocer la potencia de Kirchhoff que absorbe un multipolo por medio de valores externos a él, en concreto, solo sabiendo los potenciales y las intensidades de Kirchhoff de sus terminales.

Por ejemplo, para una red eléctrica, la (4) significa que la potencia que absorbe un multipolo de t terminales puede ser medida con t vatímetros conectados como en la figura 3. Como se sabe, los vatímetros indican el producto de la tensión de su bobina de tensión por la intensidad de su bobina de intensidad si ese producto es constante o varía con

---

2 es $v_O - v_1$, la rama $O2$ es $v_O - v_2$, y así para cada terminal. Si se aplica ahora el teorema de Tellegen a la red de Kirchhoff de la figura 2, se tiene:

$$p + (v_O - v_1) i_1 + (v_O - v_2) i_2 + \cdots + (v_O - v_t) i_t = 0$$

De donde

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \cdots + v_t i_t + v_O (i_1 + i_2 + \cdots + i_t).$$

Como

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_t = 0$$

resulta que

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \cdots + v_t i_t$$

y el teorema está demostrado.

suficiente lentitud en el tiempo para que el vatímetro pueda ir indicando sus valores. En ese caso, la suma de las indicaciones de los vatímetros de la figura 3 es la potencia instantánea que absorbe el multipolo eléctrico, independientemente de la forma de las ondas de los potenciales y de las intensidades de los terminales.

Si los productos $v_k i_k = p_k$ varían rápidamente, cada vatímetro indica el valor medio de ese producto, y entonces (4) muestra que el valor medio de la potencia que absorbe el multipolo es la suma de las indicaciones de los t vatímetros. Esas indicaciones son los valores medios de las potencias que el multipolo absorbe por cada terminal. Y también esto es así cualquiera que sea la forma de variar en el tiempo de las tensiones y de las intensidades.

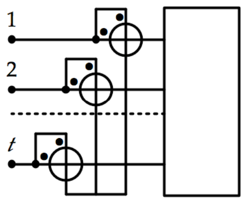

Fig. 3. La potencia de un multipolo eléctrico de t terminales puede medirse con t vatímetros conectados como se indica en esta figura.

Por ejemplo, si el multipolo eléctrico es sinusoidal, cada vatímetro indica el valor medio del producto $v_k i_k = p_k$ en un periodo de la red sinusoidal[79]. Si se halla en (4) el valor medio en un periodo, resulta:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{k=1}^{t} v_k i_k \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{t} \frac{1}{T}\int_0^T p_k \, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{t} P_k \tag{5}$$

[79] Se llama frecuencia de una red sinusoidal a la frecuencia de sus tensiones e intensidades, las cuales, en régimen permanente, son todas funciones sinusoidales del tiempo de la misma frecuencia. De la misma forma, se llama periodo de una red sinusoidal al periodo de sus tensiones e intensidades.

P_k es el valor medio del producto $v_k i_k = p_k$, o sea, la indicación del vatímetro cuya bobina de intensidad está en el terminal k. Por tanto el valor medio de la potencia que absorbe el multipolo es la suma de las indicaciones de los t vatímetros conectados como en la figura 3. Para redes sinusoidales el valor medio de la potencia instantánea en un periodo se llama potencia activa. O sea, P es la potencia activa que absorbe el multipolo sinusoidal, y P_k es la potencia activa que el multipolo absorbe por la fase k. Es decir, la figura 3 muestra también la forma de medir con t vatímetros la potencia activa que absorbe un multipolo sinusoidal, pues se cumple que

$$P = \sum_{h=1}^{r} P_h = \sum_{k=1}^{t} P_k \tag{6}$$

P_h es el valor medio de la potencia instantánea p_h que absorbe la rama h.

Si las ondas de intensidad y de tensión están deformadas respecto a la sinusoide[80] los vatímetros siguen indicando el valor medio de las potencias, y la suma de sus indicaciones es, en todos los casos, el valor medio de la potencia que absorbe el multipolo. Por eso la deformación de las ondas de tensión y de intensidad respecto a la sinusoide no influye en el resultado de la medida de la potencia activa.

Siguiendo con los ejemplos de las redes eléctricas, como las transformadas de Laplace de las tensiones e intensidades eléctricas instantáneas, cualquiera que sea su forma de onda, son tensiones e intensidades de Kirchhoff respectivamente, la (4) se cumple también en la forma [1], [2], [6]

[80] El desarrollo de Fourier de ondas no sinusoidales contiene siempre armónicos de orden superior a uno, que es el orden del término fundamental; por eso, a veces, se dice de las ondas deformadas que contienen armónicos.

$$\sum_{h=1}^{r} U_h(s) J_h(s) = \sum_{k=1}^{t} V_k(s) I_k(s) \tag{7}$$

$U_h(s)$ y $J_h(s)$ son las transformadas de Laplace de la tensión y de la intensidad de la rama h. $V_k(s)$ e $I_k(s)$ son las transformadas de Laplace del potencial y de la intensidad del terminal k, respectivamente.

Si la red eléctrica es sinusoidal, y $\boldsymbol{U}_h$ y $\boldsymbol{J}_h$ son los fasores de la tensión y de la intensidad u_h y j_h de la rama h, y $\boldsymbol{V}_k$ e $\boldsymbol{I}_k$ son los fasores del potencial y de la intensidad del terminal k, como los fasores de las intensidades y tensiones sinusoidales son intensidades y tensiones de Kirchhoff respectivamente, la (4) también se cumple en la forma

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{U}_h \boldsymbol{J}_h = \sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{V}_k \boldsymbol{I}_k \tag{8}$$

También los conjugados de esos fasores son intensidades y tensiones de Kirchhoff, por lo que de (4) también se deduce que

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{U}_h^* \boldsymbol{J}_h^* = \sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{V}_k^* \boldsymbol{I}_k^* \tag{9}$$

Y también

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{U}_h \boldsymbol{J}_h^* = \sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{V}_k \boldsymbol{I}_k^* \tag{10}$$

Y

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{U}_h^* \boldsymbol{J}_h = \sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{V}_k^* \boldsymbol{I}_k \tag{11}$$

U otras combinaciones como, por ejemplo,

$$\sum_{h=1}^{r} u_h J_h(s) = \sum_{k=1}^{t} v_k I_k(s) \tag{12}$$

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{U}_h j_h = \sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{V}_k i_k \tag{13}$$

$$\sum_{h=1}^{r} U_h(s) \boldsymbol{J}_h^* = \sum_{k=1}^{t} V_k(s) \boldsymbol{I}_k^* \tag{14}$$

Por otra parte, se llama potencia compleja $\boldsymbol{S}$ que absorbe un multipolo sinusoidal a la suma de las potencias complejas que absorben sus ramas:

$$\boldsymbol{S} = \sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{S}_h = \sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{U}_h \boldsymbol{J}_h^* \tag{15}$$

$\boldsymbol{S}_h$ es la potencia compleja que absorbe la rama h, y $\boldsymbol{U}_h$ y $\boldsymbol{J}_h$ son los fasores de su tensión y de su intensidad respectivamente. Por tanto, según (10), esa potencia compleja se obtiene también así:

$$\boldsymbol{S} = \sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{V}_k \boldsymbol{I}_k^* \tag{16}$$

$\boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{V}_k \boldsymbol{I}_k^*$ se llama potencia compleja que absorbe el multipolo por el terminal k.

La potencia compleja que absorbe un multipolo, que es un número complejo, puede ponerse de varias formas:

$$\boldsymbol{S} = S\underline{/\varphi} = S\cos\varphi + \mathrm{j}S\mathrm{sen}\varphi = P + \mathrm{j}Q = \sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{S}_h = \sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{U}_h \boldsymbol{J}_h^* =$$

$$= \sum_{h=1}^{r} \left(U_h J_h \cos\varphi_h + \mathrm{j} U_h J_h \mathrm{sen}\varphi_h \right) = \sum_{h=1}^{r} P_h + \mathrm{j} \sum_{h=1}^{r} Q_h \tag{17}$$

S, que es el módulo de la potencia compleja $\boldsymbol{S}$, se llama potencia aparente del multipolo. φ es al argumento de la potencia compleja $\boldsymbol{S}$. $P = S\cos\varphi$ es la potencia activa y $Q = S\mathrm{sen}\varphi$ es la potencia reactiva que absorbe el multipolo[81]. $P_h = U_h J_h \cos\varphi_h$ es la potencia activa y $Q_h = U_h J_h \mathrm{sen}\varphi_h$ es la potencia reactiva que absorbe la rama h. Las igualdades (17) muestran que la potencia activa que absorbe el multipolo es también la suma de las potencias activas que absorben las ramas del multipolo, y que la potencia reactiva que absorbe el multipolo es la suma de las potencias reactivas que absorben sus ramas:

$$P = \sum_{h=1}^{r} P_h \tag{18}$$

$$Q = \sum_{h=1}^{r} Q_h \tag{19}$$

Si se comparan (16) y (17) resulta:

$$\boldsymbol{S} = P + \mathrm{j}Q = \sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{S}_k = \sum_{k=1}^{t} P_k + \mathrm{j}\sum_{k=1}^{t} Q_k = \sum_{k=1}^{t} \left(V_k I_k \cos\varphi_k + \mathrm{j} V_k I_k \mathrm{sen}\varphi_k \right) \tag{20}$$

$P_k = V_k I_k \cos\varphi_k$ se llama potencia activa y $Q_k = V_k I_k \mathrm{sen}\varphi_k$ potencia reactiva que absorbe el multipolo por el terminal k. φ_k es el argumento de $\boldsymbol{S}_k$, y es también la diferencia de fase entre el potencial y la intensidad del terminal k.

Se ve que la potencia activa que absorbe el multipolo es la suma de las potencias activas que absorbe por cada terminal, es decir,

---

[81] Las potencias activa y reactiva que absorbe un multipolo son números reales que pueden ser positivos o negativos. Por eso hay que decir siempre de qué potencia se habla, si de la potencia que absorbe el multipolo o de la que entrega. Sin embargo la potencia aparente es siempre un número real positivo, pues es el módulo de la potencia compleja, por eso carece de sentido decir de una potencia aparente que es absorbida o entregada, pues esa diferencia no existe en esa potencia. Conviene decir, simplemente, que la potencia aparente del multipolo tiene tal valor.

$$P = \sum_{k=1}^{t} P_k \tag{21}$$

Este resultado se ha obtenido de (16), pero había sido obtenido antes de forma general en (6), fórmula que muestra que el valor medio de la potencia que absorbe un multipolo es la suma de los valores medios de las potencias que absorbe por los terminales, y las potencias activas son valores medios de las potencias en redes sinusoidales.

Las igualdades (20) muestran también que la potencia reactiva que absorbe un multipolo sinusoidal es la suma de las potencias reactivas que absorbe el multipolo por sus terminales:

$$Q = \sum_{k=1}^{t} Q_k \tag{22}$$

Esta conclusión es una consecuencia del teorema de la potencia de multipolos aplicada a redes fasoriales en las que las tensiones de Kirchhoff son los fasores de las tensiones sinusoidales, y las intensidades de Kirchhoff son los conjugados de los fasores de las intensidades sinusoidales, es decir, es una consecuencia de (16).

Cada varímetro conectado como los vatímetros de la figura 3 indica el producto $Q_k = V_k I_k \text{sen}\varphi_k$, o sea, la potencia reactiva que absorbe el multipolo a través del terminal k. Por tanto la suma de las indicaciones de los t varímetros es la potencia reactiva Q que absorbe el multipolo[82].

Pero el teorema de la potencia de multipolos es útil para otros sistemas que pueden describirse por medio de redes de Kirchhoff. Por ejemplo, si el multipolo B representado en la figura 1 es parte de una red

[82] La visión general que de la potencia de receptores proporciona el teorema de la potencia de multipolos tiene otras muchas aplicaciones prácticas en las redes eléctricas, en especial en sistemas trifásicos, algunas de las cuales ya han sido puestas de manifiesto en algunas publicaciones [55], [56].

hidráulica de flujo estacionario, cuyas intensidades de Kirchhoff son los caudales, y los potenciales de Kirchhoff son las presiones de los nudos, la potencia hidráulica que absorbe la rama h del multipolo es $p_h = \pi_h G_h$, donde π_h es la diferencia de presiones de los terminales de la rama h y G_h el caudal de la rama h. La potencia hidráulica que absorbe el multipolo es la suma de las potencias hidráulicas que absorben sus r ramas:

$$p = \sum_{h=1}^{r} \pi_h G_h \tag{23}$$

El teorema de la potencia de multipolos, que es la fórmula (2), aplicado a ese multipolo hidráulico, conduce a la igualdad

$$p = \sum_{k=1}^{t} \pi_k G_k = \sum_{k=1}^{t} p_k \tag{24}$$

π_k es ahora la presión del terminal k y G_k es el caudal que entra al multipolo por el terminal k. p_k es la potencia hidráulica que absorbe el multipolo por el terminal k.

La (24) indica una forma de medir la potencia que absorbe el multipolo. Consiste en medir la presión π_k y el caudal de cada terminal, lo que puede hacerse con t manómetros y t caudalímetros instalados en los t terminales. La suma de los productos de las indicaciones de los manómetros y de los correspondientes caudalímetros es la potencia hidráulica que absorbe el multipolo.

El multipolo hidráulico puede estar constituido por cualesquiera elementos hidráulicos: turbinas, bombas o tuberías. La potencia que se mide es toda la potencia que absorben todos los elementos que lo constituyen. Esa potencia puede ser negativa, en cuyo caso el multipolo entrega potencia.

La presión π_k que se mide en cada terminal k puede ser la presión absoluta o la diferencia de presión entre cada terminal y cualquier punto común arbitrario.

Si en el mismo multipolo hidráulico las intensidades siguen siendo los caudales, pero los potenciales son las temperaturas de los nudos, la potencia térmica que cada rama absorbe del fluido es

$$p_h = cd\tau_h G_h \tag{25}$$

c es el calor específico del fluido, d su densidad, τ_h la diferencia de temperaturas entre los extremos de la rama h, y G_h el caudal de la rama h. La potencia calorífica que absorbe el multipolo es la suma de las potencias caloríficas que absorben sus ramas, es decir,

$$p = cd\sum_{h=1}^{r} \tau_h G_h \tag{26}$$

Por otra parte, el teorema de la potencia de multipolos (2) aplicado a este multipolo conduce a la igualdad

$$\sum_{h=1}^{r} \tau_h G_h = \sum_{k=1}^{t} \tau_k G_k \tag{27}$$

Si se multiplican los dos miembros de (27) por cd, resulta:

$$p = cd\sum_{h=1}^{r} \tau_h G_h = cd\sum_{k=1}^{t} \tau_k G_k = \sum_{k=1}^{t} p_k \tag{28}$$

$p_k = cd\tau_k G_k$ es la potencia térmica que absorbe el multipolo por el terminal k.

La (28) muestra que la potencia térmica que absorbe el multipolo se puede medir por medio de t termómetros y t caudalímetros instalados en los terminales. La suma de los t productos correspondientes $\tau_k G_k$ multiplicada por el calor específico y por la densidad del fluido es la potencia calorífica que absorbe el multipolo de t terminales.

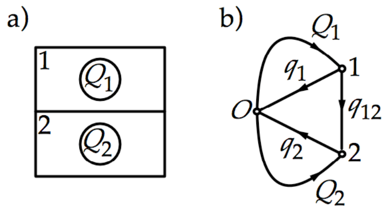

Fig. 4.- Según el teorema de la potencia de multipolos, la potencia de Kirchhoff que absorbe la rama 12 vale $p = T_1(Q_1 - q_1) + T_2(Q_2 - q_2)$.

La potencia de Kirchhoff que absorbe el dipolo formado por los nudos 1 y 2 y la rama que une esos dos nudos en la red de la figura 4b es la tensión de Kirchhoff por la intensidad de Kirchhoff de esa rama. La tensión de Kirchhoff es la diferencia de las temperaturas entre sus terminales, $T_1 - T_2$; y la intensidad de Kirchhoff es la potencia calorífica q_{12}. Por tanto, la potencia de Kirchhoff que absorbe el dipolo es

$$p = (T_1 - T_2)q_{12}$$

Por otra parte, según el teorema de la potencia de multipolos expresado por (4), esa potencia de Kirchhoff se puede poner también en función de las variables de los terminales, es decir,

$$p = T_1(Q_1 - q_1) + T_2(Q_2 - q_2) \quad (29)$$ [83]

Nótese que las potencias de Kirchhoff de (29) no son potencias en sentido termodinámico.

[83] Se puede comprobar en este ejemplo, como en el resto de ellos, que se cumple el teorema de la potencia de multipolos. En efecto, si en los nudos 1 y 2 de la figura 4 se aplica la primera ley de Kirchhoff se tiene: $Q_1 = q_1 + q_{12}$ y $Q_2 = q_2 - q_{12}$. Si se sustituyen esto valores en (29) resulta $p = T_1(Q_1 - q_1) + T_2(Q_2 - q_2) = T_1(q_1 + q_{12} - q_1) + T_2(q_2 - q_{12} - q_2) = (T_1 - T_2)q_{12}$, que es la potencia que absorbe la rama 12.

