8. TEORIA Y CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

8.1 INTRODUCCIÓN

Puede definirse, en general, una **estructura** como conjunto de elementos resistentes capaz de mantener sus formas y cualidades a lo largo del tiempo, bajo la acción de las cargas y agentes exteriores a que ha de estar sometido.

La estructura soporta las **cargas** exteriores (acciones y reacciones), las cuales reparten su efecto por los diferentes elementos estructurales que resultan sometidos a diferentes **esfuerzos**, los cuales inducen un estado **tensional**, que es absorbido por el material que la constituye.

El estudio de las estructuras se lleva acabo por dos disciplinas la Mecánica Racional y la Resistencia de Materiales. La **Mecánica Racional** estudia el modelo del sólido rígido, que es aquel que cumple que no se deforma y tiene resistencia infinita. Dentro de la Mecánica Racional a su vez existen varias disciplinas; una de ellas es la **Estática** que nos indica que el **sólido rígido** ante cualquier fuerza o momento tiene que cumplir las condiciones de equilibrio. Con lo que la Estática no nos proporciona ninguna información sobre los efectos que las acciones pueden producir sobre el sólido en concreto, como las deformaciones o como la capacidad de resistir tales esfuerzos.

Por lo que es la **Resistencia de Materiales** la que estudia el modelo del **sólido deformable** donde se tiene en cuenta los fenómenos de deformación y rotura, ya que cumple que tiene resistencia finita y que se deforma, además se les supone una serie de cualidades como son la isotropía, homogeneidad y continuidad

La Resistencia de Materiales se puede definir como la ciencia que trata del cálculo de la resistencia mecánica, rigidez y estabilidad de las piezas de una estructura. Entendiendo como:

Resistencia mecánica: las fuerzas internas máximas o tensiones que es capaz de desarrollar dicho cuerpo. Dependerá de las dimensiones del mismo y del material del que esté hecho.
Rigidez: la capacidad de oposición a las deformaciones.
Estabilidad: la capacidad de un elemento de oponerse a perturbaciones, manteniendo el equilibrio.

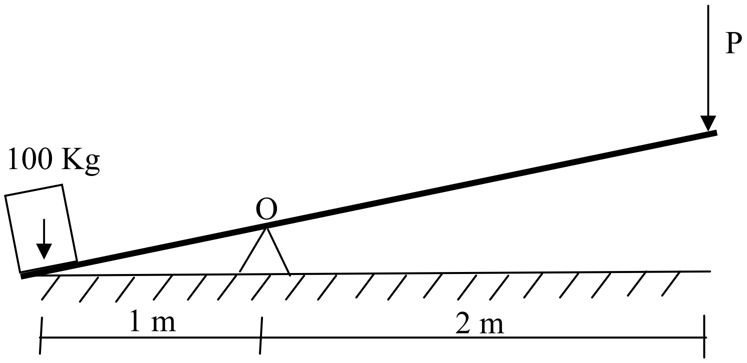
Es decir, que la resistencia de materiales nos permitirá determinar el material más adecuado, la forma y dimensiones más convenientes que hay que dar a los elementos de una construcción o máquina para que puedan resistir la acción de fuerzas exteriores que los solicitan, así como para obtener este resultado de la forma más económica.

Estudiando la resistencia mecánica conseguiremos diseñar los elementos del material y medida adecuadas para evitar su rotura.

Estudiando la rigidez, que se estudia cuantificando los esfuerzos interiores y las deformaciones, obtenemos las condiciones en las cuales la estructura o la pieza puede ser utilizada sin peligro de fallo.

Para terminar de explicar los conceptos anteriores se propone el siguiente ejemplo:

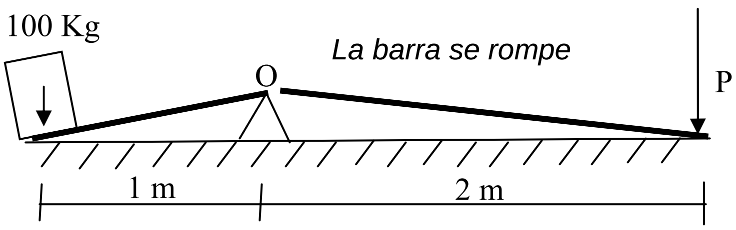
Se quiere levantar un cuerpo de 100 Kg de peso y para hacer menor el esfuerzo a realizar, se utiliza una barra, que a través de un apoyo intermedio O, se usará como una palanca. Se desea en un principio calcular el esfuerzo P que se deberá aplicar en el extremo de la barra

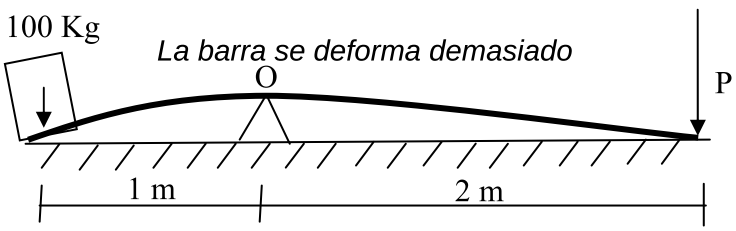


Suponiendo la barra utilizada, como rígida, es la Mecánica la que resuelve el problema. Así por la ecuación de equilibrio:

$$\sum M_O = 0 \qquad P.2 = 100.1 \qquad \rightarrow \qquad P = 50\,Kg$$

Pero la barra, en realidad, es un sólido deformable y como tal, podría ocurrir que se rompiese o que se deformase demasiado y por tanto no nos sirviese para elevar el peso de 100 Kg.

