5.2.7 EJERCICIOS

■ 1.-Resolver númericamente

a) x'[t]=(t^2-x[t])/(t+x[t]^2) con condición inicial x[0]=1
b) Obtener x'[0]
c) Representarla gráficamente
d)Obtener el número de pasos empleados por el método para resolver la ecuación
e)Resolver la ecuación númericamente utilizando el método de Runge-Kutta y obtener el número de pasos empleados. Dibujar la solución.
f)¿Con cuál de los dos métodos se resuelve en menos pasos la ecuación?

■ 2.-a) Resolver númericamente la siguiente ecuación de ondas
D[y[x, t], t, t] == D[y[x, t], x, x] es la ecuación de ondas con condiciones y de contorno
y[x, 0] == Exp[-x^2], Derivative[0,1][y][x, 0] == 0,y[-5, t] == y[5, t].
b) Dibujar la solución como superficie de R^3y como curva en R^2para diferentes valores de t.

■ 3.- Idem para la ecuación de Sine-Gordon
D[y[x, t], t, t] == D[y[x, t], x, x] + Sin[y[x, t]] con condiciones iniciales y de contorno
y[x, 0] == Exp[-x^2], Derivative[0,1][y][x, 0] == 0, y[-5, t] == y[5, t] .

■ 4.-a) Resolver de forma exacta el sistema
x'[t]=x-y+1
y'[t]=x+3y+e^(-t)
con condiciones iniciales x[0]=0,y[0]=1.
b) Dibujar la curva solución
c) Resolverlo de forma aproximada
d) Dibujar la solución

CAPITULO VI

APLICACIONES AL CÁLCULO: FUNCIONES ESPECIALES

Mathematica incluye definiciones de funciones especiales de física-matemática, tales como la función gamma, la función beta, funciones de Bessel......

6.1. FUNCIÓN GAMMA DE EULER Y FUNCIONES RELACIONADAS

6.1.1. LA FUNCIÓN GAMMA

• La función gamma se define como

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$$

La función Gamma puede verse como una generalización de la función factorial para argumentos no enteros, ya que Gamma[p]=(p-1)!, si p es entero

• La sintaxis es la siguiente:

Gamma[x] da el valor de la función Gamma para x

• Mathematica da el resultado exacto para algunos valores particulares de la función

Gamma$\left[\frac{1}{2}\right]$

$\sqrt{\pi}$

```
Gamma[3]
```

```
2
```

En cambio cuando el resultado exacto no es conocido

Gamma$\left[\frac{12}{7}\right]$

Gamma$\left[\frac{12}{7}\right]$

es posible obtener un valor aproximado con //N

```
N[%]
```

```
0.911423339638174
```

```
?? Gamma
```

```
Gamma[z] is the Euler gamma function. Gamma[a,
  z] is the incomplete gamma function. Gamma[a, z0, z1] is the
  generalized incomplete gamma function Gamma[a, z0] - Gamma[a, z1].
```

```
Attributes[Gamma] = {Listable, NumericFunction, Protected}
```

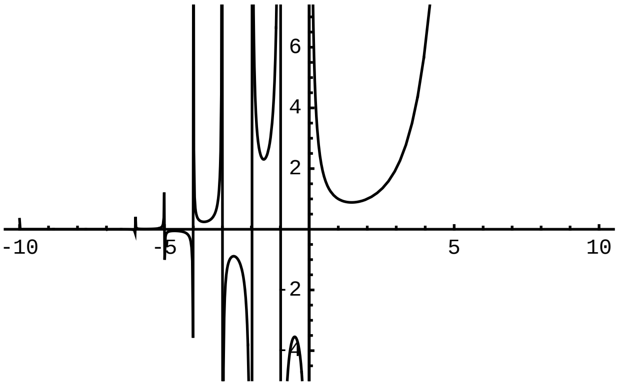
• La función Gamma es una función con el atributo Listable

Gamma$\left[\left\{\frac{1}{2}, 7\right\}\right]$

$\left\{\sqrt{\pi}, 720\right\}$

• El gráfico de la función Gamma es el siguiente

```
Plot[N[Gamma[x]], {x, -10, 10}]
```