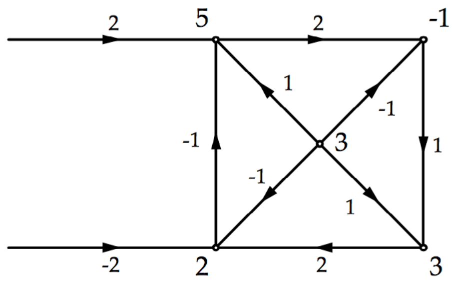

Fig. 5.- Dipolo de una red de Kirchhoff.

En la figura 5 se muestra un dipolo de una red de Kirchhoff. Al lado de cada nudo se indica su potencial, y al lado de cada rama su intensidad de Kirchhoff. Ambos valores, potenciales e intensidades, son números reales. La potencia de Kirchhoff que absorbe el dipolo es, por una parte, la suma de las potencias que absorben las ramas de los lados del cuadrado y sus diagonales:

$$p = \left(5-(-1)\right)2 + (-1-3)1 + (3-2)2 + (2-5)(-1) +$$
$$+(3-5)1 + \left(3-(-1)\right)(-1) + (3-3)1 + (3-2)(-1) = 6$$

Esa potencia, hallada según el teorema de la potencia de multipolos como suma de los productos de las intensidades por los potenciales de los terminales resulta, naturalmente, la misma:

$$p = 5 \times 2 + 2(-2) = 6$$

Nótese que, en este caso, a diferencia de los casos anteriores, ni los potenciales ni las intensidades de Kirchhoff son medidas de magnitud física alguna. Tampoco, por tanto, su producto tiene ningún significado físico. Este hecho resalta el carácter de propiedad puramente topológica del teorema de la potencia de multipolos, igual que del resto de la teoría de las redes de Kirchhoff.

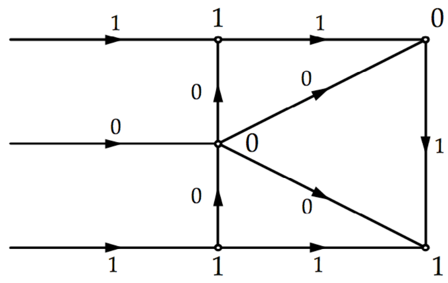

Fig. 6.- Tripolo de una red de Kirchhoff.

La figura 6 muestra un tripolo cuyas intensidades y potenciales de Kirchhoff son elementos del grupo conmutativo $\{0,1\}$ con las dos operaciones –suma y producto conmutativos– que se vienen utilizando en esta tesis. La potencia de Kirchhoff que absorbe el tripolo, hallada como suma de las potencias de Kirchhoff que absorben sus ramas internas es

$$p=(1-0)1+(0-1)1+(1-1)(-1)+(1-0)0+(0-1)0+$$
$$+(0-0)0+(0-1)0=1+1+0+0+0+0+0=0$$

Si se aplica el teorema de la potencia de multipolos, esa potencia se puede hallar como suma de los productos de los potenciales por las intensidades de los terminales:

$$1\times1+0\times0+1\times1=1+0+1=0$$

Los resultados con los dos procedimientos son idénticos.

12.1. Un terminal como origen de potenciales

La referencia de potenciales de Kirchhoff de una red de Kirchhoff puede ser cualquier punto. Por tanto, la referencia de potenciales de Kirchhoff de (4) puede ser cualquier punto. Por ejemplo, se puede elegir como referencia cualquiera de los terminales del multipolo. Si ese terminal es el t, $v_t=0$ en (4), con lo que la potencia de Kirchhoff que absorbe el multipolo resulta

$$p = \sum_{k=1}^{t-1} v_k i_k \tag{30}$$

v_k es ahora la tensión entre cada terminal k y el t [84]. Eso significa que la (7) y la (8), por ejemplo, pueden escribirse también así[85]:

---

[84] El paso de (4) a (30) se puede hacer sin ninguna referencia al origen arbitrario de potenciales, y utilizar solo una transformación matemática. En efecto, sea la suma de productos siguiente, formado cada uno de esos productos por dos factores

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \cdots + v_t i_t$$

con la condición de que $i_1 + i_1 + \cdots + i_t = 0$. Si a todos los factores v_k se resta v_t, y se halla la suma de los nuevos productos, se tiene:

$$\left(v_1 - v_t\right) i_1 + \left(v_2 - v_t\right) i_2 + \cdots + \left(v_{t-1} - v_t\right) i_{t-1} + \left(v_t - v_t\right) i_t =$$

$$= v_1 i_1 + v_2 i_2 + \cdots + v_t i_t - v_t \left(i_1 + i_2 + \cdots + i_t\right) =$$

$$= v_1 i_1 + v_2 i_2 + \cdots + v_t i_t = p$$

Se ha utilizado el hecho de que

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_t = 0 .$$

Esta es otra posible demostración del paso de (4) a (30). Nótese que en la terminología de la teoría de las redes de Kirchhoff, restar v_t equivale a tomar el terminal t como origen de potenciales.

Si se aplica lo anterior a un dipolo, resulta:

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

v_1 y v_2 son los potenciales de los terminales, e i_1 e i_2 las intensidades de esos terminales. Si se resta v_2 a los potenciales el producto resulta:

$$\left(v_1 - v_2\right) i_1 = v_1 i_1 - v_2 i_1 = v_1 i_1 + v_2 i_2 = p$$

Se ha tenido en cuenta que $i_2 = -i_1$.

$$\sum_{h=1}^{r} U_h(s) J_h(s) = \sum_{k=1}^{t-1} V_k(s) I_k(s) \tag{31}$$

$$\sum_{h=1}^{r} \boldsymbol{U}_h \boldsymbol{J}_h = \sum_{k=1}^{t-1} \boldsymbol{V}_k \boldsymbol{I}_k \tag{32}$$

Ahora $V_k(s)$ de (31) es la transformada de Laplace de la tensión entre el terminal k y el t, y $\boldsymbol{V}_k$ de (32) es el fasor de la tensión entre el terminal k y el t si el multipolo es sinusoidal. De forma parecida ocurre con las igualdades similares que siguen a las citadas.

Realmente no es necesario que la constante que se reste a todos los factores v_k del producto sea uno de los factores tal como v_t. El resultado es el mismo si se resta cualquier constante. En términos de la teoría de las redes de Kirchhoff eso significa que el origen de potenciales puede situarse en cualquier punto.

Resulta por tanto que, si se tiene un producto de la forma

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \cdots + v_t i_t$$

en el que

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_t = 0$$

ese producto no se altera si a cada v_k se suma (o se resta) una constante cualquiera.

[85] La fórmula (30) se podía haber obtenido directamente asignando al punto O de la figura 2 el potencial del terminal t: $v_O = v_t$. En efecto, si se aplica entonces el teorema de Tellegen a la red de la figura 2 resulta:

$$p + (v_t - v_1) i_1 + (v_t - v_2) i_2 + \cdots + (v_t - v_{t-1}) i_{t-1} + (v_t - v_t) i_t = 0$$

O bien

$$p = (v_1 - v_t) i_1 + (v_2 - v_t) i_2 + \cdots + (v_{t-1} - v_t) i_{t-1}$$

Y el teorema está demostrado.

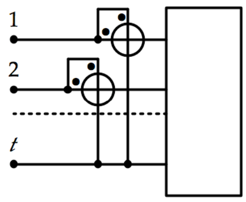

Fig. 7.- Forma de medir la potencia de un multipolo eléctrico con $t-1$ vatímetros.

Aplicada la (30) a multipolos eléctricos indica que la potencia que absorbe un multipolo eléctrico se puede medir con $t-1$ vatímetros conectados como en la figura 7. La suma de las indicaciones de los $t-1$ vatímetros es la potencia eléctrica que absorbe el multipolo. La (30) también indica que la (21) y la (22) son ciertas así:

$$P = \sum_{k=1}^{t-1} P_k \tag{33}$$

$$Q = \sum_{k=1}^{t-1} Q_k \tag{34}$$

La (33) significa que la potencia activa P que absorbe un multipolo sinusoidal puede medirse con $t-1$ vatímetros conectados como en la figura 7, y la (34) que la potencia reactiva Q que absorbe ese multipolo puede medirse con $t-1$ varímetros conectados como en la figura 7.

Así mismo, la (23) y la (24) pueden ponerse como

$$p = \sum_{h=1}^{r} \pi_h G_h = \sum_{k=1}^{t-1} \pi_k G_k \tag{35}$$

π_k es ahora la diferencia de presiones entre el terminal k y el de referencia, que se supone el t, en un multipolo hidráulico que absorbe la potencia hidráulica p.

De la misma forma, la (28) se transforma en

$$p = cd \sum_{h=1}^{r} \tau_h G_h = cd \sum_{k=1}^{t-1} \tau_k G_k \tag{36}$$

τ_k es ahora la diferencia entre las temperaturas de los terminales k y t. G_k sigue siendo el caudal que entra al multipolo por el terminal k.

La (30) aplicada a la red de la figura 4b transforma la (29) en

$$p = \left(T_1 - T_2\right)\left(Q_1 - q_1\right) \tag{37}$$

Se ha tomado como referencia de potenciales de Kirchhoff, que aquí son temperaturas, el terminal 2. Así $T_1 - T_2$ es la diferencia de temperaturas entre los terminales 1 y 2, y $Q_1 - q_1$ es la intensidad de Kirchhoff que entra por el terminal 1. Las intensidades de Kirchhoff son en estas redes potencias caloríficas.

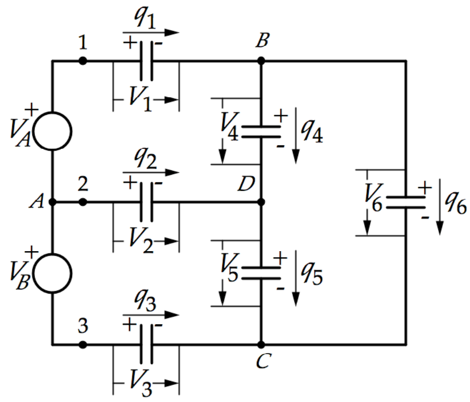

Fig. 8.- La potencia de Kirchhoff que absorbe el multipolo de la derecha de terminales 1, 2 y 3 es $V_A q_1 - V_B q_3$.

La red de la figura 8 es una red de Kirchhoff. La intensidad de Kirchhoff de cada rama es la carga del condensador de esa rama. La intensidad de Kirchhoff de cada fuente es también la carga del condensador con el que esa fuente está en serie. Los potenciales de los nudos son los potenciales eléctricos, por lo que las tensiones de Kirchhoff de las ramas son las tensiones eléctricas.

La potencia de Kirchhoff que absorbe el multipolo de la derecha de los terminales 1, 2 y 3 es la suma de las potencias de Kirchhoff que absorben sus seis ramas, que son los seis condensadores:

$$p = V_1 q_1 + V_2 q_2 + V_3 q_3 + V_4 q_4 + V_5 q_5 + V_6 q_6 \tag{38}$$

Según el teorema de la potencia de multipolos en la forma (30) aplicado a la red de la figura 6, esa potencia de Kirchhoff que absorbe el multipolo a la derecha de los terminales 1, 2 y 3 es

$$p = V_A q_1 - V_B q_3 \tag{39}$$

Se ha tomado el terminal 2 como origen de potenciales. Por tanto resulta:

$$V_A q_1 - V_B q_3 = V_1 q_1 + V_2 q_2 + V_3 q_3 + V_4 q_4 + V_5 q_5 + V_6 q_6 \tag{40}$$

Si se multiplica por $1/2$, la (40) adquiere significado físico:

$$\frac{1}{2}V_A q_1 - \frac{1}{2}V_B q_3 = \frac{1}{2}V_1 q_1 + \frac{1}{2}V_2 q_2 + \frac{1}{2}V_3 q_3 + \frac{1}{2}V_4 q_4 + \frac{1}{2}V_5 q_5 + \frac{1}{2}V_6 q_6 \tag{41}$$

El segundo miembro es la suma de las energías que tienen almacenadas los condensadores en su campo eléctrico. El primer miembro son las energías que han entregado las fuentes de tensión a los condensadores. La energía que ha entregado la fuente V_B es negativa, lo que significa que solo la fuente V_A ha entregado toda la energía necesaria para la carga de los condensadores y la que absorbió la fuente V_B durante el proceso de carga.

Si se aplica el teorema de la potencia de multipolos en la forma de la igualdad (30) al dipolo de la figura 5, la potencia de Kirchhoff que absorbe resulta también igual a 6:

$$p = (5-2)2 = 6$$

De la misma forma, para el tripolo de la figura 6, si se toma como origen de potenciales el terminal inferior de esa figura, se tiene:

$$p = (1-1)1 + (0-1)0 = 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$$

El mismo resultado que se obtuvo al aplicar el teorema en la forma de la igualdad (4).

Se puede comprobar que el resultado es el mismo si se toma como referencia de potenciales cualquier otro terminal.

Ejemplo.

En la figura 9 se muestra una carga trifásica de cuatro hilos. Las tensiones están equilibradas y el valor eficaz de la tensión entre fases es $U = 400\,\mathrm{V}$. Los fasores de las intensidades de las fases se indican en la figura. Por tanto, con el origen de fases en el hilo neutro la potencia compleja que absorbe el receptor por cada fase es

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_R &= \boldsymbol{V}_R \boldsymbol{I}_R^* = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/0^\circ}\boldsymbol{I}_R^* = 692.82\underline{/-15^\circ} \\
\boldsymbol{S}_S &= \boldsymbol{V}_S \boldsymbol{I}_S^* = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-120^\circ}\boldsymbol{I}_S^* = 2309.40\underline{/-150^\circ} \\
\boldsymbol{S}_T &= \boldsymbol{V}_T \boldsymbol{I}_T^* = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-240^\circ}\boldsymbol{I}_T^* = 4618.80\underline{/60^\circ}
\end{aligned} \tag{42}
$$

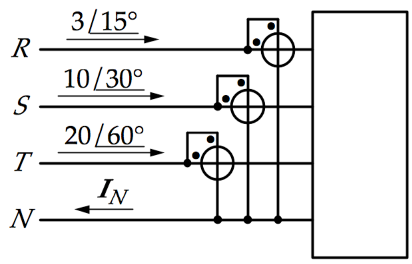

Fig. 9.- Una forma de medir la potencia de un receptor trifásico de cuatro hilos.

Como se ha tomado como origen de potenciales el neutro, la potencia que el receptor trifásico absorbe por el neutro es cero.

La parte real de cada una de las tres igualdades anteriores es la indicación del vatímetro que tiene su bobina de intensidad en la fase indicada por los subíndices. La parte imaginaria de cada una de esas igualdades es la indicación del varímetro cuya bobina de intensidad está en la fase que corresponde a ese subíndice.

La potencia compleja que absorbe el receptor es la suma de las potencias complejas que absorbe por cada fase, es decir, la suma de las indicaciones de los tres vatímetros es la parte real, y la suma de las indicaciones de los tres varímetros es la parte imaginaria.

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_R + \boldsymbol{S}_S + \boldsymbol{S}_T = 2839.92\underline{/\,69.84^\circ}$$

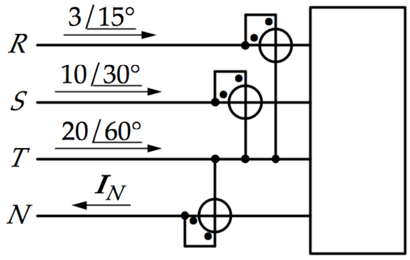

Fig. 10.- Otra forma de medir la potencia de un receptor trifásico de cuatro hilos.

Pero, en lugar de tomar como referencia de potenciales el hilo neutro, se puede tomar como referencia de potenciales una fase, por ejemplo la fase T, como se hace en la figura 10. Eso equivale a conectar los vatímetros o los varímetros como en esa figura para medir las potencias que absorbe el receptor por cada fase. Esas potencias son ahora

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}'_R &= \boldsymbol{U}_{RT}\boldsymbol{I}_R^* = U\underline{/-30^\circ}\boldsymbol{I}_R^* = 1200\underline{/-45^\circ} \\
\boldsymbol{S}'_S &= \boldsymbol{U}_{ST}\boldsymbol{I}_S^* = U\underline{/-90^\circ}\boldsymbol{I}_S^* = 4000\underline{/-120^\circ} \qquad (43) \\
\boldsymbol{S}_N &= \boldsymbol{V}_{NT}\left(-\boldsymbol{I}_N^*\right) = \left(-\boldsymbol{V}_T\right)\left(-\boldsymbol{I}_N^*\right) = \boldsymbol{V}_T\boldsymbol{I}_N^* = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-240^\circ}\boldsymbol{I}_N^* = 7296.46\underline{/\,73.03^\circ}
\end{aligned}$$

La potencia que absorbe el receptor por la fase T es ahora cero, y no lo es la potencia que absorbe por el neutro. Pero la potencia que absorbe el receptor, que es la suma de las tres potencias (43), es la misma que antes:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}'_R + \boldsymbol{S}'_S + \boldsymbol{S}_N = 2839.92\underline{/\,69.84^\circ}$$

Si el receptor trifásico es de tres hilos, la potencia que absorbe se puede medir con tres o con dos vatímetros como se indica en la figura 11. Cualquiera que sea el método, la potencia que absorbe el receptor es siempre la misma, pero la potencia que absorbe por cada terminal es distinta en cada caso. Con el método de dos vatímetros, la potencia que absorbe por cada terminal es también distinta según el terminal que se tome como referencia.