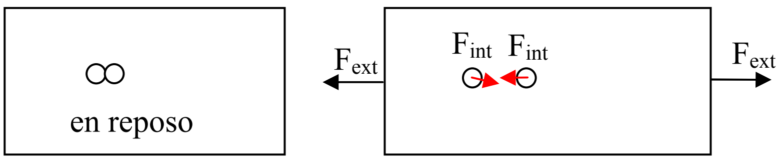




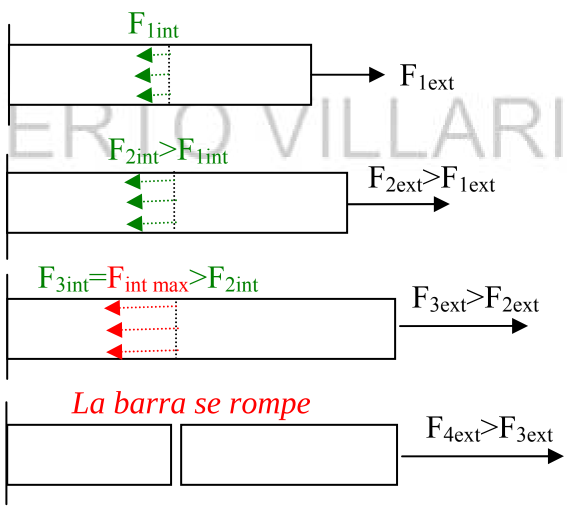
Será precisamente la Resistencia de Materiales la que nos ayude a dimensionar la barra a utilizar, para evitar que se rompa o que se deforme demasiado

Para que no se rompa la barra

Las **fuerzas exteriores** que aplicamos sobre los cuerpos, provocan en ellos **fuerzas interiores** o **tensiones** que se oponen a las exteriores. Ello es debido porque las fuerzas exteriores alteran las posiciones de reposo que mantenían las partículas elementales del interior del cuerpo y se desarrollan entonces fuerzas internas que tratan de recuperar las posiciones iniciales de las mismas



Al aumentar el valor de las fuerzas exteriores aumentará el valor de las fuerzas interiores y ello sucederá así hasta que éstas llegan a su valor límite y ya no pueden crecer más. A partir de aquí el sólido romperá.



Se denomina **resistencia mecánica** de un cuerpo: “a las fuerzas internas máximas o tensiones que es capaz de desarrollar dicho cuerpo”. Dependerá de las dimensiones del mismo y del material del que esté hecho.

Para que no se deforme demasiado la barra

En el ejemplo gráfico anterior, se observa que a medida que se va aumentando la fuerza externa, el cuerpo se va deformando más. Se tendrá que controlar que los sólidos no se deformen demasiado y dejen de ser útiles. Se denomina **rigidez** de un cuerpo: “a la resistencia que presenta a dejarse deformar”

Como conclusión final la Resistencia de Materiales permite calcular:

-Las **fuerzas internas o tensiones** (A través de ellas se controlará que los cuerpos no se rompan)
-Las **deformaciones** (A través de ellas se controlará que los cuerpos no se deformen demasiado)

La Resistencia de Materiales tiene importantes aplicaciones en todas las ramas de la ingeniería. Sus métodos los utilizan los ingenieros aeronáuticos y navales para el diseño y construcción de aviones y barcos, respectivamente; los ingenieros civiles, al proyectar puentes, presas y cualquier tipo de estructura, los ingenieros de minas, para resolver la necesidad de conocimientos de construcción que exige su profesión; los ingenieros mecánicos, para el proyecto y construcción de maquinaria y todo tipo de construcciones mecánicas como son los recipientes a presión; los ingenieros energéticos, para proyectar los diferentes componentes de un reactor; los ingenieros metalúrgicos, por la necesidad que tienen del conocimiento de los materiales actuales para la búsqueda de nuevos materiales; los ingenieros eléctricos, para el proyecto de máquinas y equipos eléctricos, y, en fin, los ingenieros químicos, para el diseño de instalaciones en industrias de su especialidad

8.2 SISTEMAS DE FUERZAS

Se denomina sistema de fuerzas al conjunto de las fuerzas que actúan en un sistema material cualquiera. Siendo las fuerzas asimilables a vectores aplicados en un punto. Los sistemas de fuerzas gozan de todos las propiedades de las sistemas de vectores aplicados y particularmente cuando las fuerzas son asimilables a vectores deslizantes le son aplicables las teorías de los momentos, pares y reducción de sistemas de vectores. Un sistema de fuerzas puede sustituirse por otro equivalente que produzca el mismo efecto mecánico (igual resultante e igual momento).Las fuerzas que actúan en un sistema material se pueden clasificar en fuerzas exteriores e interiores.

FUERZAS EXTERIORES

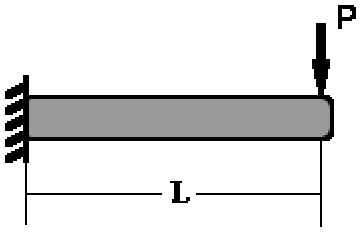
Las fuerzas exteriores son debidas a la acción de otros cuerpos sobre el sólido rígido considerado, siendo responsables del comportamiento externo del sólido rígido, es decir, provocarán el movimiento del sólido o harán que permanezca en equilibrio.

Las fuerzas exteriores se pueden clasificar a su vez en:

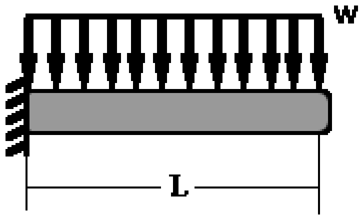
FUERZAS ACTIVAS O CARGAS

Son las aplicadas directamente a puntos del sistema material

Carga concentrada o puntual: está formada por fuerzas actuando en un punto definido, como por ejemplo, una fuerza aplicada o un momento aplicado. Están expresadas en unidades de fuerza o de momento (N, lb, kgf, N*m, lb*pie, kgf*m, etc.).



Carga distribuida o repartida: son cargas por unidad de superficie. Se expresa en unidades de fuerza sobre unidades de longitud (N/m, lb/pie, kgf/m). La magnitud de la fuerza originada por esta carga es igual al área de la forma generada por la carga y se ubica en el centroide.



Carga permanente o concarga: son cargas que existen siempre manteniéndose constantes en magnitud y posición a lo largo del tiempo .Ejemplos de este tipo de cargas son el peso propio,los pavimentos, los materiales de cubrición de los techos.