- Graphics -

● Mathematica conoce propiedades analíticas de la función, como su derivada

∂_x **Gamma[x]**

```
Gamma[x] PolyGamma[0, x]
```

● Algunas integrales definidas se pueden calcular en términos de la función Gamma

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\, E^{-x}\, dx$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

■ 6.1.2. LA FUNCIÓN BETA

La función Beta de Euler se define como

$$\beta(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt$$

y está relacionada con la función Gamma por la fórmula

$$\beta(a,b)=\Gamma(a)\;\Gamma(b)\;/\;\Gamma(a+b)$$

La sintaxis es la siguiente

Beta[a,b]

■ 6.1.3. OTRAS FUNCIONES RELACIONADAS

▪ Gamma[a,z] la función Gamma incompleta, se define como

$$\Gamma(a,z)=\int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t}\, dt$$

• Gamma[a,z0,z1] la función gamma incompleta generalizada se define como

$$\Gamma(a,z_0,\ z_1)=\int_{z_0}^{z_1} t^{a-1} e^{-t}\, dt$$

• Beta[z,a,b] la función Beta incompleta se define como

$$\beta_z(a,b)=\int_0^{z} t^{a-1} (1-t)^{b-1}\, dt$$

• PolyGamma[z] la función digamma se define como la derivada logaritmica de la función gamma

$$\psi(z)=\Gamma'(z)\ /\ \Gamma(z)$$

■ 6.1.4. EJERCICIOS

■1. Calcular las siguientes integrales eulerianas

a) $\int_0^{\infty} x\, e^{-x^3}\, dx$

b) $\int_0^{\infty} x^{2p-1}\, e^{-x^2}\, dx$

■ 2.- Calcular las siguientes integrales eulerianas

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Sin}[x]^n\, dx$

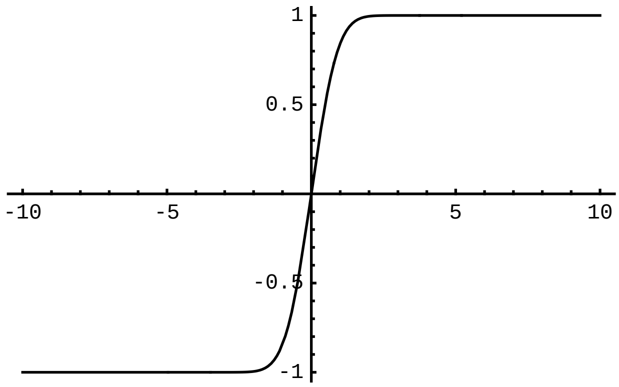
b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cot}[x]^n\, dx$

6.2. LA FUNCIÓN DE ERROR Y FUNCIONES RELACIONADAS

● La función de error , Erf[z], es la integral de la distribución gaussiana dada por

$$\mathrm{erf}(z)=2/\sqrt{\pi}\int_0^{z} e^{-t^2}\, dt$$

```
Plot[Erf[x], {x, -10, 10}]
```




```
- Graphics -
```

La función de error es una función importante en muchos cálculos estadisticos

● Algunas funciones relacionadas con la función de error son:

▫ Erfc[z] función complementaria de la función de error definida por erfc(z)=1-erf(z)

▫ InverseErf[z] función inversa de la función de error. La función inversa de la función de error aparece en algunos algoritmos para generar números aleatorios

▫ Las integrales de Fresnel: FresnelC[z] y FresnelS[z] se definen como

$C(z) = \int_0^z \cos(\pi t^2/2)\, d t$ $\qquad$ $S(z) = \int_0^z \sin(\pi t^2/2)\, d t$

Las integrales de Fresnel aparecen en teoria de la difracción

■ 6.2.1. EJERCICIOS

■1.−Calcular $\int_0^n \mathrm{Sin}[t^2]\, dt$

■2.−Calcular C[∞] y S[∞]

■3.− Dibujar FresnelC . Derivar FresnelS

6.3 FUNCIONES DE BESSEL, FUNCIONES DE AIRY

■ 6.3.1. FUNCIONES DE BESSEL

● Las funciones de Bessel BesselJ[n,z] y BesselY[n,z] son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial z^2 y''+z y'+(z^2-n^2)y=0

● BesselY[n,z] toma valores complejos para z negativo. Bessel J[n,z] es real para z reales.

```
BesselY[2, -2] // N
```

```
-0.617408 + 0.705668 I
```

```
BesselJ[2, -2] // N
```

```
0.352834
```

```
BesselJ[2, 2] // N
```

```
0.352834
```

• J_n(z) se suele llamar función de Bessel de primer tipo y Y_n(z) se suele llamar función de Bessel de segundo tipo o función de Weber

• J_n(z) es simétrica respecto del eje OZ.