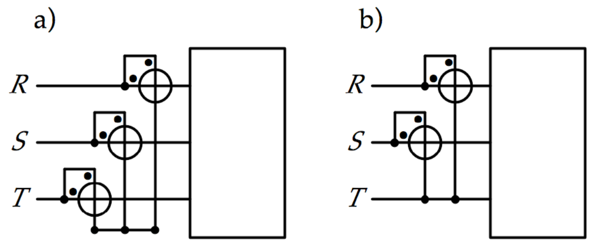

Fig. 11.- Otra forma de medir la potencia de un receptor trifásico de cuatro hilos.

Nótese que el método de los dos vatímetros y el de los dos varímetros para medir potencias activas y reactivas de cargas trifásicas de tres hilos es un caso particular del teorema de la potencia de multipolos.

12.2. Corolarios del teorema de la potencia de multipolos

Teorema.- *La potencia de Kirchhoff que absorbe un multipolo es igual a la que entrega el multipolo acoplado a él.*

Demostración.- La figura 1 representa una red de Kirchhoff formada por el acoplamiento de dos multipolos, el A y el B. Según el teorema de la potencia de multipolos la potencia que absorbe el multipolo B es

$$p_B = \sum_{k=1}^{t} v_k i_k$$

La potencia que absorbe el multipolo A es

$$p_A = \sum_{k=1}^{t} v_k \left(-i_k\right) = -\sum_{k=1}^{t} v_k i_k = -p_B$$

Por tanto, la potencia p_{eA} que entrega el multipolo A es

$$p_{eA} = -p_A = p_B$$

Y el teorema está demostrado.

Nótese de nuevo, que esta es una propiedad de las redes de Kirchhoff que confirma el Primer Principio de la Termodinámica cuando las potencias de Kirchhoff son potencias en sentido termodinámico. Pero que la propiedad de que la potencia de Kirchhoff que absorbe un multipolo es igual a la potencia de Kirchhoff que cede el acoplado a él no es una consecuencia de ese Primer Principio, pues esa propiedad también la cumplen las potencias de Kirchhoff que no son potencias en sentido termodinámico.

Otra importante consecuencia del teorema de la potencia de multipolos es la que hemos llamado relatividad de la potencia de Kirchhoff que un multipolo absorbe por cada terminal, y que se expone y comenta a continuación.

La potencia de Kirchhoff que absorbe un multipolo es un concepto absoluto en el sentido de que esa potencia es independiente del procedimiento que se emplee para determinarla, por ejemplo, por aplicación de la fórmula (4) o de la fórmula (3). Esa potencia es única. Sin embargo, la potencia de Kirchhoff que un multipolo absorbe por un terminal –tal como el terminal k– no es un concepto absoluto, pues esa potencia depende de la forma de hallar la potencia que absorbe el multipolo, de si se utiliza la fórmula (4) o la (30); y más concretamente, de la referencia de potenciales que se tome para hallar la potencia de Kirchhoff que absorbe el multipolo. Si esa referencia de potenciales cambia, también cambia, en general, el valor de la potencia de Kirchhoff que el multipolo absorbe por cada terminal k. Por ejemplo, si se utiliza la forma (4) del teorema de la potencia de multipolos, la potencia de Kirchhoff que el dipolo de la figura 5 absorbe por el terminal superior es $p_1 = 5 \times 2 = 10$, y la potencia de Kirchhoff que absorbe por el terminal inferior es $p_2 = 2(-2) = -4$, de forma que la potencia de Kirchhoff que absorbe el multipolo, que siempre es la suma de las que absorbe por sus terminales, es $p = p_1 + p_2 = 10 - 4 = 6$. Pero si se toma como referencia de potenciales el terminal inferior, el potencial de ese terminal es cero, y el del terminal superior es $5-2=3$, de forma que la potencia que absorbe el terminales superior vale $p_1 = 3\times 2 = 6$.

En el multipolo de la figura 6, las potencias de Kirchhoff que absorben los terminales con los potenciales que tienen asignados en esa figura son $p_1 = 1\times 1 = 1$ para el superior, $p_2 = 0\times 0 = 0$ para el central, y $p_3 = 1\times 1 = 1$ para el inferior. La suma es la potencia de Kirchhoff que absorbe el multipolo: $p = p_1 + p_2 + p_3 = 1+0+1 = 0$.

Si se toma como referencia de potenciales el terminal inferior, el potencial de ese terminal vale cero, y los potenciales de los otros dos son $1-1=0$ para el superior y $0-1=1$ para el central. Las potencias de Kirchhoff que el tripolo absorbe por los terminales son ahora $p_1 = 0\times 1 = 0$ y $p_2 = 1\times 0 = 0$, distintas de las de antes. La suma de esas potencias, que es la potencia de Kirchhoff que absorbe el multipolo es la misma, $p = p_1 + p_2 = 0+0 = 0$.

Esta relatividad de la potencia que un multipolo absorbe por sus terminales es una propiedad de todas las potencias de Kirchhoff, también de aquellas que son potencias en sentido termodinámico. Un ejemplo notable es el de los multipolos eléctricos. Así, la potencia activa que absorbe un receptor trifásico de cuatro hilos se puede hallar sumando las potencias activas que absorbe el receptor por sus terminales. Para su cálculo suele tomarse como referencia de potenciales el terminal del neutro. Entonces esa potencia es

$$P = P_R + P_S + P_T = V_R I_R \cos\varphi_R + V_S I_S \cos\varphi_S + V_T I_T \cos\varphi_T$$

La potencia

$$P_R = V_R I_R \cos\varphi_R$$

se llama potencia que absorbe la carga trifásica a través de la fase R, y de forma similar para el resto de las fases. Con esta manera de hallar P, la potencia que absorbe la carga por el neutro es cero. Pero si se toma como referencia de potenciales la fase T, es la potencia activa por esa fase la que es cero, mientras que la potencia activa que absorbe la carga por el neutro es ahora

$$P_N = V_T I_N \cos(\boldsymbol{V}_T, \boldsymbol{I}_N)$$

$\cos(\boldsymbol{V}_T, \boldsymbol{I}_N)$ es el coseno del ángulo que forman los fasores $\boldsymbol{V}_T$ e $\boldsymbol{I}_N$.

12.3. Potencias de receptores trifásicos

Las fórmulas relacionadas con las potencias de sistemas trifásicos son obtenidas habitualmente con demostraciones particulares de cada una de ellas [58]. El teorema de la potencia de multipolos tiene aplicación muy directa y útil en los sistemas polifásicos en general, y en los sistemas trifásicos en particular, para estas deducciones, pues las simplifica notablemente como consecuencia de manifestarse como casos particulares del teorema general.

Por ejemplo, si se toma el neutro como origen de potenciales, la potencia compleja que absorbe un receptor trifásico es

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_R + \boldsymbol{S}_S + \boldsymbol{S}_T = V_R I_R \underline{/\varphi_R} + V_S I_S \underline{/\varphi_S} + V_T I_T \underline{/\varphi_T}$$

Si el receptor está equilibrado, ocurre que $V_R = V_S = V_T = V$, $I_R = I_S = I_T = I$, y $\varphi_R = \varphi_S = \varphi_T = \varphi$. Y la potencia que absorbe el receptor es

$$\boldsymbol{S} = 3VI\underline{/\varphi} = S\underline{/\varphi} = 3VI\cos\varphi + \mathrm{j}3VI\mathrm{sen}\varphi = P + \mathrm{j}Q$$

$S = 3VI = \sqrt{3}UI$ es el módulo de la potencia compleja, y se llama potencia aparente del receptor trifásico equilibrado.

φ es del argumento de la potencia compleja, que coincide con la diferencia de fase entre la tensión entre cualquier fase y el neutro, y la intensidad de esa fase.

$P = 3VI\cos\varphi = \sqrt{3}UI\cos\varphi$ es la potencia activa que absorbe el receptor trifásico equilibrado.

$Q = 3VI\mathrm{sen}\varphi = \sqrt{3}UI\mathrm{sen}\varphi$ es la potencia reactiva que absorbe el receptor trifásico equilibrado.

Como se ve, solo con las características de los receptores trifásicos equilibrados y el teorema de la potencia de multipolos se obtienen las fórmulas de las potencias de esos receptores, sin necesidad de demostración alguna [56].

De la misma forma ocurre para receptores equilibrados de cualquier número de fases. En particular, para un receptor equilibrado de n fases, la potencia compleja que absorbe es

$$\boldsymbol{S} = nVI\underline{/\varphi} = nVI\cos\varphi + \mathrm{j}nVI\mathrm{sen}\varphi = P + \mathrm{j}Q$$

Tampoco hace falta demostración específica alguna para el método de los dos vatímetros ni para el método de los dos varímetros, pues son solo casos particulares del teorema de la potencia de multipolos.

13. Redes multipuerta

Algunos multipolos de las redes de Kirchhoff tienen unas determinadas características que permiten clasificarlos en un conjunto cuyos elementos se llaman redes multipuertas. Este capítulo se dedica a ellas.

13.1. Puertas

Puerta de un multipolo.- *Se llama puerta de un multipolo de una red de Kirchhoff a cada conjunto de sus terminales cuya suma de intensidades de Kirchhoff es nula.*

Todo multipolo tiene al menos una puerta, que es la constituida por el conjunto de todos sus terminales, pues la suma de las intensidades de Kirchhoff de los terminales de un multipolo es cero.

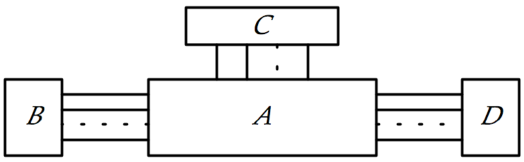

Fig. 1.- Puertas del multipolo A.

El multipolo A de la figura 1 tiene varias puertas: el conjunto de terminales que lo unen con el multipolo B es una puerta, pues ese conjunto de terminales es un conjunto de corte de la red completa, por lo que la suma de sus intensidades es cero; el conjunto de terminales que unen A con C es otra puerta, y el conjunto de terminales que unen A con D es otra puerta por la misma razón.

La unión de dos puertas de un multipolo es otra puerta de ese multipolo, pues en efecto, si un conjunto de terminales es una puerta, la suma de sus intensidades de Kirchhoff es cero; si otro conjunto es una puerta, también la suma de sus intensidades es cero; por tanto la suma de las intensidades de Kirchhoff de la unión de los dos conjuntos también es cero, por lo que la unión de esos dos conjuntos es una puerta. En la figura 1, la unión de los terminales que unen A con B y con C es una puerta.

13.2. Potencia de Kirchhoff de una puerta

Una red multipuerta es un multipolo. Si su número de terminales es t, la potencia que el multipolo absorbe es

$$p = \sum_{k=1}^{t} v_k i_k = [v]^T [i]$$

v_k e i_k son el potencial y la intensidad de Kirchhoff del terminal k. $[v]^T$ es la matriz transpuesta de la matriz columna de los potenciales de Kirchhoff de los terminales, e $[i]$ es la matriz columna de las intensidades de Kirchhoff de los terminales que entran al multipolo.

Definición.- *Si los terminales* $1,2,....,m$ *de un multipolo de una red de Kirchhoff son una puerta, se llama potencia de Kirchhoff que el multipolo absorbe por esa puerta a*

$$p_1 = \sum_{k=1}^{m} v_k i_k \qquad (1)$$

El opuesto de p_1 es la potencia que entrega el multipolo por esa puerta.

v_k e i_k son, como se dijo, el potencial y la intensidad de Kirchhoff del terminal k.

Teorema.- *Si los terminales* $1,2,....,m$ *de un multipolo de una red de Kirchhoff son una puerta, la potencia que ese multipolo absorbe por esa puerta es*

$$p_1 = \sum_{k=1}^{m-1} v_{km} i_k$$

v_{km} es la tensión entre el terminal k y el m.

<u>Demostración</u>.- Como $i_1, i_2, ..., i_m$ son intensidades de los terminales de una puerta, su suma es cero, es decir

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_{m-1} + i_m = 0$$

Por tanto

$$i_m = -i_1 - i_2 - \cdots - i_{m-1}$$

De forma que (1) se transforma en

$$p_1 = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \cdots + v_m i_m = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \cdots + v_m \left(-i_1 - i_2 - \cdots - i_{m-1}\right) =$$

$$= \left(v_1 - v_m\right) i_1 + \left(v_2 - v_m\right) i_2 + \cdots + \left(v_{m-1} - v_m\right) i_{m-1} =$$

$$= v_{1m} i_1 + v_{2m} i_2 + \cdots + v_{m-1,m} i_{m-1}$$

Es decir,

$$p_1 = \sum_{k=1}^{m-1} v_{km} i_k$$

Como se dijo, v_{km} es la tensión entre el terminal k y el m.

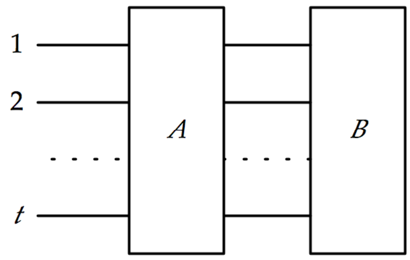

Fig. 2.- El multipolo A absorbe potencia por la puerta 1. La potencia que entrega por la puerta 2 es absorbida por el multipolo B.

Por tanto, para hallar la potencia de Kirchhoff que un multipolo absorbe por una puerta, se puede tomar como referencia de potenciales uno cualquiera de los terminales de esa puerta, tal como el terminal m. La suma de los productos de las tensiones entre los otros terminales y el terminal m por las intensidades de los terminales correspondientes es la potencia que el multipolo absorbe por esa puerta[86].

13.3. Puertas disjuntas

Puertas disjuntas.- *Dos puertas de un multipolo son disjuntas si no tienen ningún terminal común.*

Teorema.- *Si la unión de q puertas disjuntas es el conjunto de terminales del multipolo, la potencia que absorbe el multipolo es la suma de las potencias que absorbe el multipolo por esas puertas.*

Demostración.- En efecto, la potencia que absorbe el multipolo es

$$p=\sum_{k=1}^{t} v_k i_k=\sum_{k=1}^{m_1} v_k i_k+\sum_{k=m_1+1}^{m_2} v_k i_k+\cdots+\sum_{k=m_{q-1}+1}^{m_q} v_k i_k=$$

$$=p_1+p_2+\cdots+p_q$$

$p_1,p_2,...,p_q$ son las potencias que absorbe el multipolo por las puertas $1,2,...,q$ respectivamente.

[86] Esta conclusión sobre la potencia de las puertas de un multipolo se aplica a las redes eléctricas, aunque de forma muy limitada. En la práctica solo a redes de dos puertas con dos terminales en cada puerta, que a veces se llaman cuadripolos [35]. Las relaciones de potencias se aplican casi siempre sin justificación, como si fueran consecuencias evidentes del Primer Principio de la Termodinámica, lo que limitaría las relaciones de potencias a potencias de Kirchhoff que fueran potencias en sentido termodinámico. Desde luego, excepto en [2], no se ha encontrado un estudio de las potencias de las puertas, ni siquiera para redes eléctricas.

En cualquier caso queda claro que las relaciones aquí expuestas son válidas para todas las redes multipuertas de redes de Kirchhoff, y las potencias son potencias de Kirchhoff, sean o no potencias en sentido termodinámico.

14. Relación tensión-intensidad

Una rama de una red es un dipolo, pues es una parte de la red unida al resto de la red –que es otro dipolo– por dos terminales. Por eso nos referiremos a las ramas de las redes de Kirchhoff con el nombre de ramas o con el nombre de dipolos, indistintamente.

Para cada rama de una red de Kirchhoff puede existir, o no, relación entre la tensión de Kirchhoff y la intensidad de Kirchhoff de esa rama. Si existe, esa relación se llama *relación tensión-intensidad* de esa rama. Esa relación puede ser cualquiera: la intensidad puede ser función de la tensión, de sus derivadas e integrales, la tensión puede ser función de la intensidad, de sus derivadas e integrales; esa relación puede ser una función implícita o venir dada por una ecuación diferencial en que intervengan derivadas de ambas variables, o que no pueda ser expresada por una fórmula y sí por una gráfica, etc. Es decir, en realidad no existe límite para la posible relación entre la tensión y la intensidad de Kirchhoff de cada rama de una red de Kirchhoff[87].