Carga variable o sobrecarga: son cargas que pueden o no existir y cuya magnitud y posición puede ser variable a lo largo del tiempo. A su vez estas cargas dependiendo del elemento que las provoque se pueden dividir en : sobrecarga de uso y explotación (transito de personas , de vehículos), sobrecarga de nieve, acciones el viento, acciones sísmicas, térmicas, empujes del terreno, etc…

Los vectores son las herramientas matemáticas que permiten figurar una carga sobre una viga y son la representación de una acción que ocurre en la estructura real; por ejemplo una columna que descansa sobre una viga sería un caso de carga puntual .Un ejemplo para cargas distribuidas sería el peso propio de los elementos o una losa de piso de concreto soportada por una viga.

FUERZAS REACTIVAS O REACCIONES

Son las que se originan en determinados puntos del sistema debido a las ligaduras o coacciones y que surgen cuando actúan fuerza activas. Las ligaduras o coacciones son dispositivos materiales que impiden total o parcialmente el libre movimiento de la sección de un sólido.

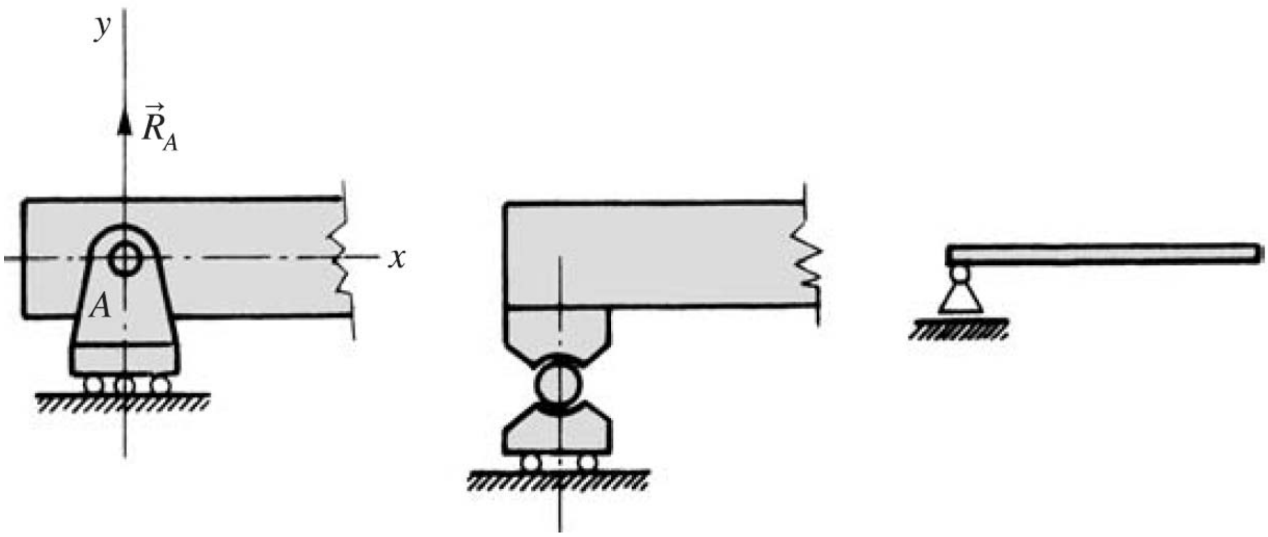
Al considerar la pieza genérica de una estructura, ésta estará sometida a una o varias ligaduras que la unen al resto de la misma o al suelo. En cada ligadura existe una reacción que, en general, estará formada por una fuerza y por un momento. Es condición necesaria para que la pieza esté en equilibrio que el sistema de fuerzas constituido por las fuerzas directamente aplicadas y las reacciones verifiquen las condiciones generales.

Es evidente que la reacción dependerá de la solicitación exterior y del tipo de vínculo. Una sección no sometida a ligadura alguna tiene, según sabemos, seis grados de libertad: tres posibles desplazamientos en las direcciones de los ejes coordenados x, y, z y los posibles giros alrededor de los mismos ejes.

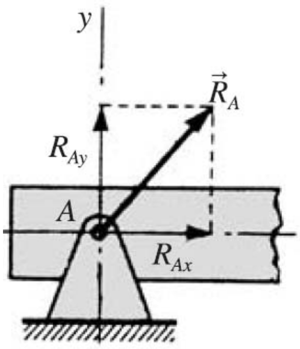
A cada grado de libertad impedido por la ligadura corresponde una componente de la reacción: si está impedido el movimiento de la sección en la dirección de uno de los ejes, la reacción de la ligadura comprende una fuerza que tiene una componente en la dirección de ese eje. Si además está impedido el giro de la sección alrededor de alguno de los ejes coordenados mediante un empotramiento, por ejemplo, la reacción comprende un momento que tiene una componente en la dirección de ese eje, es decir, si está impedido el giro en alguno de los planos coordenados, forma parte de la reacción de la ligadura un momento en dirección perpendicular a ese plano.

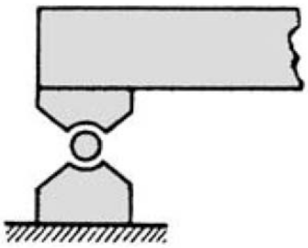
Las ligaduras se representan y simbolizan mediante apoyos pudiéndose clasificar en:

Apoyo articulado móvil: es libre el movimiento de la sección del vinculo en la dirección del eje x, así como el giro en le plano xy. La reacción se reduce a una fuerza perpendicular al posible desplazamiento del apoyo, equivale por tanto a una incógnita que es el módulo de la reacción Ry.