• Las funciones de Bessel aparecen al resolver ecuaciones diferenciales con simetria cilindrica

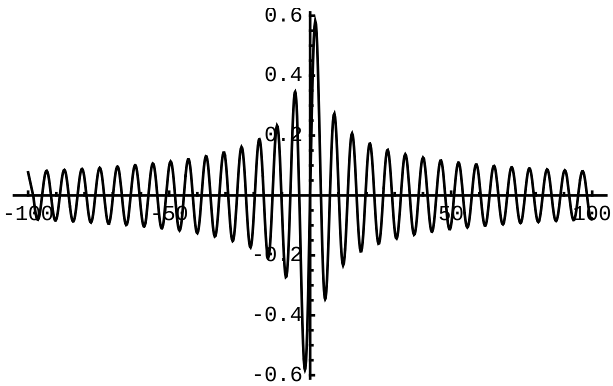
```
DSolve[z^2 y''[z] + z y'[z] + (z^2 - n^2) y[z] == 0, y, z]
```

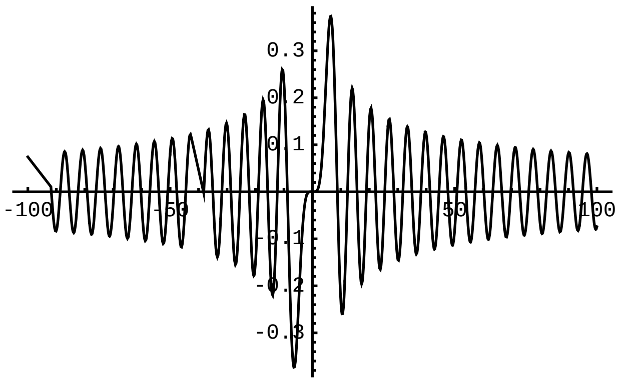
$$\left\{\left\{y \to \left(\text{BesselJ}\left[-n, \sqrt{\#1^2}\right] C[1] + \text{BesselJ}\left[n, \sqrt{\#1^2}\right] C[2] \,\&\right)\right\}\right\}$$

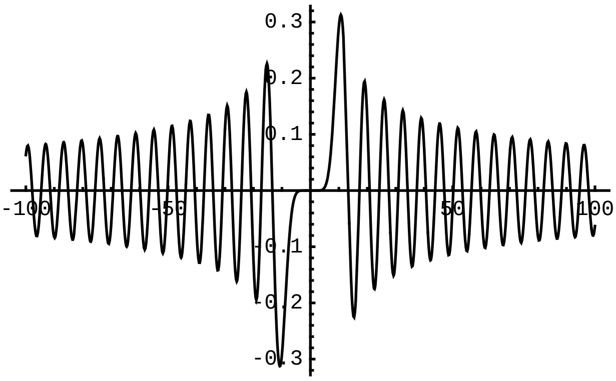
• Dibujamos funciones de Bessel de primera especie para distintos valores de n

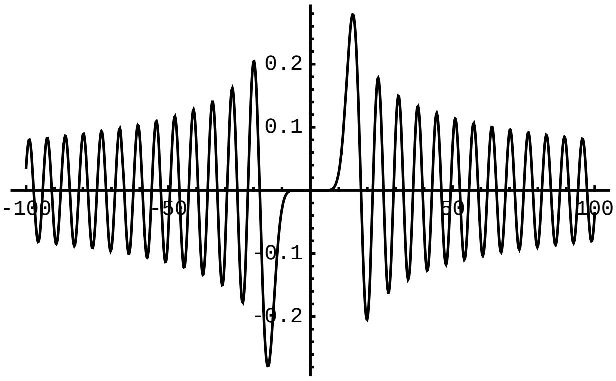
```
array = Table[Plot[BesselJ[n, z], {z, -100, 100}], {n, 1, 20, 4}];
```