---

[87] Conviene comentar que no se trata solo de que la intensidad sea una función de la tensión o que la tensión sea una función de la intensidad, como a veces parece entenderse. Que la intensidad es función de la tensión significa que para cada valor de la tensión existe una única intensidad; que la tensión es función de la intensidad significa que para cada intensidad existe una única tensión. Pero, de los dipolos clásicos de las redes eléctricas –resistencia, autoinducción y capacidad– solo en la resistencia existe una determinada tensión para una determinada intensidad y recíprocamente. Por el contrario, en la autoinducción un valor de la tensión corresponde a infinitos valores posibles de la intensidad. Así, el valor cero de la tensión en una autoinducción corresponde a cualquier valor constante de la intensidad, no a un valor determinado de la intensidad. El valor cero de la intensidad en un condensador corresponde a cualquier tensión constante del condensador, no a un valor determinado de esa

14.1. Resistencia

En las redes eléctricas, algunas ramas con relación tensión-intensidad reciben un nombre concreto dependiendo de cuál sea esa relación. En la teoría de las redes de Kirchhoff mantendremos esos mismos nombres, aunque con significado más amplio, con significado referido a las redes de Kirchhoff, no solo a las redes eléctricas. Por ejemplo, hay ramas AB de redes de Kirchhoff en las que la relación entre la tensión v_{AB} y la intensidad i_{AB} es un número real positivo constante, es decir,

$$\frac{v_{AB}}{i_{AB}} = R \tag{1}$$

Las ramas en las que se da esa relación se llaman *resistencias*. El número real positivo R se llama *valor de la resistencia* o, simplemente también *resistencia*.

La (1) suele escribirse también así:

$$v_{AB} = Ri_{AB} \tag{2}$$

$$i_{AB} = \frac{v_{AB}}{R} = Gv_{AB} \tag{3}$$

$G = 1/R$ se llama *conductancia*.

Si AB es una rama de una red de Kirchhoff, ocurre que $v_{AB} = -v_{BA}$, e $i_{AB} = -i_{BA}$. Si se sustituyen estos valores en (1) resulta:

---

tensión. Por eso, a lo que se llama relación tensión-intensidad de una rama no se debe llamar *función* tensión-intensidad, pues esa relación solo en casos concretos consiste en que la tensión es *función* de la intensidad o que la intensidad es *función* de la tensión. En los ejemplos arriba citados eso solo ocurre, como se ha dicho, en la resistencia. En la autoinducción la tensión no es función de la intensidad, sino de su derivada. En la capacidad la intensidad no es función de su tensión, sino de su derivada.

$$\frac{v_{BA}}{i_{BA}} = R \tag{4}$$

(1) y (4) indican que si la rama AB es una resistencia de valor R para un conjunto de valores v_{AB} e i_{AB}, también su rama opuesta, la rama BA, es una resistencia para los opuestos de esos valores, con el mismo valor R.

En general, si se habla de una resistencia de valor *R*, sin especificar ningún límite para los valores de v_{AB} e i_{AB}, se entiende que esos valores son todos los pares que satisfagan (1), tanto positivos como negativos. Esta es la razón por la que, de hecho, la palabra resistencia, si no se añade otra cosa, designa a toda rama no orientada de una red de Kirchhoff en la que existen las relaciones dadas por las fórmulas de (1) a (4)[88].

---

[88] Hay ramas que solo son resistencias para determinados valores de la tensión y de la intensidad, y no lo son para otros valores. Por ejemplo, una rama de una red eléctrica como la rama *AB* de figura N1, en la que el diodo se supone ideal, es una resistencia de valor *R* solo para valores positivos o nulos de v_{AB}. En ese caso, en efecto ocurre que $v_{AB}/i_{AB} = R$. Si v_{AB} es negativo la rama *AB* no es una resistencia, sino una fuente de intensidad de valor cero –que se llama interruptor abierto– y desde luego para esos valores en los que $v_{AB} < 0$ ocurre que $v_{AB}/i_{AB} \neq R$.

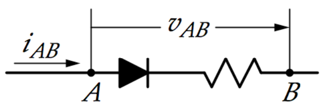

Fig. N1.- La rama *AB* es una resistencia de valor *R* solo para valores positivos o nulos de v_{AB}.

Por tanto, la rama *AB* de la figura N1 es una resistencia solo si $v_{AB} \geq 0$, lo que significa que la rama *BA* es una resistencia solo si $v_{BA} = -v_{AB} \leq 0$, pues entonces $v_{BA}/i_{BA} = (-v_{AB})/(-i_{AB}) = R$. La rama *AB* no es una resistencia para

Si la relación $v_{BA}/i_{BA} = Z$ es una constante que puede ser un número real positivo o negativo, o un número complejo, la rama se llama, en general, impedancia de valor Z. Su inverso se llama admitancia. Para designar las admitancias suele usarse la letra Y. Es decir $1/Z = Y$. Por tanto, las resistencias son impedancias.

14.2. Autoinducción

La rama AB de una red de Kirchhoff se llama autoinducción si la relación entre la tensión de Kirchhoff v_{AB} y la intensidad de Kirchhoff i_{AB} es

$$v_{AB} = L\frac{\mathrm{d}i_{AB}}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

Donde L es un número real positivo. Teniendo en cuenta de nuevo que $v_{AB} = -v_{BA}$, e $i_{AB} = -i_{BA}$, si se sustituye en (5), se obtiene también que

$$v_{BA} = L\frac{\mathrm{d}i_{BA}}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Es decir, para los valores que se cumpla (5) también se cumple (6). O sea, si la rama AB es una autoinducción para un conjunto de valores de v_{AB} e i_{AB}, también la rama BA lo es para el conjunto de valores opuestos. Si no se dice otra cosa, se entiende que la rama AB es una autoinducción para todos los valores posibles que satisfagan (5) y (6). En ese caso se llama autoinducción a la rama no orientada.

---

valores $v_{AB} < 0$, lo que significa que la rama BA tampoco es una resistencia para valores $v_{BA} = -v_{AB} > 0$.

14.3. Capacidad

La rama AB se llama capacidad, si la relación entre la tensión v_{AB} y la intensidad i_{AB} es

$$i_{AB} = C\frac{\mathrm{d}v_{AB}}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

C de (7) es un número real positivo. Y teniendo en cuenta que $v_{AB} = -v_{BA}$, y que $i_{AB} = -i_{BA}$, si se sustituye en (7), se obtiene también que

$$i_{BA} = C\frac{\mathrm{d}v_{BA}}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

(7) y (8) muestran que si la rama AB es una capacidad de valor C, para un conjunto de valores v_{AB} e i_{AB}, también la rama BA es una capacidad de valor C para los valores opuestos. Si no se añade otra cosa, se entiende que la rama AB es una capacidad para todos los valores que satisfagan (7) y (8). En ese caso se da el nombre de capacidad a la rama no orientada[89].

---

[89] Hay objetos reales que pueden ser bien descritos por medio de las ramas que aquí se han definido. Por ejemplo, hay objetos reales de dos terminales tales que, si se les aplica a cada uno de ellos la tensión eléctrica v_{AB}, circula por el objeto una intensidad eléctrica i_{AB}, de forma que la relación $v_{AB}/i_{AB} = R$ es un número real positivo que se mantiene aproximadamente constante para todos los valores posibles de v_{AB} e i_{AB}, positivos y negativos. Esos objetos reales se llaman en español también resistencias eléctricas, con el mismo nombre –*resistencia*– que la rama de una red de Kirchhoff a la que hemos dado ese nombre. En inglés, sin embargo, existen dos palabras distintas para designar los objetos reales de las ramas que hemos llamado resistencias. Las ramas, elementos teóricos que cumplen (1), se llama en inglés *resistence*, y el objeto real cuyo comportamiento eléctrico es próximo a (1), se llama *resistor*. Pero el concepto de resistencia aquí definido, que es un concepto teórico, es mucho más amplio que el que se limita a las redes eléctricas, y es válido para cualquier red de Kirchhoff.

14.4. Fuentes de tensión y fuentes de intensidad

Además de estos tres tipos de ramas con nombre específico, hay otros dos tipos de ramas que también tienen nombre, aunque en ellas no existe relación alguna entre la tensión y la intensidad de Kirchhoff. Son las fuentes de tensión y las fuentes de intensidad.

Las siguientes definiciones para redes de Kirchhoff son reproducción de las definiciones correspondientes de la Teoría de Redes Eléctricas.

Una *fuente de tensión* es una rama de una red de Kirchhoff cuya tensión de Kirchhoff está fijada por la rama, con independencia de la intensidad de esa rama.

Una *fuente de intensidad* es una rama de una red de Kirchhoff cuya intensidad de Kirchhoff está fijada por la rama con independencia de la tensión de la rama.

En las bobinas de hilo conductor, la tensión eléctrica entre sus extremos está relacionada con su intensidad de forma aproximada a como expresan las fórmulas (5) y (6). La relación entre la tensión y la intensidad de un condensador eléctrico es aproximadamente la expresada por las fórmulas (7) y (8). Pero también en estos casos, las ramas que se han definido aquí son conceptos ideales, abstractos, que pueden o no coincidir con objetos reales. Además, su alcance y su utilidad para describir redes de Kirchhoff sobrepasa las redes eléctricas. No obstante, a pesar de su generalidad, y tal como se viene haciendo en la teoría, se han mantenido nombres parecidos a los que se emplean en redes eléctricas.

Se ha preferido "autoinducción" a "inductancia" porque autoinducción excluye la inducción mutua, y es, por tanto, un término más preciso que inductancia. Y se ha preferido "capacidad" a condensador, para tratar de poner de manifiesto la generalidad del concepto: condensador es un objeto real, mientras que capacidad designa aquí una rama de cualquier red de Kirchhoff en la que existen entre su tensión de Kirchhoff y su intensidad de Kirchhoff las relaciones (7) y (8).

La expresión "está fijada por la rama" no debe entenderse como que la tensión de la fuente de tensión es un valor fijo no dependiente del tiempo, tal como un número real o un número complejo, sino que puede ser función de cualquier variable que no esté relacionada con la intensidad de la rama[90]; en especial es frecuente que las tensiones de las fuentes de tensión eléctricas sean funciones del tiempo[91]. De forma similar para las fuentes de intensidad.

Eso significa que, si se sabe que la tensión de una rama tiene siempre un determinado valor independiente de cualquier variación que pueda ocurrir en el resto de la red, esa rama es una fuente de tensión. El valor de la tensión de esa rama se llama valor de la fuente de tensión. También, si se sabe que la tensión de un par de nudos de una red de Kirchhoff permanece en un determinado valor con independencia de cualquier cambio que ocurra en el resto de la red, entre esos dos nudos puede

---

[90] Que la tensión de Kirchhoff de una fuente de tensión no depende de su intensidad realmente significa que no depende tampoco del resto de las tensiones e intensidades de la red, ya que, en general, la intensidad de la fuente depende de esas tensiones e intensidades a través de las restricciones que impone la primera ley de Kirchhoff y las relaciones tensión-intensidad de las ramas. De hecho, por tanto, ocurre que la tensión de una rama que sea fuente de tensión de una red de Kirchhoff no depende del resto de la red. Ningún cambio en el resto de la red altera el valor de la tensión de una fuente de tensión. De forma similar para una fuente de intensidad.

[91] A pesar de que en la práctica de las redes eléctricas los conceptos de fuente de tensión y de fuente de intensidad se utilizan adecuadamente, no todos los autores ofrecen definiciones correctas de esos conceptos. Por ejemplo "Ideal voltage sources produce a constant-amplitude voltage regardless of the current supplied to the load"; y también "Ideal current sources furnish a constant amplitude current to any load" [41]. Pueden citarse más autores que definen fuentes de tensión y fuentes de intensidad como objetos que originan valores de tensión y de intensidad concretos, incluso constantes [39].

conectarse una fuente de tensión cuyo valor sea la tensión entre los nudos, y se obtiene una red equivalente a la primera.

De forma parecida, si la intensidad por una rama permanece independiente de cualquier variación que pueda hacerse en el resto de la red, esa rama es una fuente de intensidad cuyo valor es el valor de esa intensidad.

14.5. Dipolo de Thévenin

Se llama *dipolo de Thévenin* al dipolo cuya relación tensión-intensidad es $v_{AB} = v_T + Zi_{AB}$, donde v_T es independiente de i_{AB} y distinto de cero, y Z es constante.

14.6. Dipolo de Norton

Se llama dipolo de Norton al dipolo cuya relación tensión-intensidad es $i_{AB} = i_N + Yv_{AB}$, donde i_N es independiente de v_{AB} y distinto de cero, y Y es constante.

14.7. Solución de un dipolo

Las ramas o dipolos en los que existe relación tensión-intensidad establecen una restricción para los posibles valores de sus tensiones y de sus intensidades de Kirchhoff. Por ejemplo, si una rama es una resistencia de valor R, solo son posibles para su tensión de Kirchhoff y su intensidad de Kirchhoff, determinados pares de valores. Así, si su intensidad tiene el valor 2, la tensión de Kirchhoff solo puede ser $2R$. Es decir, si en una red de Kirchhoff hay ramas que establecen alguna relación entre su tensión de Kirchhoff y su intensidad de Kirchhoff, la tensión y la intensidad de esa rama no se pueden fijar solo para que se cumplan en la red la primera y la segunda leyes de Kirchhoff, sino que, además, los pares de valores que pueden elegirse para esa rama deben cumplir la relación que esa rama establece entre ellos. Eso significa que la rama añade una nueva restricción a los valores posibles –además de las restricciones generales que la red establece– que son las dos leyes de Kirchhoff. Y significa, también, que puede que una red con ramas que establezcan sus propias restricciones no pueda ser nunca una red de Kirchhoff. Eso ocurre cuando las relaciones tensión-intensidad de las ramas no permiten elegir simultáneamente en todas ellas valores que cumplan también las dos leyes de Kirchhoff en la red.

Solución de un dipolo.- *Se llama solución de un dipolo o solución de una rama a cada par de valores que la relación tensión-intensidad de ese dipolo o de esa rama permite para sus tensiones e intensidades de Kirchhoff.*

Por ejemplo, el par $(v_{AB}=5,\, i_{AB}=10)$ no es solución de ninguna autoinducción L. Por el contrario, el par $(v_{AB}=0,\, i_{AB}=10)$ es solución de toda autoinducción, cualquiera que sea su valor L, pues si la intensidad es 10, la tensión es $L\mathrm{d}(10)/\mathrm{d}t=0$. El par $(v_{AB}=10,\, i_{AB})$ es solución de todas las fuentes de tensión de valor 10, cualquiera que sea el valor de i_{AB}. Una solución del dipolo de Thévenin de relación tensión-intensidad $v_{AB}=5+2i_{AB}$ es $(v_{AB}=5,\, i_{AB}=0)$; otra $(v_{AB}=3,\, i_{AB}=-1)$; pero el par $(v_{AB}=3,\, i_{AB}=2)$ no es solución de ese dipolo, es decir, ese dipolo no puede tener como tensión 3 y como intensidad 2.

14.8. Dipolos equivalentes

Dipolos equivalentes.- *Dos dipolos son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.*

Por tanto, dos dipolos que tienen la misma relación tensión-intensidad son equivalentes.

Si una rama de una red de Kirchhoff se sustituye por otra rama equivalente a ella, la red de Kirchhoff que se obtiene es también equivalente a la primera, pues las restricciones que ambas ramas introducen en la red para la elección de tensiones e intensidades de Kirchhoff son las mismas.

14.9. Dipolos lineales

Dipolos lineales.- *Si para todo par de soluciones* (v_1, i_1) *y* (v_2, i_2) *de un dipolo ocurre que* $\lambda_1(v_1, i_1) + \lambda_2(v_2, i_2) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2)$ *es solución de ese dipolo, el dipolo se llama dipolo lineal.*

Por tanto las resistencias que lo son para cualesquiera valores de la tensión son dipolos lineales, y también las autoinducciones y las capacidades que lo son para cualesquiera valores de la tensión. No lo son las fuentes de tensión ni las fuentes de intensidad, ni tampoco los dipolos de Thévenin ni los dipolos de Norton.

Por ejemplo, una solución del dipolo de Thévenin de relación tensión intensidad $v_{AB} = 5 + 2i_{AB}$ es $(v = 7, i = 1)$, y otra $(v = 3, i = -1)$. Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, se tiene: $(7, 1) + (3, -1) = (10, 0)$. Pero $(v = 10, i = 0)$ no es solución del dipolo, por lo que el dipolo de Thévenin no es lineal.

14.10. Dipolos bilaterales

Dipolos bilaterales [59].- *El dipolo AB de una red de Kirchhoff es bilateral si es equivalente al dipolo BA.*

Por tanto, si un dipolo *AB* es bilateral, puede ser intercambiado en la red de Kirchhoff a que pertenece por su dipolo opuesto *BA*, y se obtiene otra red de Kirchhoff equivalente a la primera, pues lo único que se hace es sustituir un dipolo por otro equivalente a él. O, dicho de otra manera, si un dipolo es bilateral, se pueden intercambiar sus terminales, se le puede dar la vuelta, y se obtiene otra red de Kirchhoff equivalente a la primera.

Que los dipolos *AB* y *BA* sean equivalentes significa que tienen el mismo conjunto de soluciones, o sea, que si el par (v, i) es solución de *AB*, también lo es de BA. Pero, que (v,i) es solución de AB, significa que $(-v,-i)$ es solución de BA, que hemos quedado que debe tener las mismas soluciones que AB. Por tanto, si (v,i) es solución de AB, también $(-v,-i)$ debe ser solución de AB, porque lo es de BA. Esta conclusión ofrece la posibilidad de enunciar otra definición de dipolos bilaterales:

Un dipolo es bilateral si, siempre que el par $(v,\, i)$ *sea solución de ese dipolo, también el par* $(-v,\, -i)$ *lo es.*

Teorema.- *Los dipolos lineales son dipolos bilaterales.*

Demostración.- Si el dipolo AB es lineal y (v,i) es una de sus soluciones, también $\lambda(v,i)$ es solución del dipolo, cualquiera que sea λ. Por tanto, para $\lambda = -1$ también $\lambda(v,i) = -1(v,i) = (-v,-i)$ es solución del dipolo, con lo que resulta que si (v,i) es solución del dipolo también lo es $(-v,-i)$, y el dipolo es bilateral.