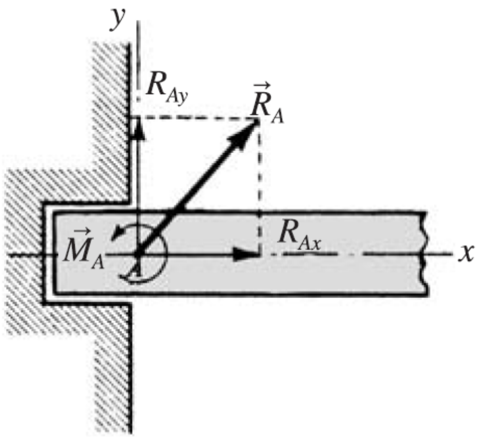


Apoyo articulado fijo: el desplazamiento está impedido tanto en la dirección del eje x como del eje y, pero el giro en el plano xy no lo está. La reacción en este caso es una fuerza Rx y Ry, equivale por lo tanto a dos incógnitas.





Apoyo empotrado o empotramiento: están impedidos los desplazamientos en las direcciones de los ejes x e y así como el giro en le plano xy quedando por lo tanto inmovilizada la sección de la figura .La reacción se compone de Rx y Ry y de un momento perpendicular al plano xy.Un empotramiento equivale pues a tres incógnitas.



FUERZA INTERNAS

Las fuerzas exteriores que aplicamos sobre los cuerpos provocan en ellos fuerzas internas o tensiones que se oponen a las exteriores. Ello es debido a que las fuerzas exteriores alteran las posiciones de reposo que mantiene las partículas elementales del interior del cuerpo y se desarrollan entonces fuerzas internas que tratan de recuperan las posiciones iniciales de las mismas.

Las fuerzas internas se representan siempre como pares de fuerzas iguales y opuestas en cada punto del cuerpo, que no se tiene en consideración al plantar el equilibrio el cuerpo en su conjunto.

Aunque la distribución real de estas fuerzas en la sección puede ser complicada, es evidente que debe ser estáticamente equivalentes a las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo, se puede siempre representar por una resultante R aplicada en el baricentro de la sección transversal junto con un par momento M

Las fuerzas internas tienen como misión mantener unidas entre sí todas las partículas de las que está formado el sólido rígido, y si nuestro sólido rígido está compuesto estructuralmente por varias partes, las fuerzas que mantienen la unión se definen también como fuerzas internas.

8.3 CONDICION DE EQUILIBRIO DE UN SÓLIDO RÍGIDO

Todo sistema de fuerzas puede sustituirse por una fuerza (resultante) y un par de fuerzas (momento resultante)

Para que un sólido esté en equilibrio tienen que estarlo todos y cada uno de los puntos materiales que componen el sólido. El punto material puede estudiarse como libre sometido a las fuerzas exteriores y a las interiores, pero estás, por ser dos a dos iguales y opuestas se equilibran. Por tanto el equilibrio del sólido depende exclusivamente de las fuerzas exteriores (activas y reactivas).

Por lo que se expresa como condición necesaria y suficiente para que un sólido esté en equilibrio, que la resultante y el momento resultante respecto aun punto cualquiera del sólido de las fuerzas exteriores que actúan sobre él sea iguales a cero. Obteniéndose por tanto las ecuaciones de equilibrio también llamadas ecuaciones básicas de la estática:

1. La suma algebraica de fuerzas en el eje X que se denominan Fx, o fuerzas con dirección horizontal, es cero. $\Sigma Fx = 0 \rightarrow \Sigma\ Fh = 0$

2. La suma algebraica de fuerzas en el eje Y denominadas Fy, o fuerzas con dirección vertical, es cero. $\Sigma Fy = 0 \rightarrow \Sigma Fv = 0$

3. La suma algebraica de momentos M, o tendencias de giro respecto a un punto determinado en equilibrio, es cero. $\Sigma M_{Pto} = = 0$

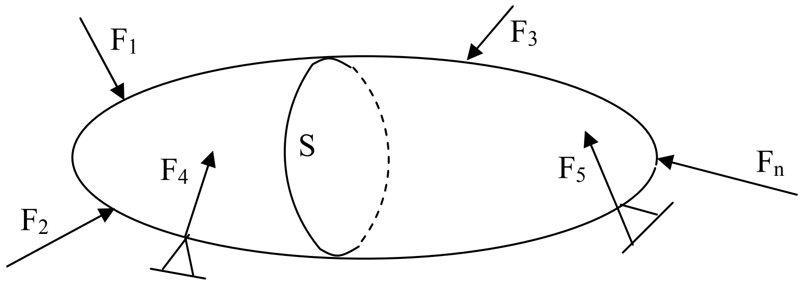
$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_{Pto} = 0 \quad \Sigma F_y = 0$$

Estas ecuaciones expresan el hecho de que las componentes de las fuerzas externas en las direcciones *x* e *y*, así como los momentos de las fuerzas externas están en equilibrio. Por tanto, el sistema de fuerzas externas no impartirá ni movimiento de traslación ni de rotación al cuerpo rígido considerado.

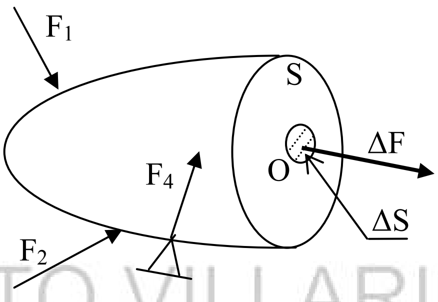
El uso de la condición de equilibrio en una estructura permite realizar el proceso analítico esencial en un problema estructural. En la etapa inicial se pueden conocer las fuerzas que se generan en los apoyos para hacer que la estructura este en equilibrio .Por medio de estas ecuaciones obtenemos el valor de lar reacciones de las ligaduras.

8.4 ESFUERZOS MECÁNICOS

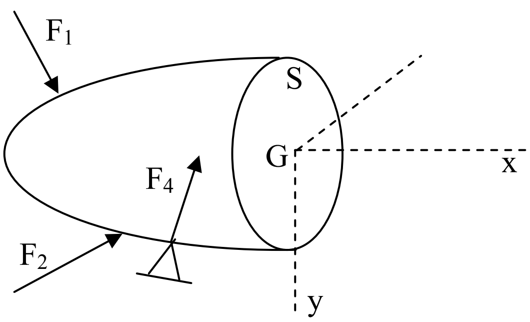
Consideremos un sólido sometido a un sistema de fuerzas exteriores y que se encuentra en equilibrio estático y elástico.