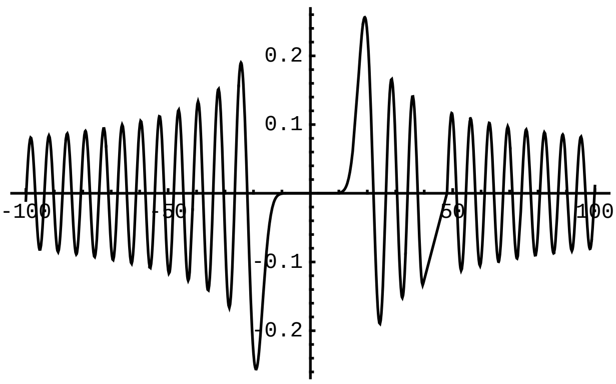
```
General::spell1 : Possible spelling error: new
   symbol name "array" is similar to existing symbol "Array".
```



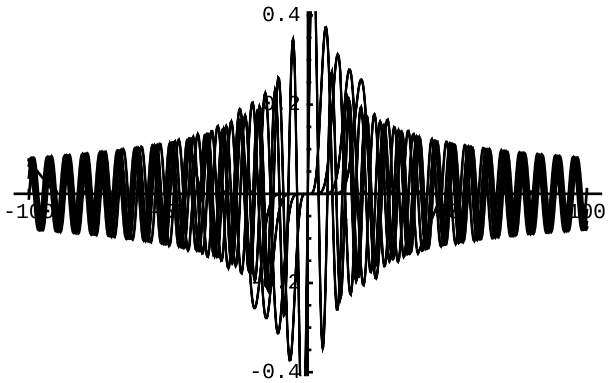









```
Apply[Show, array]
```




```
- Graphics -
```

■ 6.3.2.FUNCIONES DE AIRY

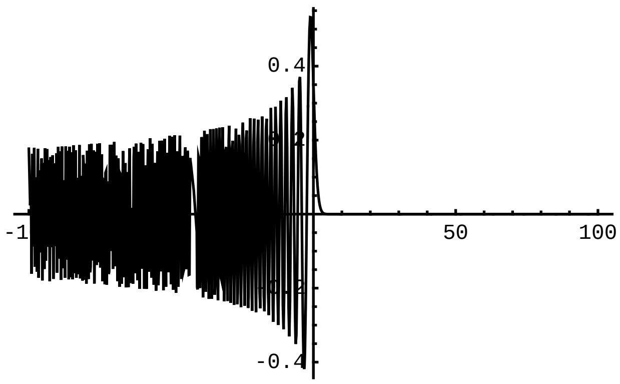
• Las funciones de Airy AiryAi[z] y AiryBi[z] son dos soluciones independientesde la ecuación diferencial y"-z y=0.

• Ai(z) tiende a cero cuando z tiende a Infinity.

• Las funciones de Airy aparecen al resolver problemas de contorno en electromagnetismo y mecánica cuántica.

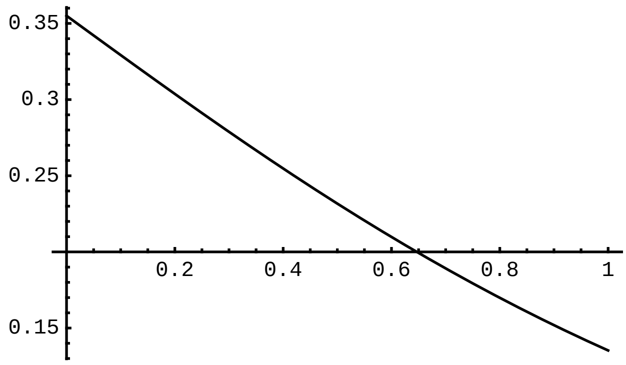
• Dibujamos la función de Airy, AiryAi

```
Plot[AiryAi[x], {x, -100, 100}]
```