15. Análisis de redes de Kirchhoff

Como se verá, los métodos generales de análisis de redes eléctricas son válidos para el análisis de cualquier red de Kirchhoff.

Los métodos generales de análisis de redes eléctricas parten de redes formadas por ramas cuya relación tensión-intensidad es conocida. Las redes eléctricas que se analizan en la teoría clásica de circuitos eléctricos constan de ramas que son resistencias, inductancias, capacidades y fuentes de tensión y fuentes intensidad. Pero, en realidad, las ramas pueden ser cualesquiera, con cualquier relación tensión-intensidad.

En este capítulo se mostrará que es cierta la afirmación del primer párrafo; o sea, que es posible aplicar los métodos generales de análisis de redes eléctricas a cualquier red de Kirchhoff. Además, se mostrará que el teorema de caracterización de intensidades de Kirchhoff y el teorema de caracterización tensiones de Kirchhoff, demostrados en los capítulos 7 y 8, son los fundamentos de los métodos clásicos de análisis llamados método de los bucles o de las mallas, y método de los nudos, y los que proporcionan la posibilidad de su aplicación a todas las redes de Kirchhoff.

La tarea de analizar redes de Kirchhoff consiste en encontrar los valores de las intensidades de las ramas y de las tensiones de los nudos de esas redes, supuestas conocidas las relaciones tensión-intensidad de sus ramas. Esas tensiones e intensidades están sujetas, por tanto, a tres tipos de restricciones. Una la impuesta a las tensiones e intensidades por la relación tensión-intensidad de cada rama, otra la impuesta a las intensidades por la primera ley de Kirchhoff, y la última la impuesta a las tensiones por la segunda ley de Kirchhoff.

Las dos leyes de Kirchhoff se pueden escribir siempre como ecuaciones matemáticas. Un conjunto de estas ecuaciones es el formado por las sumas de las intensidades que llegan a cada nudo igualadas a cero.

Otro es el formado por las sumas de las tensiones de los pares de nudos que forman cualquier camino cerrado también igualadas a cero.

Si las relaciones tensión-intensidad de las ramas también se pueden escribir como ecuaciones matemáticas, y se ponen a continuación de las ecuaciones que surgen de las dos leyes de Kirchhoff, el conjunto origina un sistema de ecuaciones en que las incógnitas son las intensidades de Kirchhoff de las ramas y las tensiones de Kirchhoff de los pares de nudos. Si ese sistema tiene solución, la red es una red de Kirchhoff, lo que significa que, con esas ramas conectadas de esa determinada manera, se ha formado una red de Kirchhoff. La solución del sistema es, entonces, el conjunto de las intensidades de las ramas y el conjunto de las tensiones de los pares de nudos de esa red. Con las tensiones y las intensidades de las ramas se puede hallar la potencia de Kirchhoff que absorbe cada rama y, de ella, la energía. Y la red queda completamente analizada. Si el sistema de ecuaciones no es compatible, significa que esa red, con las restricciones impuestas por las relaciones tensión-intensidad de las ramas, no es una red de Kirchhoff.

15.1. Método de los bucles

Hay dos métodos clásicos de análisis de redes eléctricas que simplifican el método comentado en el apartado anterior. Son el método que se llama *método de los bucles*, también llamado método de las mallas, y el llamado *método de los nudos*. Estos dos métodos son en realidad válidos para cualquier red de Kirchhoff.

El método de los bucles consiste en asignar intensidades de bucle desconocidas a cada bucle de la red de Kirchhoff que se analiza, y hacer derivar las intensidades de las ramas de esas intensidades de bucle. Según el teorema de caracterización de intensidades, al hacer que las intensidades de las ramas deriven de intensidades de bucle, se asegura que, sean cuales sean esas intensidades de bucle, las intensidades de las ramas cumplen la primera ley de Kirchhoff. Por tanto, poniendo el valor que se busca para cada rama como suma de las intensidades de los bucles a que esa rama pertenece, se asegura que los valores que se buscan para las ramas cumplirán la primera ley de Kirchhoff, sean cuales sean las intensidades de los bucles, que todavía son indeterminadas. Aplicando a continuación la segunda ley de Kirchhoff a los caminos cerrados de pares de nudos de la red, y escribiendo las relaciones tensión intensidad de todas las ramas, se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son las intensidades de los bucles que hacen que además de la primera ley de Kirchhoff, se cumplan esos dos últimos tipos de restricciones: la segunda ley de Kirchhoff y las relaciones tensión-intensidad. Se insiste en que la primera ley de Kirchhoff se cumple solo porque las intensidades de las ramas derivan de intensidades de bucle.

Por tanto, el sistema de ecuaciones obtenido de esa forma hace que se cumplan todas las restricciones: la segunda ley de Kirchhoff y las relaciones tensión intensidad se cumplen porque han dado lugar a ecuaciones del sistema escritas directamente para que se cumplan esas restricciones. Que se cumple también la primera ley de Kirchhoff está asegurado, como se ha dicho reiteradamente, porque las intensidades de las ramas derivan de intensidades de bucle, que resultan ser las incógnitas del sistema.

Si el sistema de ecuaciones así escrito es compatible, la red es una red de Kirchhoff, y se obtiene un conjunto de intensidades de bucle como solución del sistema. Derivados de ese conjunto de intensidades de bucle se obtienen valores que se asignan a las ramas de la red. Esos valores cumplen la primera ley de Kirchhoff por el solo hecho de derivar de intensidades de bucle, luego son intensidades de Kirchhoff. De esas intensidades de Kirchhoff y de la relación tensión-intensidad se obtienen valores que se asignan a los pares de nudos de las ramas. Esos valores cumplen la segunda ley de Kirchhoff, pues esa restricción está contenida en el sistema de ecuaciones que ha dado lugar a los valores concretos de las intensidades de los bucles que constituyen la solución del sistema. Por tanto, esos valores son las tensiones de Kirchhoff buscadas. Con las tensiones e intensidades se obtienen las potencias de Kirchhoff que absorben las ramas, y de esas potencias, si se desea, las energías; y la red queda analizada, o sea, su comportamiento total queda conocido.

Si el sistema de ecuaciones no es compatible, la red formada no es una red de Kirchhoff[92].

En realidad, para aplicar el método de los bucles no es necesario asignar intensidades de bucle desconocidas a todos bucles de una red de Kirchhoff, sino que basta asignar intensidades de bucle solo a los bucles de los enlaces de un árbol dado. Como también se vio, esas intensidades coinciden con las intensidades de los enlaces. Al resto de los bucles se supone asignada intensidad de bucle nula[93]. La razón de la posibilidad de esta forma de asignación de intensidades de bucle es que, como ya se vio,

[92] El método de los bucles, llamado también a veces método de las mallas, se utiliza profusamente para el análisis de redes eléctricas, pero, en general, sin justificar la razón de la utilización de las intensidades de los bucles, a las que, como ya se dijo, se tiende a atribuir significado físico [67].

El teorema de caracterización de intensidades de Kirchhoff, expuesto en el capítulo 7, es la justificación del método de los bucles, aplicable a cualquier red de Kirchhoff, no solo a las redes eléctricas. Este teorema es citado y demostrado en [1], [2] y [6]. La demostración que se ofrece en esas referencias es parecida a la que se expone en esta tesis.

Además de servir de fundamento al método de análisis de las intensidades de bucle, el teorema aclara el papel meramente auxiliar de esas intensidades, sin que sea necesario atribuirles ningún significado físico, sino solo el papel auxiliar que proporciona la relación topológica ya expuesta en el capítulo 7.

[93] Realmente no es imprescindible asignar a esos bucles intensidad cero, sino que se puede asignar cualquier intensidad de bucle, pero de valor fijo. La razón es que, en una red de Kirchhoff, fijado un árbol de la red, el número de intensidades independientes de bucle es l, el número de enlaces de ese árbol. Por eso solo esas intensidades son las incógnitas. A cada una de las intensidades de bucle restantes se puede asignar un valor arbitrario, que, desde luego, puede ser cero.

fijado un árbol de una red de Kirchhoff, todas las intensidades de las ramas de esa red pueden ser escritas como sumas de las intensidades de los enlaces correspondientes a ese árbol, que son las intensidades de los bucles de esos enlaces.

Tampoco hace falta aplicar la segunda ley de Kirchhoff a todos los caminos cerrados formados por pares de nudos, pues si se aplica la segunda ley de Kirchhoff a un camino tal que todos los pares de nudos están en otros a los que ya se ha aplicado esa ley, la ecuación que surge es combinación lineal de las ecuaciones correspondientes a los caminos cerrados primeros. En realidad basta aplicar la segunda ley de Kirchhoff a los bucles de los enlaces. En ese caso todas las ecuaciones que se obtienen de la segunda ley de Kirchhoff son independientes, y no hay más ecuaciones independientes.

Ejemplo

En la figura 1 se muestra la red de Kirchhoff formada solo por condensadores y fuentes de tensión que se ha venido considerando como uno de los ejemplos de esta tesis. La relación intensidad-tensión de cada condensador es $q_h = C_h V_h$. Recordando que en esta red las cargas de los condensadores son las intensidades de Kirchhoff, y las tensiones eléctricas son las tensiones de Kirchhoff, resulta de la relación $q_h = C_h V_h$ que cada capacidad C_h es una admitancia. También $V_h = p_h q_h$, con $p_h = 1/C_h$; por lo que cada p_h es una impedancia.

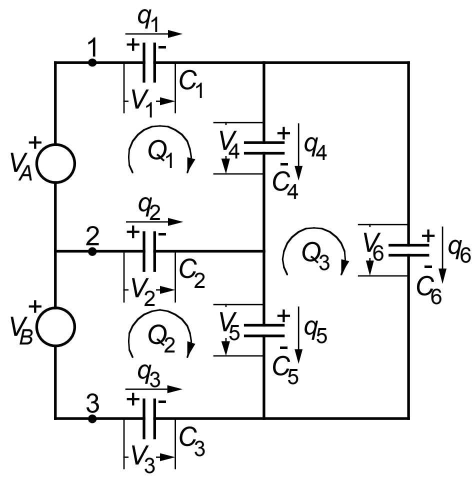

Fig. 1.- Análisis de una red de Kirchhoff por el método de los bucles.

Para analizar esta red por el método de los bucles se asignan a las tres mallas las intensidades de bucle desconocidas Q_1, Q_2 y Q_3, que en este caso resultan tener dimensión de cargas eléctricas[94]. Esta asignación es suficiente, porque esas mallas son los bucles de los enlaces correspondientes al árbol formado por las ramas 2, 4 y 5. Esas intensidades de bucle servirán para derivar de ellas las intensidades de Kirchhoff de las ramas así: $q_1 = Q_1$; $q_2 = Q_2 - Q_1$; $q_4 = Q_1 - Q_3$; y de la misma manera las intensidades de Kirchhoff del resto de las ramas. Esta forma de escribir las cargas de los condensadores, que son las intensidades de Kirchhoff de las ramas, asegura que esas intensidades cumplan la primera ley de Kirchhoff, es decir, asegura que sean realmente intensidades de Kirchhoff.

Si se aplica ahora la segunda ley de Kirchhoff a cada una de las tres mallas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

[94] Nótese que resulta inútil tratar de dar significado físico a estas intensidades de bucle, que son cargas eléctricas en este caso. A lo sumo que $Q_1 = q_1$, o sea que la intensidad de la malla 1 es la intensidad de Kirchhoff del enlace 1, lo que equivale, en este caso, a identificar la carga Q_1 con la carga q_1 del condensador 1; también $Q_2 = -q_3$, y $Q_3 = q_6$.

$$\begin{aligned}
&V_1 + V_4 - V_2 - V_A = 0\\
&V_2 + V_5 - V_3 - V_B = 0\\
&V_6 - V_5 - V_4 = 0
\end{aligned}$$

Sustituyendo las tensiones de esas ecuaciones por las relaciones tensión-intensidad $V_h = p_h q_h$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&p_1 q_1 + p_4 q_4 - p_2 q_2 = V_A\\
&p_2 q_2 + p_5 q_5 - p_3 q_3 = V_B\\
&p_6 q_6 - p_5 q_5 - p_4 q_4 = 0
\end{aligned}$$

Y obteniendo ahora las intensidades de Kirchhoff de las ramas de las intensidades de bucle, tal como se dijo arriba, queda:

$$\begin{aligned}
&p_1 Q_1 + p_4 (Q_1 - Q_3) - p_2 (Q_2 - Q_1) = V_A\\
&p_2 (Q_2 - Q_1) + p_5 (Q_2 - Q_3) - p_3 (-Q_2) = V_B\\
&p_6 Q_3 - p_5 (Q_2 - Q_3) - p_4 (Q_1 - Q_3) = 0
\end{aligned}$$

Con matrices el anterior sistema de ecuaciones resulta

$$\begin{bmatrix} p_1 + p_4 + p_2 & -p_2 & -p_4 \\ -p_2 & p_2 + p_5 + p_3 & -p_5 \\ -p_4 & -p_5 & p_6 + p_5 + p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación matricial se puede escribir directamente siguiendo las mismas reglas que se aplican en las redes eléctricas [1][2].

Si se hace

$$\begin{bmatrix} p_1 + p_4 + p_2 & -p_2 & -p_4 \\ -p_2 & p_2 + p_5 + p_3 & -p_5 \\ -p_4 & -p_5 & p_6 + p_5 + p_4 \end{bmatrix} = [p]$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = [Q]$$

y

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ 0 \end{bmatrix} = [V],$$

la ecuación anterior se escribe de forma más simplificada así:

$$[p][Q] = [V]$$

O

$$[Q] = [p]^{-1}[V]$$

La última ecuación indica que si se conocen las capacidades C_h de los condensadores y, por tanto, sus inversas p_h, que son los términos de la matriz $[p]$, y se conocen también las tensiones de las fuentes de tensión, que son los términos de la matriz $[V]$, se puede obtener la matriz de las intensidades de los bucles, cuyos términos son Q_1, Q_2 y Q_3. De esas intensidades de bucle se obtienen las intensidades de Kirchhoff de las ramas, como se indicó más arriba: $q_1 = Q_1$; $q_2 = Q_2 - Q_1$; $q_4 = Q_1 - Q_3$, y así sucesivamente. En este ejemplo, esas intensidades de Kirchhoff de las ramas son las cargas de los condensadores, que quedan totalmente determinadas.

15.2. Método de los nudos

El fundamento y justificación del método de análisis de redes de Kirchhoff llamado método de los nudos es el teorema de caracterización de tensiones de Kirchhoff [1], [2], [6] incluido en el capítulo 8 de esta tesis. Consiste en asignar potenciales de Kirchhoff desconocidos a todos los nudos de la red que se analiza. Como el origen de esos potenciales puede ser un nudo de la red, si se desea, a uno de los nudos de esa red se asigna potencial cero, y, a cada uno de los nudos restantes potencial desconocido designado por una variable. A continuación se hace derivar la tensión entre cada par de nudos de esa red de los potenciales de nudos desconocidos. O sea, se escribe la tensión de cada par de nudos como la diferencia entre los potenciales de esos nudos. Esa forma de escribir las tensiones asegura que esas tensiones, que son diferencias, sean tensiones de Kirchhoff, o sea, asegura que cumplan la segunda ley de Kirchhoff, cualesquiera que sean los valores de los potenciales. Si de las relaciones tensión-intensidad de las ramas se pueden despejar las intensidades de las ramas de la red, se escriben las ecuaciones que se obtienen de aplicar la primera ley de Kirchhoff a todos los nudos de la red menos a uno. Así se asegura que las intensidades cumplen la primera ley de Kirchhoff, y que se cumplen también las relaciones tensión-intensidad. La razón de aplicar la primera ley de Kirchhoff a todos los nudos menos a uno es que, como ya se vio en el capítulo 7, si se aplica al último nudo la primera ley de Kirchhoff, se obtiene una ecuación que es combinación lineal de las obtenidas de los nudos anteriores.

Las incógnitas del sistema de ecuaciones así obtenido son los potenciales de los nudos. Si el sistema tiene solución, la red analizada es una red de Kirchhoff, y la solución son los potenciales de los nudos de esa red. A partir de ellos, por diferencias, se hallan las tensiones de todos los pares de nudos y, con esas tensiones y con las relaciones tensión-intensidad de cada rama, se hallan las intensidades de todas las ramas. Con las tensiones e intensidades de las ramas se hallan las potencias que absorben, y de ellas las energías. Y la red queda analizada.