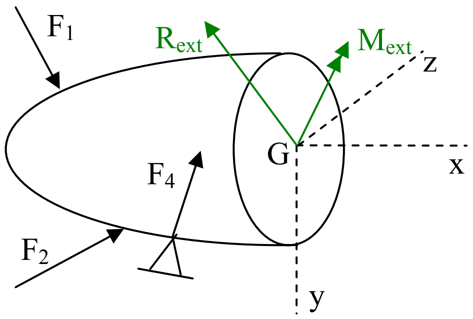
Si se desea conocer las Fuerzas Internas o Tensiones que aparecen en una superficie determinada S, seccionamos el sólido por dicha superficie y nos quedamos con una de las dos partes del mismo



El trozo de sólido seccionado no estará en equilibrio, a no ser que se restablezcan las acciones que el otro trozo ejercía sobre él. Estas acciones son precisamente las Fuerzas Internas o Tensiones que aparecerían sobre los puntos de la superficie S seccionada. Pues bien, para saber algo de ellas, hagamos lo siguiente:



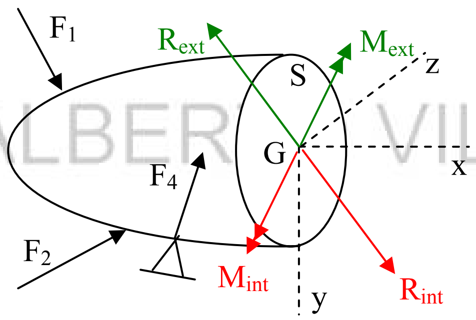
Tomemos un sistema de ejes coordenados con origen en G (centro de gravedad de la sección S), siendo el eje X perpendicular a la superficie S y con sentido positivo saliente de la misma y los ejes Y y Z los ejes principales de la sección S, con sus sentidos positivos de tal forma que formen un triedro directo.La acción de las Fuerzas Exteriores, actuando sobre este trozo del sólido, en el punto G, vendrán dadas por: Rext y Mext.



Rext=Resultante de las Fuerzas Exteriores

Mext=Momento resultante de las Fuerzas Exteriores respecto de G

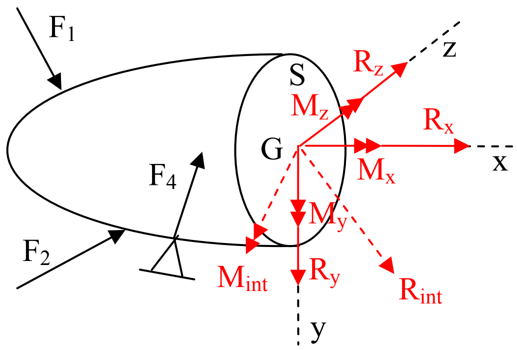
Para que este trozo de sólido seccionado esté en equilibrio, el sistema de Fuerzas Interiores extendido a lo largo de la superficie S, (fuerzas que las partículas del otro lado de la superficie S que hemos apartado, estaban actuando sobre las partículas de la superficie S del lado del sólido que nos hemos quedado), producirán una acción en G dada por: R_{int} y M_{int} y se tendrá que cumplir que:



$R_{int} = - R_{ext}$

$M_{int} = - M_{ext}$

Por último, si proyectamos R_{int} y M_{int} sobre los tres ejes de referencia XYZ, nos darán 6 componentes: R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z,



En efecto, refiriendo la resultante R sobre los 3 ejes de referencia cuyos vectores unitarios son *i, j, k* se tiene:

$$R = Rxi + Ry\,j + Rz\,k$$

A la componente *Rx* se le suele simbolizar por la letra *N* y a las *Ry y Rz* por *Vy y Vz*

<u>Cada una de esas componentes se les denomina esfuerzo y nos indica una forma de Trabajo o de solicitación de la sección S:</u>

***N*,**llamado **esfuerzo normal**, por serlo a la superficie de la sección considerada, tiende a empujar o separar a ambas partes del prisma dando lugar a esfuerzos de compresión o tracción, respectivamente.

V_y *y* V_z por estar en el mismo plano de la sección, efectúan la misma clase de esfuerzo y, por tanto, podemos obtener su resultante *V= Vy j + Vzk* que es la expresión de un esfuerzo que actúa tangencialmente a la superficie de la sección como si se tratase de deslizar la sección respecto de una muy próxima separándola o cortándola. Es por ello que esta componente de la resultante se denomina **esfuerzo tangencial o cortante**. Si el prisma se rompiese por la sección recta, el vector V nos indicaría la dirección en que saldrían despedidos los dos trozos del prisma.

M_T actúa perpendicularmente al plano de la sección en la dirección de la línea media; portanto, tiende a hacer girar el sólido sobre sí mismo, creando un efecto de torsión. Se llama por ello a M_T **momento torsor.**

Análogamente, podemos proceder a descomponer el momento resultante *M* en la dirección perpendicular al plano de la sección y en otra componente contenida en dicho plano

$$M = MT\,i + My\,j + Mzk$$

Como ya sabemos, el vector momento nos expresa una tendencia al giro. Expresado *M* en función de sus componentes *MT, My y Mz*, veamos qué efecto produce cada una de ellas sobre el prisma.