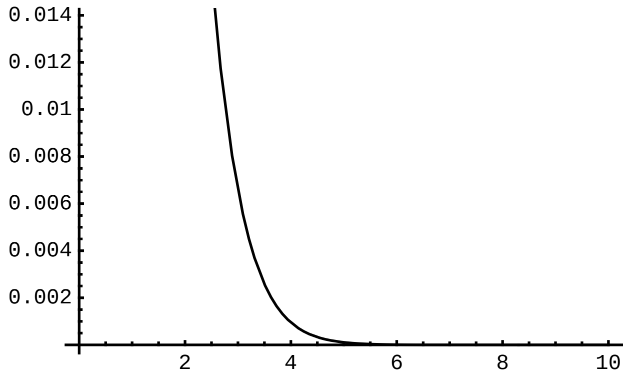
- Graphics -

```
Plot[AiryAi[x], {x, 0, 1}]
```



- Graphics -

```
Plot[AiryAi[x], {x, 0, 10}]
```



- Graphics -

AiryAi tiende a cero cuando x->∞ y es oscilante cuando x->-∞

▪ 6.3.4. EJERCICIOS

1.- Dibujar funciones de Bessel de segunda especie para distintos valores de n.

2.- Dibujar la función de AiryBi. A partir del dibujo deducir propiedades asintoticas de la función.

6.4 FUNCIONES DE LEGENDRE Y FUNCIONES RELACIONADAS

Las funciones de Legendre y las funciones de Legendre asociadas satisfacen la ecuación diferencial

$$\left(1-z^2\right) y'' - 2\, z\, y' + \left[n(n+1) - m^2 \big/ \left(1-z^2\right)\right] y = 0$$

Las funciones de Legendre de primer tipo **LegendreP[n,z]** y **LegendreP[n,m,z]** se reducen a los polinomios de Legendre cuando n y m son enteros. Las funciones de Legendre de segundo tipo **LegendreQ[n,z]** y **LegendreQ[n-,m,z]** dan la segunda solución linealmente independiente de la ecuación

```
DSolve[(1 - z^2) * y''[z] - 2 z * y'[z] + (n * (n + 1) - m^2 / (1 - z^2)) * y[z] == 0, y, z]
```

$$\left\{\left\{y \to \left(C[1]\ \text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2}+\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \#1^2\right] + C[2]\ \text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2}-\frac{n}{2}, 1+\frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \#1^2\right] \#1\ \&\right)\right\}\right\}$$

Las funciones de Legendre aparecen en mecánica cuantica

6.5. FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN Y FUNCIONES RELACIONADAS

La función zeta de Riemann **Zeta[s]** se define del siguiente modo $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ (s>1)

La función zeta para argumentos complejos es central en teoria de números

La función zeta para argumentos enteros aparece al evaluar algunas sumas e integrales.

Mathematica da el resultado exacto para los argumentos enteros para los que se conoce y sino se pueden obtener valores aproximados con //N

Veamos algunos ejemplos:

```
Sum[1 / k^2, {k, 1, Infinity}]
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$

```
Zeta[2]
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$

```
Zeta[4]
```

$$\frac{\pi^4}{90}$$

```
Zeta[6]
```

$\frac{\pi^6}{945}$

```
Zeta[3]
```

```
Zeta[3]
```

```
% // N
```

```
1.20206
```

No se sabe calcular de modo exacto la suma de las series armónicas de exponente impar , es decir no se conocen valores exactos para $\zeta(s)$ con s entero impar

6.6. FUNCIONES CONFLUENTES HIPERGEOMETRICAS

Muchas de las funciones especiales que hemos estudiado hasta ahora se pueden ver como casos particulares de las funciones hipergeometricas.

- Esta función se define como la suma de la siguiente serie

$$_1F_1(a;b;z) = 1 + a\,z/b + a\,(a+1)/b\,(b+1)\,z^2\big/2! + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(a)_k/(b)_k\,z^k\big/k!$$

Su sintaxis en Mathematica es: Hypergeometric1F1[a,b,z]

Es una solución de la ecuación diferencial de Kummer z y"+(b-z)y'-a y=0 con condciones de frontera 1F1(a,b,0)=1,

La función 1F1 se puede representar también por medio de una integral

$$_1F_1(a;b;z) = \Gamma(b)/[\Gamma(b-a)\,\Gamma(a)]\int_0^1 e^{z\,t}\,t^{a-1}\,(1-t)^{b-a-1}\,d\,t.$$

Entre las funciones especiales que obtenemos como casos particulares de funciones hipergeometricas están las funciones de Bessel, la función de error, la función gamma incompleta.....