Ejemplo

En la figura 2 se muestra la red de Kirchhoff que describe el flujo de potencia calorífica de la edificación de dos recintos que se viene considerando como ejemplo. Las fuentes representan los focos de calor de potencia calorífica Q_1 y Q_2 de los dos recintos. c_1 y c_2 son las conductancias térmicas respectivas de las paredes que separan del exterior los recintos 1 y 2. Eso significa que la potencia calorífica que pasa del recinto 1 al exterior por la pared que los separa es $q_1 = c_1(T_1 - T_O)$, donde T_1 es la temperatura del recinto 1, y T_O la temperatura del exterior[95]. Esa potencia calorífica q_1 es la intensidad de Kirchhoff de la rama 1, que es la rama que representa a esa pared. La potencia calorífica que pasa del recinto 2 al exterior por la pared que los separa es $q_2 = c_2(T_2 - T_O)$. Esa potencia calorífica es la intensidad de Kirchhoff de la rama 2, que es la que representa a esa pared. c_{12} es la conductancia térmica de la pared que separa los recintos 1 y 2. Por tanto la potencia calorífica que pasa del recinto 1 al 2 es $q_{12} = c_{12}(T_1 - T_2)$. También esa potencia calorífica es la intensidad de Kirchhoff de la rama 12, que es la que representa a esa pared.

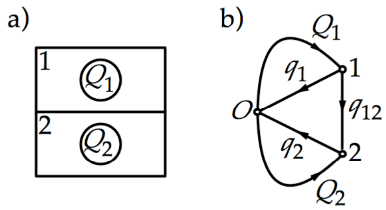

Fig. 2.- Análisis de una red de Kirchhoff por el método de los nudos.

Por tanto, la red de la figura 2 es una red de Kirchhoff en la que las intensidades de las ramas son potencias caloríficas, y en la que los potenciales de los nudos son temperaturas, por lo que las tensiones entre pares de nudos, que es lo que de verdad interesa para el análisis de la red, son diferencias de temperaturas. Analizaremos esa red por el método de los nudos. A cada nudo se asignará como potencial su temperatura, que puede ser conocida o no. Siguiendo la práctica, se puede tomar cualquier nudo como referencia de potenciales, es decir, se puede asignar a un nudo,

---

95 Aquí se utilizan símbolos de temperaturas absolutas, pero como en todas las fórmulas intervendrán solo diferencias de temperaturas, se pueden utilizar temperaturas de cualesquiera de las escalas, aunque, desde luego, en cada problema, solo una escala.

por ejemplo al nudo *O*, que representa al exterior, cualquier potencial, cualquier temperatura, como, por ejemplo, temperatura cero. Si es así, T_1 y T_2 representan las diferencias de temperaturas entre los recintos 1 y 2 respectivamente, y el exterior; o sea, T_1 y T_2 representan las tensiones de Kirchhoff de los pares de nudos 1*O* y 2*O*.

Analizar esta red por el método de los nudos consiste ahora en aplicar la primera ley de Kirchhoff a los nudos 1 y 2. Se obtiene así el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Q_1 - q_1 - q_{12} &= 0 \\ Q_2 - q_2 + q_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Como se ha comentado otras veces, si se aplica esa ley también al nudo *O*, se obtiene una ecuación que es combinación lineal de las anteriores. Desde luego que es posible aplicar la primera ley de Kirchhoff al nudo *O* y no aplicarla al nudo 1 o al nudo 2. Las ecuaciones que se obtendrían así formarían también un sistema de ecuaciones independientes.

Si se utiliza la relación tensión-intensidad, las intensidades de Kirchhoff pueden ponerse en función de los potenciales así: $q_1 = c_1 T_1$, $q_2 = c_2 T_2$ y $q_{12} = c_{12}(T_1 - T_2)$. Si se sustituyen en el sistema de ecuaciones anterior las intensidades de Kirchhoff de las ramas por esos valores y se ordena, queda:

$$\begin{aligned} c_1 T_1 + c_{12}(T_1 - T_2) &= Q_1 \\ c_2 T_2 - c_{12}(T_1 - T_2) &= Q_2 \end{aligned}$$

En forma de matricial,

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Si se conocen las conductancias térmicas de las paredes, y si se fijan las diferencias de temperaturas T_1 y T_2 respecto al exterior, la (1) proporciona las potencias caloríficas Q_1 y Q_2 que han de tener las fuentes térmicas para mantener esas temperaturas en los recintos. Si se premultiplica por la matriz inversa de las conductancias térmicas, se obtiene

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

La (2) proporciona las respectivas diferencias entre las temperaturas de los recintos y el exterior originadas por sendas fuentes de potencia térmica fija situadas en esos recintos.

Si se hace

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = [Q],$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} \end{bmatrix} = [c],$$

y

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = [T],$$

las (1) y (2) se pueden escribir más simplificadamente así:

$$[Q] = [c][T]$$

$$[T] = [c]^{-1}[Q]$$

Nótese que, como ocurre en las redes eléctricas [1], [2], la (1) se puede escribir directamente, pues los términos de la diagonal principal de la matriz de conductancias térmicas son la suma de las conductancias térmicas de las ramas que confluyen en los nudos correspondientes. Así, el término que ocupa el lugar 11 es $c_1 + c_{12}$, y el término del lugar 22 es $c_2 + c_{12}$. Los términos que no pertenecen a la diagonal principal son los opuestos de las conductancias de las ramas que unen los nudos correspondientes. Así, el término que ocupa el lugar 12 es $-c_{12}$, igual que el que ocupa el lugar 21.

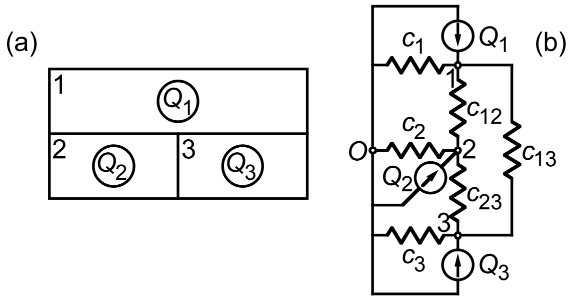

Fig. 3.- a) Edificio con tres fuentes de calor en sus recintos, y b) red de Kirchhoff que describe el flujo estacionario de potencia calorífica.

La figura 3a muestra otro edificio, este con tres recintos y sendas fuentes de potencia calorífica en ellos. La figura 3b es la red de Kirchhoff que representa el flujo térmico [6]. Los nudos 1, 2 y 3 representan los recintos, y el O el exterior. Las ramas representan las conductancias de las paredes y las fuentes de potencia térmica. Aplicando las reglas comentadas anteriormente, se puede escribir la ecuación matricial de la red así:

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_{12} + c_{13} & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} + c_{23} & -c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & c_3 + c_{13} + c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

T_1, T_2 y T_3 son las diferencias de temperaturas entre los recintos y el exterior.

Se ve que los procedimientos de análisis de redes eléctricas se pueden aplicar con total seguridad a todos los sistemas que puedan ser descritos por medio de redes de Kirchhoff.

16. Síntesis de la teoría formal de las redes de Kirchhoff

En la exposición que se ha hecho hasta aquí en esta tesis se ha ido construyendo la teoría formal de las redes de Kirchhoff. Pero una considerable fracción del texto escrito no es parte de esa teoría. La constituyen, por ejemplo, los razonamientos que tratan de justificar esa construcción, comentarios sobre las relaciones de la teoría de la redes de Kirchhoff con la teoría de las redes eléctricas, y numerosas observaciones sobre las formas en que los diversos autores tratan temas concretos. Parece conveniente, por tanto, presentar en un resumen ordenado, a modo de resultados, las definiciones y teoremas de la teoría formal elaborada. Se facilita además así un visión inmediata de esas definiciones y teoremas, e incluso de la teoría. Esa presentación constituye este capítulo. Es, como se ha dicho, la presentación ordenada de definiciones y teoremas de la teoría, sin ningún comentario ni figura. De los teoremas solo se incluye su enunciado, no la demostración. Tampoco se incluyen los métodos de análisis de redes, que son aplicaciones de los teoremas de caracterización de tensiones e intensidades.

16.1. Redes

16.1.1. Ramas y conjuntos de ramas

<u>Definición</u>.- *Rama es cada elemento de un conjunto R de pares ordenados tal que* $(\alpha,\beta)\in R \Rightarrow \left[(\beta,\alpha)\in R \quad y \quad \alpha\neq\beta\right]$.

Cada una de las dos componentes del par que constituye una rama se llama extremo de esa rama. Por ejemplo, α y β son los extremos de las ramas (α,β) y (β,α).

El conjunto R se llama conjunto de ramas. Es decir,

Definición.- *Conjunto de ramas es cada conjunto R de pares ordenados tal que* $(\alpha,\beta)\in R \Rightarrow \left[(\beta,\alpha)\in R \quad y \quad \alpha\neq\beta\right]$.

En general, del par (β,α) diremos que es el par opuesto del (α,β). Por tanto, de la rama (β,α) diremos que es la rama opuesta de la (α,β).

Definición.- *El conjunto formado por las ramas (α,β) y su opuesta (β,α) se llama rama no orientada de extremos α y β.*

16.1.2. Redes, nudos y terminales de ramas

Definición.- *Sea R un conjunto de ramas, E el conjunto de los extremos de las ramas de R, y f una aplicación suprayectiva de E en un conjunto N. El trío (R,N,f) se llama red.*

Los elementos de R se llaman ramas de la red (R,N,f).

Los elementos de N se llaman nudos de la red (R,N,f).

Definición.- *Los nudos A y B de la red (R,N,f) son terminales de la rama (α,β) si $f(\alpha)=A$ y $f(\beta)=B$.*

16.1.3. Intersección de redes

Definición.- *Sean (R_1,N_1,f_1) y (R_2,N_2,f_2) dos redes, $R=R_1\cap R_2$ y $N=N_1\cap N_2$. Si $f_1^{-1}(A)=f_2^{-1}(A) \quad \forall A\in N$, entonces la red (R,N) con la restricción de f_1 y f_2 a los extremos de las ramas de R se llama intersección de las redes (R_1,N_1,f_1) y (R_2,N_2,f_2).*

16.1.4. Ramas conectadas en serie

Definición.- *Dos ramas de una red están conectadas en serie si el segundo terminal de una rama coincide con el primero de la otra, y si, además, a ese terminal no llega ninguna otra rama.*

Si una rama está conectada en serie con otra y esta lo está con una tercera y así sucesivamente hasta la rama m, se dice que las m ramas están conectadas en serie.

Si es A el primer terminal de la primera rama y es B el segundo terminal de la última rama m, los terminales A y B se llaman terminales de la conexión en serie.

16.1.5. Ramas conectadas en paralelo

Definición.- *Dos o más ramas de una red están conectadas en paralelo si tienen el mismo par ordenado de terminales.*

16.1.6. Conjuntos de corte de una red

Definición.- *Se llama conjunto de corte de un conjunto de nudos de una red al conjunto de las ramas que llegan a ese conjunto de nudos, excluidas todas las que unen dos de ellos.*

Un conjunto de corte de un conjunto de nudos divide una red en dos partes. Una, que designaremos por A, la formada por el conjunto de corte, su conjunto de nudos, y el conjunto todas las ramas cuyos dos terminales son elementos de ese conjunto de nudos; y otra, B, formada por el resto de la red.

16.1.7. Redes conexas

Definición.- *Se dice que la red* (R, N, f) *es conexa si el conjunto de corte de todo conjunto de nudos* $M \subset N$, $M \neq N$ *no es el conjunto vacío.*

Una red que no es conexa se llama red inconexa.

16.1.8. Caminos

Definición.- *Camino es una sucesión de pares ordenados* $\left(A_h, B_h\right)$ *tal que* $1 < k \Rightarrow B_{k-1} = A_k$.

Las componentes de los pares de un camino, tal como A_k *y* B_k *se llaman vértices del camino.*

El primer punto A_1 *del primer par de un camino se llama origen, principio o extremo inicial del camino.*

El segundo elemento del último par, si lo hay, se llama fin, final o extremo final del camino.

16.1.9. Camino finito

Definición.- *Si existe un número natural* m *tal que* $\left(A_m, B_m\right)$ *es un elemento de un camino, y para todo elemento* $\left(A_k, B_k\right)$ *de ese camino ocurre que* $k \leq m$, *entonces ese camino se llama camino finito, y se dice de él que está formado por* m *elementos o por m pares.*

Entonces el par $\left(A_m, B_m\right)$ *es el último par del camino y* B_m *es el final de ese camino.*

16.1.10. Caminos opuestos

Definición.- *Dos caminos finitos de* m *elementos son caminos opuestos si cada par* k *de uno es opuesto del par* $m-(k-1)$ *del otro.*

16.1.11. Caminos cerrados

Definición.- *Camino cerrado es cada camino cuyo principio y cuyo final coinciden.*

16.1.12. Bucles

Definición.- *Bucle es cada camino cerrado de ramas de una red.*

16.1.13. Árboles y enlaces de redes conexas

Definición.- *Árbol de una red conexa es cada conjunto del mayor número de ramas no orientadas de esa red que no forma ningún bucle.*

Definición.- *Fijado un árbol de una red, cada rama que no pertenece a ese árbol se llama enlace.*

16.2. Intensidades de Kirchhoff

16.2.1. Valores asignados a ramas de una red

Definición.- *Sea R el conjunto de ramas de una red, G un grupo conmutativo, y f_R una aplicación de R en G tal que $\forall(\alpha,\beta)\in R$ ocurre que $f_R(\beta,\alpha)=-f_R(\alpha,\beta)$. Entonces $f_R(\alpha,\beta)$ se llama valor asignado a la rama (α,β).*

16.2.2. Intensidades de Kirchhoff

Definición.- *Un conjunto de valores asignados a las ramas de una red es un conjunto de intensidades de Kirchhoff si la suma de los valores de las ramas que llegan a cada nudo de la red es cero.*

Se dice entonces de esos valores que cumplen la *primera ley de Kirchhoff*.

16.2.3. Red de intensidades de Kirchhoff

Definición.- *Una red con intensidades de Kirchhoff asignadas a sus ramas se llama red de intensidades de Kirchhoff.*

16.2.4. Propiedades de las redes de intensidades de Kirchhoff

Teorema.- *Si a un nudo de una red de Kirchhoff solo llega una rama, la intensidad de Kirchhoff de esa rama es cero.*

Teorema.- *Las intensidades de Kirchhoff de dos ramas en serie de una red de Kirchhoff son iguales.*

Teorema.- *La suma de las intensidades de las ramas de cada conjunto de corte de una red de Kirchhoff es cero.*

Teorema.- *El número máximo de ecuaciones independientes que relacionan las intensidades de las ramas de una red de intensidades de Kirchhoff es el número de nudos de la red menos uno:* $n = n_t - 1$.

Teorema.- *Las intensidades de las ramas de cada árbol de una red de intensidades de Kirchhoff pueden ser escritas en función solo de las intensidades de los enlaces de ese árbol.*

16.2.5. Intensidades de bucle

Definición.- *Sea* B *el conjunto de todos los bucles de una red. Si* f_B *es una aplicación de* B *en un grupo conmutativo* G *tal que* $f_B(-b) = -f_B(b) \quad \forall b \in B$, *entonces* $f_B(b)$ *se llama intensidad del bucle* b.

-*b* es el bucle opuesto del bucle *b*.

16.2.6. Valores asignados a ramas, que derivan de intensidades de bucle

Definición.- *Si un valor asignado a una rama es la suma de las intensidades de todos los bucles de los que esa rama forma parte, se dice que el valor de esa rama deriva de las intensidades de bucle.*

16.2.7. Teorema de caracterización de intensidades de Kirchhoff

Teorema.- *Para que un conjunto de valores asignados a las ramas de una red sea un conjunto de intensidades de Kirchhoff es condición necesaria y suficiente que ese conjunto de valores derive de un conjunto de intensidades de bucle.*

16.3. Tensiones de Kirchhoff

16.3.1. Valores asignados a pares de nudos

Definición.- *Sea N un conjunto a cuyos elementos llamaremos nudos. Sea* G *un grupo conmutativo, y* f_P *una aplicación de* $N^2 = N \times N$ *en* G *tal que* $\forall (A,B) \in N^2$ *ocurre que* $f_P(B,A) = -f_P(A,B)$ *y que* $f_P(A,A) = 0$. *Entonces* $f_P(A,B)$ *se llama valor asignado al par de nudos* (A,B).

16.3.2. Tensiones de Kirchhoff

Definición.- *Un conjunto de valores asignados a un conjunto* N^2 *de pares de nudos se llama conjunto de tensiones de Kirchhoff si la suma de los valores de los pares de nudos de cada camino cerrado de* N^2 *es cero.*

16.3.3. Tensión entre dos nudos

Teorema.- *La tensión de Kirchhoff del par de nudos* (A,B) *de una red de tensiones de Kirchhoff es la suma de las tensiones de los pares de nudos de cualquier camino de pares nudos de la red cuyos extremos sean* A *y* B.

16.3.4. Potenciales de Kirchhoff

Definición.- *Sea* N *un conjunto a cuyos elementos llamaremos nudos. Se llama potencial de Kirchhoff del nudo* $A \in N$ *a* $f_N(A)$, *donde* f_N *es una aplicación de* N *en un grupo conmutativo* G.