My y Mz tienden a obligar al sólido a girar lateralmente curvándolo en los planos *xz y xy*, respectivamente, flexionándolo, por lo que se denominan **momentos flectores**. Su resultante está contenida en el plano de la sección recta; es el **momento flector**

$$M_F = My\,j + Mzk$$

<u>En resumen:</u>

R_x (fuerza normal) $\rightarrow$ **N** (TRACCIÓN – COMPRESIÓN)

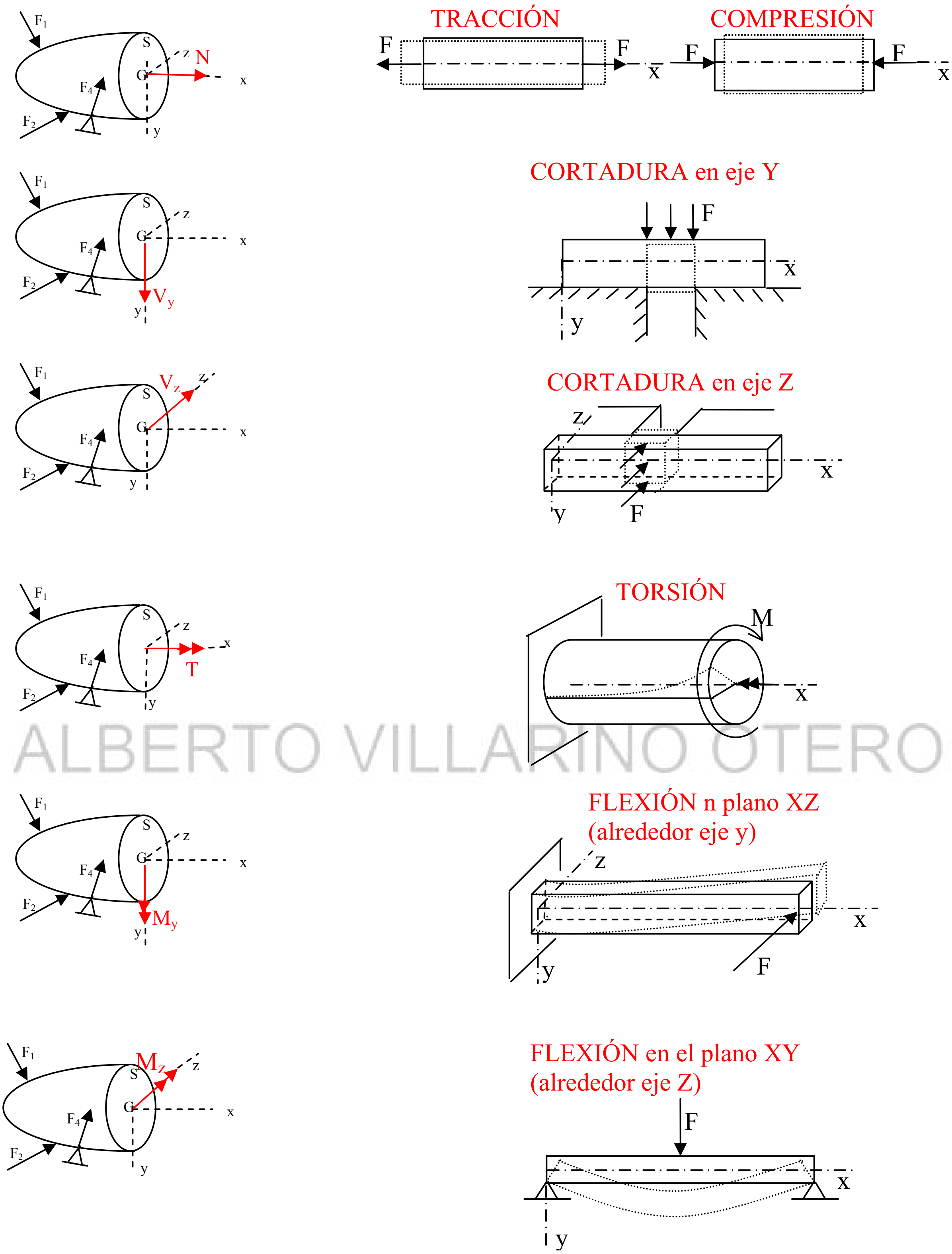
R_y (fuerza cortante) $\rightarrow$ $\mathbf{V_y}$ (CORTADURA en eje Y)

R_z (fuerza cortante) $\rightarrow$ $\mathbf{V_z}$ (CORTADURA en eje Z)

M_x (momento torsor) $\rightarrow$ **T** (TORSIÓN)

M_y (momento flector) $\rightarrow$ $\mathbf{M_y}$ (FLEXIÓN en plano XZ, alrededor del eje Y)

M_z (momento flector) $\rightarrow$ $\mathbf{M_z}$ (FLEXIÓN en plano XY, alrededor del eje Z)


TRACCIÓN
COMPRESIÓN
N
CORTADURA en eje Y
V_y
CORTADURA en eje Z
V_z
TORSIÓN
T
M
FLEXIÓN n plano XZ
(alrededor eje y)
M_y
FLEXIÓN en el plano XY
(alrededor eje Z)
M_z
F_1
F_2
F_4
S
G
F
x
y
z

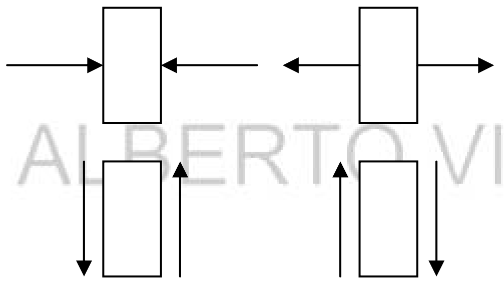
8.5 CÁLCULO Y REPRESENTACIÓN DE ESFUERZOS EN PIEZAS SIMPLES

Los esfuerzos anteriormente definidos serán en general, una función de la abscisa *x,* que determina la posición de la sección recta, en cada caso se considere. Así para tener una idea de la situación de una pieza bajo determinadas solicitaciones, es útil representar gráficamente el valor de cada uno de los esfuerzos a lo largo de toda la pieza. Esta representación gráfica será la de una función F=f(x), donde F representa genéricamente a cualquiera de los esfuerzos definidos.