La función 1F1 se denota a veces por $\Phi(a;b;z)$ y se le llama **función de Kummer**

- La función **HypergeometricU[a,b,z]** da otra solución linealmente independiente con la anterior de la ecuación de Kummer

La función U(a,b,z) tiene la siguiente representación integral

$$U(a,b,z) = 1/\Gamma(a)\int_0^{\infty} e^{-z\,t}\left(t^{a-1}\,(1+t)\right)^{b-a-1}\,d\,t$$

La función U también se conoce por el nombre de función de Kummer y con frecuencia se denota por Ψ.

● Una forma frecuente en la que aparecen las funciones hipergeometricas es en un caso límite Hypergeometric0F1[a,z]. Esta función se obtiene del límite

$$_0F_1(;a;z) = \lim_{q\to\infty} {}_1F_1(q;a;z/q)$$

Esta función 0F1 satisface la siguiente ecuación diferencial:

z y''+a y'-y=0

6.7. FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS Y GENERALIZACIONES

● La función hipergeometrica **Hypergeometric2F1[a,b,c,z]** es una solución de la ecuación diferencial

z(1-z)y''+(c-(a+b+1)z)y'-aby=0

La función hipergeometrica también se puede escribir como una integral

$$_2F_1(a,b;c;z) = \Gamma(c)/[\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)] \times \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\,(1-t\,z)^{-a}\,d\,t$$

La función hipergeometrica también se representa como una serie

$$_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k\,(b)_k/(c)_k\, z^k \big/ k!$$

La función hipergeometrica a veces se denota por **F** y es conocida por el nombre de **serie de Gauss** o **serie de Kummer**

Las funciones de Legendre y otras funciones que son generalizaciones de polinomios ortogonales se pueden expresar en términos de la función hipergeometrica

● La **función hipergeometrica generalizada** `HypergeometricPFQ[`{"\!\(*StyleBox[\"\\\"a\\\"\", \"TI\"]\)"$_1$, … , "\!\(*StyleBox[\"\\\"a\\\"\", \"TI\"]\)"$_p$}, {"\!\(*StyleBox[\"\\\"b\\\"\", \"TI\"]\)"$_1$, … , "\!\(*StyleBox[\"\\\"b\\\"\", \"TI\"]\)"$_q$}, z] se define por la siguiente expansión en serie

$$_pF_q(\textbf{"a"};\textbf{"b"};z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_1)_k \ldots (a_p)_k \big/ \left[(b_1)_k \ldots (b_q)_k\right] z^k \big/ k!$$

● La función **MeijerG** `MeijerG` [{ { "\!\(*StyleBox[\"\\\"a\\\"\", \"TI\"]\)"$_1$, … ,"\!\(*StyleBox[\"\\\"a\\\"\", \"TI\"]\)"$_n$ } , { "\!\(*StyleBox[\"\\\"a\\\"\", \"TI\"]\)"$_{n+1}$, … ,"\!\(*StyleBox[\"\\\"a\\\"\", \"TI\"]\)"$_p$ } } , { { "\!\(*StyleBox[\"\\\"b\\\"\", \"TI\"]\)"$_1$, … ,"\!\(*StyleBox[\"\\\"b\\\"\", \"TI\"]\)"$_m$ } , {"\!\(*StyleBox[\"\\\"b\\\"\", \"TI\"]\)"$_{m+1}$,…, "\!\(*StyleBox[\"\\\"b\\\"\", \"TI\"]\)"$_q$}}, z] se define por la siguiente integral

$$G_{p\,q}^{m\,n}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix}\right) = 1 \big/ 2\pi i \int \Gamma(1-a_1-s)\ldots\Gamma(1-a_n-s) \times \Gamma(b_1+s)\ldots\Gamma(b_m+s) \big/ \Gamma(a_{n+1}+s)\ldots\Gamma(a_p+s)\,\Gamma(1-b_{m+1}-s)\ldots\Gamma(1-b_q-s)\,z^{-s}\,d\,s$$

MeijerG esun tipo muy general de función especial cuyos casos particulares cubren la mayoria de las funciones especiales que hemos visto