16.3.5. Valores asignados a pares de nudos, que derivan de potenciales de nudo

Definición.- *Si el valor asignado a un par ordenado de un conjunto de nudos es la diferencia entre los potenciales del primero y segundo nudos del par, se dice que el valor de ese par deriva de los potenciales de sus nudos.*

16.3.6. Teorema de caracterización de tensiones de Kirchhoff

Teorema.- *Para que un conjunto de valores asignados a los pares de nudos de un conjunto* N *sean tensiones de Kirchhoff es condición necesaria y suficiente que deriven de un conjunto de potenciales de sus nudos.*

Corolario.- *Fijado un conjunto de potenciales de Kirchhoff de los nudos, existe un único conjunto de tensiones de Kirchhoff que derivan de esos potenciales de nudos.*

16.3.7. Arbitrariedad del cero del potencial

Teorema.- *Sea una red de tensiones de Kirchhoff cuyas tensiones derivan de un conjunto de potenciales de Kirchhoff del grupo conmutativo* G *asignados a sus nudos. Si se suma el mismo elemento* K *de* G *a todos los potenciales, el conjunto de tensiones de los pares de nudos que derivan de los nuevos potenciales es el mismo que el que deriva de los primeros.*

Corolario.- *Dado un conjunto de tensiones de Kirchhoff, existen infinitos conjuntos de potenciales de los cuales derivan esas tensiones.*

Corolario.- *Dado un conjunto de tensiones de Kirchhoff y un nudo cualquiera A de esa red de Kirchhoff, existe un conjunto de potenciales de Kirchhoff de los cuales derivan esas tensiones tal que el potencial del nudo A es cero.*

Un nudo de una red de Kirchhoff con potencial cero se llama origen de potenciales.

16.4. Redes de Kirchhoff

16.4.1. Redes de Kirchhoff

Definición.- *Una red de Kirchhoff es una red con intensidades de Kirchhoff asignadas a sus ramas y con tensiones de Kirchhoff asignadas a sus pares de nudos, en la que esas tensiones e intensidades son elementos de un mismo cuerpo conmutativo.*

16.4.2. Redes de Kirchhoff equivalentes

Definición.- *Dos redes de Kirchhoff cuya intersección no es vacía son equivalentes si cada rama y cada par de nudos de esa intersección tienen la misma intensidad y la misma tensión de Kirchhoff respectivamente en ambas redes.*

16.4.3. Sustitución de ramas en paralelo

Teorema.- *Si m ramas en paralelo de terminales A y B de una red de Kirchhoff se sustituyen por una sola rama conectada entre los mismos terminales para que tenga la misma tensión que las m ramas, y se le asigna como intensidad la suma de las intensidades de la m ramas, la nueva red de Kirchhoff que así se obtiene es equivalente a la primera.*

La rama que sustituye a las m ramas en paralelo se llama rama resultante de las m ramas en paralelo.

Por tanto, *la rama resultante de m ramas en paralelo es una rama con la misma tensión de Kirchhoff que las m ramas en paralelo y cuya intensidad de Kirchhoff es la suma de las intensidades de Kirchhoff de las m ramas en paralelo.*

16.4.4. Sustitución de ramas en serie

Teorema.- *Si en una red de Kirchhoff m ramas forman una conexión en serie de terminales A y B, y la serie de ramas se sustituye por una sola rama conectada entre esos terminales A y B, a la que se asigna como intensidad la misma que la de las m ramas, y como tensión la suma de las tensiones de las ramas originales, se obtiene una red equivalente a la primera.*

La rama que sustituye a las m ramas en serie se llama rama resultante de las m ramas en serie.

Por tanto, *la rama resultante de m ramas en serie es una rama con la misma intensidad de Kirchhoff que las m ramas en serie y cuya tensión de Kirchhoff es la suma de las tensiones de Kirchhoff de las m ramas en serie.*

16.4.5. Sustitución de una parte de una red unida a otra por un conjunto de corte

Teorema.- *Si una parte de una red unida a otra por un conjunto de corte se sustituye por un nudo en el que confluyen las ramas de ese conjunto de corte, a las que no se modifican sus intensidades, se obtiene una red equivalente a la primera.*

Al nuevo nudo se puede asignar cualquier potencial.

16.4.6. Sustitución de un nudo por una rama y dos nudos

Teorema.- *Si un nudo de una red de Kirchhoff se sustituye por dos nudos, ambos con el potencial del primero, y una rama cuyos terminales son los dos nudos, a la que se asigna como intensidad de Kirchhoff la suma de las intensidades que llegan a su extremo inicial, la red que resulta es equivalente a la primera.*

Como a los dos nuevos nudos se asigna el mismo potencial, la tensión de la nueva rama es cero.

16.4.7. Sustitución de un conjunto de nudos con el mismo potencial

La operación inversa de la expresada por el teorema anterior también da lugar a redes equivalentes a la de partida. Se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema.- *Si m nudos de una red de Kirchhoff que tienen el mismo potencial, y todas las ramas que unen cada par de ellos se sustituyen por un nudo al que se asigna ese mismo potencial, se obtiene una red de Kirchhoff equivalente a la primera.*

16.5. Teorema de Tellegen

16.5.1. Potencia de Kirchhoff de una rama de una red de Kirchhoff

Definición.- *Se llama potencia de Kirchhoff que absorbe la rama orientada de terminales A y B de una red de Kirchhoff, a* $p_{AB} = v_{AB} i_{AB}$.

Teorema.- *La potencia de Kirchhoff que absorbe una rama de una red de Kirchhoff es igual a la potencia de Kirchhoff que absorbe su rama opuesta.*

Definición.- *El opuesto de la potencia de Kirchhoff que absorbe una rama se llama potencia de Kirchhoff que entrega esa rama.*

16.5.2. Energía de Kirchhoff

Definición.- *Se llama energía de Kirchhoff que absorbe una rama h de una red de Kirchhoff entre los tiempos t_1 y t_2 a*

$$W_h = \int_{t_1}^{t_2} p_h \mathrm{d}t$$

Definición.- *El opuesto de la energía de Kirchhoff que absorbe la rama h en un intervalo de tiempo se llama energía de Kirchhoff que entrega esa rama en ese intervalo.*

16.5.3. Teorema de Tellegen

Teorema de Tellegen.- *La suma de las potencias de Kirchhoff que absorben todas las ramas de una red de Kirchhoff es cero.*

16.6. Multipolos

16.6.1. Multipolos

Definición.- *Si las tensiones de Kirchhoff de las ramas de un conjunto de corte de una red de Kirchhoff son cero, cada una de las dos partes en que ese conjunto de corte divide a la red se llama multipolo. Las ramas del conjunto de corte se llaman terminales de los multipolos.*

Definición.- *Si* $v_1, v_2, \ldots, v_t$ *son los potenciales de Kirchhoff, e* $i_1, i_2, \ldots, i_t$ *las intensidades de Kirchhoff de los terminales que entran a un multipolo, las matrices*

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_t \end{bmatrix} \qquad [i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdots \\ i_t \end{bmatrix}$$

se llaman matriz de los potenciales y matriz de las intensidades de los terminales del multipolo, respectivamente.

Teorema.- *La suma de las intensidades de los terminales de un multipolo de una red de Kirchhoff es cero.*

16.6.2. Acoplamientos equivalentes de multipolos

Definición.- *Una red formada por dos multipolos se llama acoplamiento de esos dos multipolos.*

Definición.- *Dos acoplamientos de multipolos son equivalentes si su intersección es uno de los multipolos con los mismos potenciales de sus nudos, y con las mismas intensidades de sus ramas en ambas redes.*

16.7. Teorema de la potencia de multipolos

16.7.1. Potencia de Kirchhoff de un multipolo

Definición.- *Se llama potencia de Kirchhoff que absorbe un multipolo a la suma de las potencias de Kirchhoff que absorben sus ramas.*

16.7.2. Teorema de la potencia de multipolos

Teorema.- *Sean* $v_1, v_2, ..., v_t$ *los potenciales, e* $i_1, i_2, ..., i_t$ *las intensidades de los terminales de un multipolo. La potencia de Kirchhoff que absorbe ese multipolo es*

$$p = \sum_{k=1}^{t} v_k i_k$$

Corolario.- *La potencia de Kirchhoff que absorbe un multipolo es igual a la que entrega el multipolo acoplado a él.*

16.8. Redes multipuerta

16.8.1. Puertas

Definición.- *Se llama puerta de un multipolo de una red de Kirchhoff a cada conjunto de terminales de ese multipolo cuya suma de intensidades de Kirchhoff es cero.*

16.8.2. Potencia de Kirchhoff de una puerta

Definición.- *Si los terminales* $1, 2, ..., m$ *de un multipolo de una red de Kirchhoff son una puerta, se llama potencia de Kirchhoff que el multipolo absorbe por esa puerta a*

$$p_1 = \sum_{k=1}^{m} v_k i_k$$

El opuesto de p_1 es la potencia que entrega el multipolo por esa puerta.

Teorema.- *Si los terminales* $1, 2, ..., m$ *de un multipolo de una red de Kirchhoff son una puerta, la potencia que ese multipolo absorbe por esa puerta es*

$$p_1 = \sum_{k=1}^{m-1} v_{km} i_k$$

v_{km} es la tensión entre el terminal k y el m.

16.8.3. Puertas disjuntas

Definición.- *Dos puertas de un multipolo son disjuntas si no tienen ningún terminal común.*

Teorema.- *Si la unión de* q *puertas disjuntas es el conjunto de terminales de un multipolo, la potencia que absorbe ese multipolo es la suma de las potencias que absorbe por esas puertas.*

16.9. Relación tensión-intensidad

Para cada rama de una red de Kirchhoff puede existir o no relación entre la tensión de Kirchhoff y la intensidad de Kirchhoff de esa rama. Si existe, esa relación se llama *relación tensión-intensidad* de esa rama.

Según su relación tensión-intensidad, algunas ramas o dipolos tienen un nombre específico, como resistencia, autoinducción, capacidad, fuente de tensión, fuente de intensidad, dipolo de Thévenin y dipolo de Norton.

16.9.1. Solución de un dipolo

Definición.- *Se llama solución de un dipolo o solución de una rama a cada par de valores que la relación tensión-intensidad de ese dipolo o de esa rama permite para sus tensiones e intensidades de Kirchhoff.*

16.9.2. Dipolos equivalentes

Definición.- *Dos dipolos son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.*

16.9.3. Dipolos lineales

Definición- *Si para todo par de soluciones* (v_1, i_1) *y* (v_2, i_2) *de un dipolo ocurre que* $\lambda_1(v_1, i_1) + \lambda_2(v_2, i_2) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2)$ *es solución de ese dipolo, el dipolo se llama dipolo lineal.*

16.9.4. Dipolos bilaterales

Definición.- *El dipolo AB de una red de Kirchhoff es bilateral si es equivalente al dipolo BA.*

Definición equivalente.- *Un dipolo es bilateral si, siempre que el par* (v, i) *sea solución de ese dipolo, también el par* $(-v, -i)$ *lo es.*

Teorema.- *Los dipolos lineales son dipolos bilaterales.*

16.10. Análisis de redes de Kirchhoff

Los métodos de análisis de redes eléctricas son válidos para el análisis de cualquier red de Kirchhoff.

16.10.1. Método de los bucles

En particular el método de los bucles está basado en el teorema de caracterización de intensidades de Kirchhoff: al hacer derivar las intensidades de las ramas de la red que se analiza de intensidades de bucle, que son las incógnitas, cualquiera que sea el valor de esas intensidades de bucle se asegura el cumplimiento de la primera ley de Kirchhoff. Después se aplica la segunda ley de Kirchhoff y se introduce en las ecuaciones la relación tensión-intensidad de las ramas para seleccionar las intensidades de bucle que hacen que también se cumpla la segunda ley de Kirchhoff y las relaciones tensión-intensidad de las ramas. Si el sistema de ecuaciones así obtenido tiene solución, la red es una red de Kirchhoff. Halladas las intensidades de bucle, de ellas se obtienen las intensidades de las ramas, y de ellas, con la relación tensión-intensidad de las ramas, sus tensiones de Kirchhoff, sus potencias y energías.

16.10.2. Método de los nudos

El método de los nudos se basa en el teorema de caracterización de tensiones de Kirchhoff: al hacer derivar de potenciales de nudos, que son las incógnitas, las tensiones de los pares de nudos de la red, cualquiera que sea el valor de esos potenciales de los nudos se asegura el cumplimiento de la segunda ley de Kirchhoff. Después se aplica la primera ley de Kirchhoff y se introduce en las ecuaciones la relación tensión-intensidad de las ramas para seleccionar los potenciales de nudo que hacen que también se cumpla la primera ley de Kirchhoff y las relaciones tensión-intensidad de las ramas. Si el sistema de ecuaciones así obtenido tiene solución, la red es una red de Kirchhoff. Hallados los potenciales de nudo, de ellos se obtienen las tensiones entre pares de nudos y, por consiguiente, las tensiones de las ramas, y de ellas, con la relación tensión-intensidad de las ramas, sus intensidades de Kirchhoff, sus potencias y energías.

17. Conclusión

Como se ha dicho, la idea que inspira la teoría que se desarrolla en esta tesis consiste en considerar las dos leyes de Kirchhoff como propiedades exclusivamente topológicas de valores asignados a las ramas y a los pares de nudos de una red. Se apoya ese enfoque en la constatación de que esos valores cumplen o no las dos leyes de Kirchhoff en relación con las posiciones relativas que ocupan las ramas y los pares de nudos de la red.

Una consecuencia de esa forma de entender las leyes de Kirchhoff es que la teoría que de ellas se puede deducir resulta una teoría abstracta, que, en principio, puede ser aplicada a distintos sistemas. Por esa razón, en toda la teoría se ha tenido especial cuidado en que los conceptos definidos sean totalmente independientes de los sistemas concretos que esas redes pueden representar, y que, a la vez, sean lo más amplios posible para que incluyan los que se manejan en la práctica, y especialmente en la práctica de las redes eléctricas.

Aunque la investigación ha de continuar, nuestra opinión es que el resultado conseguido ha sido bueno, al menos en el sentido de que se comprueba que es posible la construcción de una teoría de esas características. Los ejemplos elegidos en esta memoria muestran que este enfoque abstracto sirve para aplicar la teoría de forma inmediata a diversos sistemas reales, que quedan identificados en cuanto se comprueba que poseen variables que cumplen las leyes de Kirchhoff.

De este enfoque han surgido, además, nuevas aportaciones más o menos originales, que aparecen desde el principio, como los conceptos de rama y de red, definidos en el capítulo 6, que cumplen con los objetivos que se pretendía, ya que, probablemente, sean los más amplios posibles, e incluyen a las ramas y redes ordinarias, también a las ramas y redes eléctricas. Como se pretendía, las definiciones de todas las partes de las redes que se dan son exclusivamente topológicas.

El concepto de intersección de redes creemos que está creado y definido en esta tesis por primera vez, y resulta imprescindible, como se ha visto, para una definición posterior precisa de redes de Kirchhoff equivalentes, concepto tratado muy confusamente en las publicaciones actuales de Teoría de Circuitos.

La definición de conjunto de corte que se da en esta memoria relaciona a cada conjunto de corte de una red con un conjunto de nudos de esa red, ya que existe una correspondencia biunívoca entre esos conjuntos. Es decir, fijado un conjunto de nudos de una red existe un único conjunto de corte que le corresponde, y recíprocamente. Esta forma de definir conjunto de corte y la constatación explícita de esa correspondencia biunívoca también creemos que es una aportación original, importante para la construcción del resto de la teoría.

El concepto del "valor" que se asigna a cada rama o a cada par de nudos, como elemento de un grupo conmutativo o de un cuerpo conmutativo cualquiera, es una de las novedades que más contribuyen a dotar de generalidad a la teoría; pues, al mostrar que tanto las intensidades de Kirchhoff como las tensiones de Kirchhoff son, por separado, simplemente elementos de cualesquiera grupos conmutativos, que cumplen la primera o la segunda leyes de Kirchhoff, las propiedades que derivan de esas leyes son cumplidas, respectivamente, por todas las intensidades y por todas las tensiones de Kirchhoff, sean o no esos valores resultado de medidas de variables de sistemas físicos. Las redes en las que los valores son elementos del grupo o cuerpo conmutativo $\{0,1\}$, propuestas como ejemplos, son muestras notables de generalidad y de abstracción. El resultado es que, de forma automática, todas las propiedades de las intensidades y tensiones eléctricas que deriven de las leyes de Kirchhoff las poseen todas las intensidades y todas las tensiones de Kirchhoff. En la práctica, eso significa que, de forma automática, esas propiedades pueden ser utilizadas para el análisis de todos los sistemas que puedan ser descritos por redes de intensidades o de tensiones de Kirchhoff.

Ya que la utilización de esas propiedades para el análisis de las redes eléctricas es bien conocido, se ha procurado nombrar a los nuevos conceptos como los correspondientes de las redes eléctricas, añadiendo el complemento "de Kirchhoff" [6]. De esa manera el traslado de las técnicas de análisis de unos sistemas a otros resulta automático.