Para ello debemos establecer un convenio de signos para esfuerzos axiles, cortantes y momentos flectores .Es evidente que la resultante, así como el momento, de las fuerzas situadas a la derecha de una sección tiene igual módulo, igual dirección y distinto sentido que la resultante, o momento, de las que se encuentran a su izquierda, ya que el equilibrio estático exige que se verifique:

$$\Sigma F=0 \qquad \Sigma M=0$$

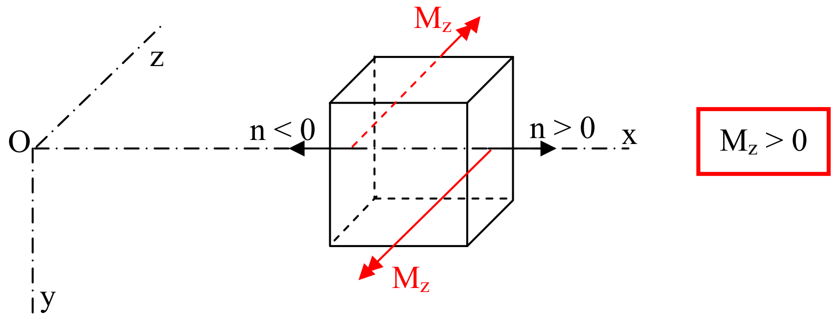
En este caso, será necesario adoptar un convenio para los signos de ambas magnitudes, con objeto de evitar ambigüedades.



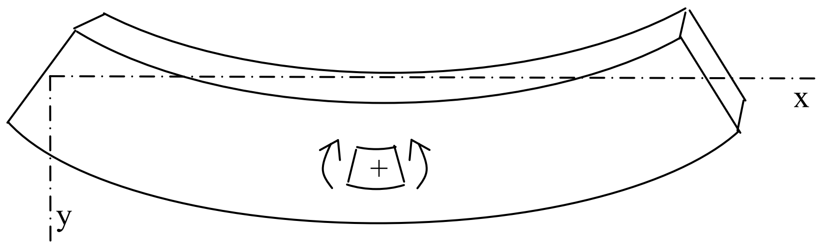
Los axiles son positivos cuando son tracciones y negativos cuando son compresiones.

Para el esfuerzo cortante, si la resultante de las fuerzas verticales situadas a la izquierda de la sección está dirigida hacia abajo, diremos que el esfuerzo cortante es positivo, siendo negativo en caso contrario.

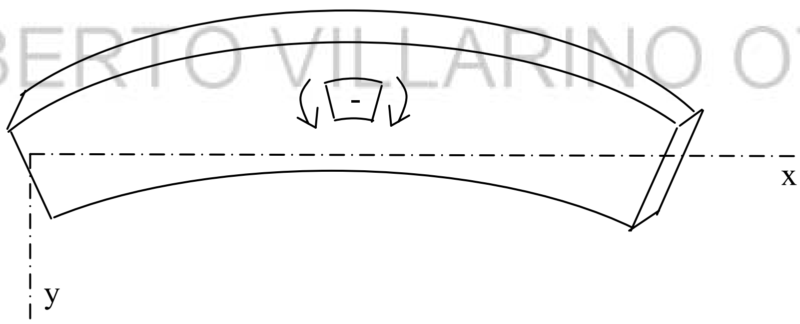
En una sección con normal exterior positiva (n > 0), el momento flector Mz será positivo, cuando lleve el sentido contrario al del semieje OZ positivo .Será negativo en caso contrario. En el caso de una sección con normal exterior negativa (n < 0) será al revés



$M_z > 0$: la viga flexa (se dobla) hacia la parte positiva del eje y



$M_z < 0$: la viga flexa (se dobla) hacia la parte negativa del eje y



Las Fuerzas Cortantes y los Momentos Flectores no son independientes sino que están relacionados entre sí ya que La Fuerza Cortante es la derivada del Momento Flector

Para llevar a cabo el cálculo y representación de esfuerzos se establecen los siguientes pasos:

1. Se toma un origen de referencia (puede ser a la izquierda o a la derecha)

2. Calculamos las reacciones que imponen las coacciones de la pieza, para ello se impondrán la condición de equilibrio

$$\Sigma F = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

De estas ecuaciones se obtienen el valor de las reacciones que nos provocan las ligaduras

3. Se establece tantos tramos como estados de carga esté sometida la pieza.

4. En cada tramo para una distancia “x” se realizará un corte imaginario y se impondrá las condiciones de equilibrio obteniendo un *N(x) V(x) y M(x)* en el caso de que existan los 3 tipos de esfuerzos, es decir un esfuerzo axil, cortante y momento flector que son los necesarios para equilibrar el provocado por las fuerzas exteriores, el signo se establece con el convenio indicado anteriormente

5. Esa función N(x) V(x) y M(x) se representa gráficamente obteniendo los diagramas de esfuerzos

8.6 CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS

Únicamente clasificaremos las estructuras atendiendo a la movilidad de sus elementos y al criterio general de estabilidad