Como se ha dicho, los valores que se asignan a ramas y nudos para que puedan ser intensidades o tensiones de Kirchhoff deben ser elementos de un conjunto que tenga, al menos, estructura de grupo abeliano. En el caso de que ese conjunto tenga estructura de espacio vectorial o de cuerpo conmutativo, como ocurre con los números y las funciones con las operaciones ordinarias, o que sean valores derivables o integrables, de cada red de intensidades de Kirchhoff o de cada red de tensiones de Kirchhoff se pueden derivar infinitas redes de intensidades o de tensiones de una inicial. Basta, por ejemplo, multiplicar todas las intensidades o todas las tensiones por un mismo número, u obtener sus derivadas o, en general, aplicar al conjunto de tensiones e intensidades cualquier transformación lineal y asignar esos nuevos valores a las ramas y nudos. La nueva red con los nuevos valores resulta otra red de intensidades o de tensiones de Kirchhoff. Esta propiedad, que resulta una consecuencia casi trivial del planteamiento formal que aquí se hace de la teoría, no se cita en las publicaciones habituales de Teoría de Circuitos, a pesar de ser de notable utilidad, pues permite saber de antemano que las redes derivadas de esta forma de redes de Kirchhoff son también redes de Kirchhoff, y tienen, por tanto, todas las propiedades de estas redes.

Los teoremas de caracterización de tensiones e intensidades son también, a nuestro juicio, una aportación útil para la generalización de la teoría, y también para aclarar el papel puramente topológico y auxiliar que desempeña el concepto de intensidad de bucle o de malla, muy confuso por lo general en las publicaciones de Teoría de Circuitos, por el intento de muchos autores de dar significado físico a ese concepto. El hecho de que los valores que deriven de cualquier conjunto de intensidades de bucle sean intensidades de Kirchhoff justifica del todo el método de los bucles, y el que los valores que deriven de cualquier conjunto de potenciales sean tensiones de Kirchhoff justifica el método de los nudos. Pero, además, ambos teoremas son medios auxiliares de gran utilidad para encontrar valores que sean intensidades y tensiones de Kirchhoff. En particular, el teorema de caracterización de tensiones de Kirchhoff permite asegurar que cualquier conjunto de diferencias cumple la segunda ley de Kirchhoff, y que el cero del potencial, relacionado muchas veces con los potenciales energéticos exclusivamente, como el potencial eléctrico y el potencial gravitatorio, es realmente una propiedad topológica, una propiedad de cualquier potencial de Kirchhoff. No conocemos ninguna publicación en la que este resultado se exponga con esta claridad.

La definición de red de Kirchhoff como red con intensidades de Kirchhoff asignadas a sus ramas y tensiones de Kirchhoff asignadas a sus pares de nudos del mismo cuerpo conmutativo permite identificar muchos sistemas que son redes de Kirchhoff, y atribuirles todas las propiedades de estas redes. Incluso, a partir de las redes eléctricas, pueden ser consideradas otras muchas redes de Kirchhoff por el procedimiento de realizar transformaciones lineales sobre las intensidades y tensiones eléctricas instantáneas, transformaciones que, a veces, son de gran utilidad. Así, las redes que surgen de asignar a las ramas y pares de nudos las transformadas de Laplace de las intensidades y de las tensiones son también redes de Kirchhoff, con todas las propiedades de estas redes. Lo mismo puede decirse de las redes fasoriales, con las que se describen de ordinario las redes sinusoidales. Otros sistemas, como las redes hidráulicas estacionarias y, en general, redes de flujos estacionarios de materia, los sistemas de transferencia estacionaria de potencia calorífica, redes de condensadores o, incluso ciertas redes digitales, también pueden ser descritos por medio de redes de Kirchhoff.

La dimensión de que este enfoque topológico dota al teorema de Tellegen es, quizá, una de las características más sobresalientes de la teoría. A pesar de los amplios estudios que otros autores han dedicado a ese teorema, y a pesar de las numerosas particularizaciones a casos concretos en que esos estudios han consistido [48], [49], esas aplicaciones han estado siempre referidas a las variables de los sistemas a que se aplicaban, sin haber llegado ninguna, por lo que nosotros sabemos, a la dimensión puramente topológica y, por tanto, totalmente general y abstracta, con que lo presenta la teoría elaborada en esta tesis. La presentación del teorema de Tellegen como una propiedad topológica es suficiente para reunir en ella todos los casos particulares a que se refieren esas publicaciones.

También se ha dedicado un gran esfuerzo en esta tesis a la elaboración precisa de la parte de la teoría que se refiere a la equivalencia de redes de Kirchhoff. La equivalencia de redes es un concepto muy utilizado en el análisis de redes eléctricas, pero cuyo significado y alcance no está precisado con nitidez en las publicaciones, sino que su empleo descansa en una fuerte dosis de intuición y de práctica. Creemos que en esta tesis se hace un aporte considerable para contribuir a una mayor claridad de la equivalencia de redes y para un empleo más seguro de las transformaciones que conducen a redes equivalentes. En concreto, el resultado que se expresa en la memoria de que cualquier parte de una red de Kirchhoff unida a otra por un conjunto de corte puede ser sustituida por un nudo con cualquier potencial, resultando otra red de Kirchhoff equivalente a la primera, es el enunciado de la transformación más general y de mayor amplitud que se puede efectuar para obtener una red de Kirchhoff equivalente a otra dada. En esta misma tesis se comprueba la utilidad de esta conclusión para el análisis de redes. En particular, la demostración del teorema de la potencia de multipolos se facilita en gran manera por esta transformación.

Precisamente el teorema de la potencia de multipolos y su generalización a cualquier red de Kirchhoff y, por tanto, a sistemas diversos, es también uno de los resultados más notables de esta teoría. Permite medir de forma muy fácil la potencia de Kirchhoff que absorbe un multipolo a partir de medidas de tensiones e intensidades, o de potencias de Kirchhoff, de sus terminales, además de un tratamiento claro de las redes multipuerta y de la relación de las potencias que el multipolo absorbe por cada puerta con la potencia total del multipolo.

18. Futuras investigaciones

En esta memoria se ha elaborado la parte fundamental de la teoría de las redes de Kirchhoff. A partir de aquí se puede seguir en distintas direcciones. Una consiste en continuar con el análisis de redes eléctricas a la luz del nuevo enfoque, actividad que puede constituir una línea permanente de trabajo futuro. Se trataría de considerar las diferentes partes de la Teoría de las Redes Eléctricas y generalizar lo que sea posible hacia las redes de Kirchhoff.

Dentro de esta actividad parece de especial interés el estudio de los sistemas eléctricos con intensidades deformadas respecto a la sinusoide, pues, quizá pueda resultar útil estudiar esos sistemas como redes de Kirchhoff para cada par de armónicos de la misma frecuencia, de tensión e intensidad, y sumar los resultados así obtenidos.

Otra línea de trabajo será aplicar lo aquí desarrollado a sistemas que puedan ser descritos por medio de redes de Kirchhoff. Un grupo de esos sistemas son los que llamaremos sistemas de transferencia estacionaria de energía. Si en esos sistemas se pueden localizar caminos por donde fluyan potencias para que esos caminos puedan ser representados por ramas, esas potencias cumplen la primera ley de Kirchhoff. Si, además, las cantidades de potencia transferida estuvieran relacionadas con algún potencial, como lo suelen estar con la temperatura los sistemas de flujo de potencia calorífica, esos sistemas pueden ser representados por redes de Kirchhoff.

Un sistema de especial interés que puede ser considerado como sistema de transferencia estacionaria de potencia son los propios sistema eléctricos, por cuyas líneas fluye potencia eléctrica de unas partes a otras. Quizá considerar esa potencia como una intensidad de Kirchhoff ayude en el estudio de los flujos de potencia en los sistemas eléctricos, y en la elección de las fuentes de suministro más convenientemente situadas para hacer mínimas las pérdidas de energía.

En esta memoria se han puesto diferentes ejemplos de sistemas que pueden ser descritos por medio de redes de Kirchhoff, unos muy diferentes de otros. La elección de esos ejemplos ha pretendido mostrar la diversidad de las posibles aplicaciones de la teoría abstracta que se ha elaborado, pero esos ejemplos no constituyen una relación exhaustiva de los posibles sistemas que puedan ser descritos por medio de redes de Kirchhoff. Una línea de investigación permanente será tratar de ir confeccionando una lista de ellos con la identificación precisa de la red de Kirchhoff que los describe y, por tanto, identificando las variables de esos sistemas que son intensidades y tensiones de Kirchhoff. De esa forma puede ser posible obtener relaciones entre ellas a partir de los teoremas de la Teoría de Redes de Kirchhoff y, como mínimo, incorporarlos como casos particulares de la teoría.

Es decir, en general por tanto, se trata de mantener presentes las ideas que derivan del enfoque que constituye la Teoría de Redes de Kirchhoff, e ir agrupando los sistemas que puedan ser descritos por ella.

19. Referencias

[1] Redondo Quintela, F., *Redes eléctricas de Kirchhoff*, Ed. REVIDE S. L. Béjar, 1999.

[2] Redondo Quintela, F. y Redondo Melchor, R. C., *Redes eléctricas de Kirchhoff 2ª edición*. Ed. REVIDE S. L. Béjar, 2005.

[3] Gijón, A. M., *Biografía de Euler*. http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/28-2-B-E.html

[4] Euler, L., *Los puentes de Köenigsberg*. Versión española por Benjumea, J. C., http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/15-1-o-p.html.

[5] O'Connor, J. J., Robertson, E. F., *A History of Toplology*, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Topology_in_mathematics.html

[6] Quintela, F. R., Redondo, R. C., Redondo, N., Melchor, M. M. R., *A General Aproach to Kirchhoff's Laws*. IEEE Transactions on Education. A la espera de publicación.

[7] Balabanian, N., Bickart, T. A., Seshu, S., *Teoría de redes eléctricas*, Editorial Reverté, S. A., Barcelona 1972.

[8] O'Connor, J. J., Robertson, E. F., *Geoge Simon Ohm*, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Ohm.html

[9] O'Connor, J. J., Robertson, E. F., *Gustav Robert Kirchhoff*, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Kirchhoff.html

[10] Thévenin, L. C., *Sur un nouveau théorème d'électricité dynamique*, C. R. des Séancs de l'Académie des Sciences, pp. 159-161, 1883.

[11] http://chem.ch.huji.ac.il/history/steinmetz.html

[12] Norton, E. L., *Design of finite networks for uniform frequency characteristic*. Technical Report. TM26-0-1860, Bell Laboratories, 1926.

[13] Tellegen, B. D. H., *A general netwok theorem, with applications*, Philips Res. Rep., vol. 7, pp. 259-269, Aug. 1952.

[14] *Ley de 20 de julio de 1957 sobre Enseñanzan Técnicas*, Boletín Oficial del Estado de 22 de julio de 1957.

[15] Alfaro Segovia, Enrique, *Electricidad 10ª Edición*, Editorial Dossat, Madrid 1972.

[16] *Ley 2/1964 de 29 de abril sobre Reordenación de Enseñanzas Técnicas*. Boletín Oficial del Estado de 1 de mayo de 1964.

[17] Alfaro Segovia, Enrique, *Teoría de Circuitos y Electrometría*, Editorial Dossat, Madrid 1970.

[18] Guillemin, E.A., *Introductory Circuit Theory*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1953.

[19] Guillemin, E. A., *Introducción a la Teoría de Circuitos*, Editorial Reverté, S. A. Barcelona 1959.

[20] O'Connor, J. J., Robertson, E. F., *Oliver Heaviside*, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Heaviside.html

[21] O'Connor, J. J., Robertson, E. F., *Pierre-Simon Laplace*, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laplace.html

[22] Dorf, R. C., Svoboda, J. A., *Introduction to Electric Circuits Third Edition*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1996.

[23] Nilsson, James W., Riedel, Susan A., *Circuitos Eléctricos 7ª edición*, Pearson-Prentice Hall, Madrid, 2005.

[24] Antonio Fernández-Rañada, *Los Muchos Rostros de la Ciencia*, Ediciones Nobel, Oviedo 1995.

[25] Real Academia Española, *Diccionario de la lengua española, vigésima segunda edición*, Madrid 2001.

[26] *New Oxford American Dictionary*, 2nd Edition.

[27] Diestel, R., *Graph Theory*, Springer-Verlag Heidelberg, New York 2005.

[28] Adby, P. R., *Applied Circuit Theory Matrix and Computer Methods*, John Wiley & Sons, New York , 1980.

[29] Desoer, A. CH., Kuh, E. S. *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Company, New York 1969.

[30] Madhu, S., *Linear Circuit Analysis*, Prentice-Hall International Editions, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

[31] Carlson, A. B., *Teoría de Circuitos*, Thomson, Madrid, 2004.

[32] IEEE 100 *The Authoritative Dictionary of IEEE standards terms seven edition*, IEEE Press, 2000.

[33] Irwin, J. D., *Análisis Básico de Circuitos en Ingeniería, quinta edición*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México 1997.

[34] Alexander, Ch. K., Sadiku, M. N., *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*, McGraw-Hill, México 2002.

[35] Parra, V. M. y otros, *Teoría de Circuitos*, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid 1992.

[36] Parra, V., *Electrotecnia I (Circuitos)*, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Servicio de Publicaciones, Madrid 1992.

[37] Gómez Campomanes, J., *Circuitos Eléctricos*, Universidad de Oviedo Servicio de Publicaciones, ISBN 84-7468-288-6.

[38] Gómez Expósito, A. y otros, *Fundamentos de Teoría de Circuitos*, Thomson Paraninfo, Madrid 2007.

[39] Íñigo Madrigal, R., *Teoría Moderna de Circuitos Eléctricos*, Ediciones Pirámide, S. A., Madrid 1977.

[40] Bobrow, L. S., *Fundamentals of Electrical Engineering, second edition*, Oxford Universiy Press, New York, 1996.

[41] Bennett, P. E., *Avanced Circuit Analysis*, Saunders College Publishing, Forth Worth 1992.

[42] Cheng, D. K., Morales, E., Sebastián, J. L., *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*, Pearson Education, 1998.

[43] Kemmer, N., Sánchez, J. M., *Análisis vectorial*, Ed. Reverté, 2002.

[44] Hilton, P. J., Hilton, Ch. W., Wu, Y., *Curso de Álgebra Moderna*, Ed. Reverté, 1982.

[45] Castellet, M. y otros, *Álgebra lineal y Geometría*, Ed. Reverté, 1996.

[46] Allen, P., Mosca, G., *Física para la ciencia y la tecnología*, Reverté 2005.

[47] http://www.ieeeghn.org/wiki/index.php/Bernard_Tellegen

[48] P. Penfield, R. Spence, and S Duinker, *A generalized form of Tellegen's theorem*, IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. 17, no. 3, pp. 302-305, Aug. 1970.

[49] P. Penfield, Jr., R. Spencer and S. Duinker. *Tellegen's Theorem and Electrical Networks*. Cambridge: MIT Press, 1970.

[50] Boite, R., Neirynck, J., *Théorie des Réseaux de Kirchhoff*, Presses Polytechniques Romandes, Luasanne, 1989.

[51] Edminister, J. A., Nahvi, M., *Circuitos Eléctricos* tercera edición, McGraw-Hill, Madrid 1997.

[52] Warzanskyj, W., *Análisis de Circuitos*, cuarta edición, E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicaciones, Departamento de Publicaciones, Madrid 1985.

[53] Howatson, A. M., *Electrical Circuits and Systems*, Oxford University Press, 1996.

[54] Ras, E., *Redes eléctricas y multipolos*, Marcombo, Barcelona, 1980.

[55] Quintela, F. R., Melchor, N. R., *Multi-terminal network power measurement*, International Journal of Electrical Engineering Education (IJEEE), 39/2, April 2002, p 148-161.

[56] Quintela, F. R., R. C. R. Melchor and M. M. Redondo, *Power of balanced poly-phase systems: an application of the multi-terminal network*

power theorem, International Journal of Electrical Engineering Education (IJEEE), 42/4 October 2005, pp. 325-337.

[57] Bergen, A. R., Vattal, V., *Power Systems Analysis Second Edition*, Prentice Hall, 2000.

[58] Glover, J. D., Sarma, M., *Power systems analysis & desing, second edition*, PWS Publishing Company, Boston 1998.

[59] Brenner, E., Javid, M., *Análisis de circuitos eléctricos*, Ediciones del Castillo, Madrid 1966.

[60] Hubert, Ch. I., *Circuitos eléctricos*, McGraw-Hill, Bogotá 1985.

[61] Belevitch, V., *Classical network theory*, Holden-Day, San Francisco, 1968.

[62] Van Valkenburg, M. E., *Análisis de redes*, Editorial Limusa, México 1983.

[63] Quintela, F. R., Arévalo, J. M. G, Redondo, R. C., *Power analysis of static VAr compensators*, International Journal of Electrical Power & Energy Sistems, volume 30 numbers 6-7 July/September 2008.

[64] Franco, S., *Electric Circuits Fundamentals*, Saunders College Publishing, Fort Worth, 1995.

[65] Redondo Quintela, F., *Circuitos de primero y segundo orden*, Ed. REVIDE S. L. Béjar, 1995.

[66] Thomas, R. E. y Rosa, A. J., *Circuitos y señales*, Ed. Reverté, Barcelona, 1991.

[67] Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R., *Análisis Básico de Circuitos Eléctricos*, cuarta edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México 1991.