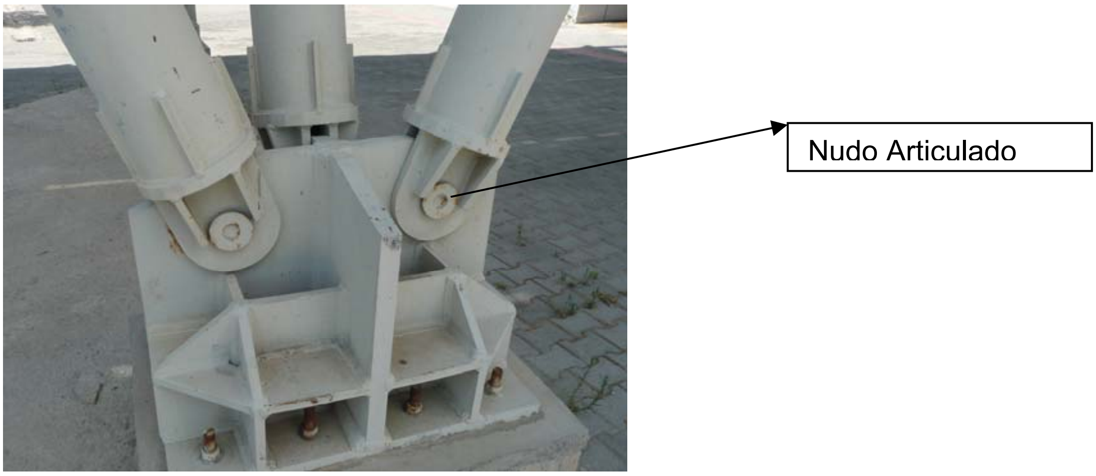
SEGÚN LA MOVILIDAD DE SUS ELEMENTOS

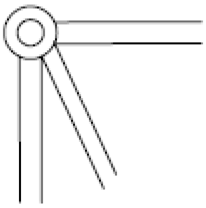
Estructuras rígidas o retículadas

Formadas por piezas interconectadas en diversos puntos mediante soldadura, remaches o tornillos u otros procedimientos que no permiten el movimiento relativo entre las piezas al aplicar las cargas, por lo que no permiten el giro no pudiendo variar el ángulo que forman los elementos en la unión. Por lo que estas en estas estructuras sus nudos rígidos permiten la transmisión de momentos.

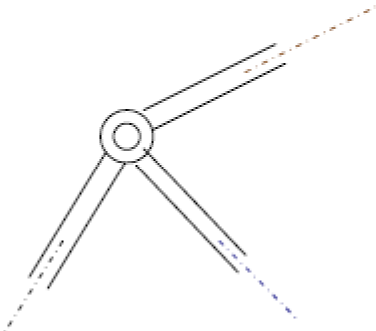
Estructuras articuladas

Formadas por elementos o barras unidos mediante rótulas (articulaciones) con lo que se permite el movimiento relativo entre la barras con lo que se permite el giro de una barra respecto a otra, en este caso la articulación no permite la transmisión de momentos. Si las cargas están aplicada directamente sobre los nudos, las barras trabajan a esfuerzo axil, es decir a tracción o compresión. Si las cargas actúan además sobre las barras, sus extremos están solicitados por axiles y cortantes





Posición inicial



Posición final

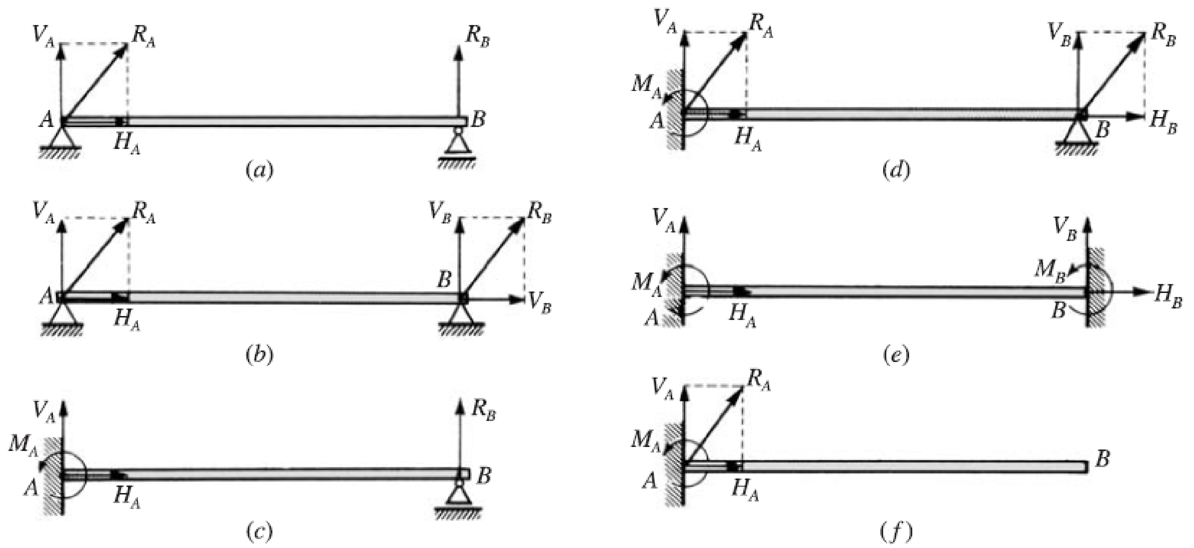
SEGÚN EL CRITERIO GENERAL DE ESTABILIDAD

En una estructuras es necesario conocer completamente la solicitación exterior, es decir, no sólo las fuerzas directamente aplicadas que, generalmente, serán conocidas, sino las reacciones de las ligaduras que son desconocidas.

Las ecuaciones que disponemos para determinar las correspondientes incógnitas son las,que expresan las condiciones de equilibrio de la pieza. Estas ecuaciones, que son seis en el caso general, permiten calcular otras tantas incógnitas. Por tanto, para poder determinar las reacciones de las ligaduras exteriores dentro del marco de la Estática, será necesario que el número de incógnitas de éstas no supere a seis para un sistema arbitrario de fuerzas directamente aplicadas.

En casos particulares de carga, como ocurre en las vigas con plano medio de simetría y las cargas contenidas en dicho plano, el número de ecuaciones disponibles disminuye a tres Rx = 0 ; Ry = 0 ; M0z = 0 y, por tanto, también se reduce a tres el número de incógnitas posibles de las ligaduras para que el problema esté determinado aplicando las ecuaciones de equilibrio. Los sistemas tales que la sola aplicación de las ecuaciones de la Estática permiten determinar las reacciones de las ligaduras reciben el nombre de **sistemas isostáticos.**

Por el contrario, si existen ligaduras exteriores superabundantes, el número de incógnitas supera al de ecuaciones de equilibrio. Se dice entonces que se trata de un **sistema hiperestático**. Para la determinación de las reacciones será necesario hacer intervenir las deformaciones. En este último caso se llama **grado de hiperestaticidad** al exceso de incógnitas respecto al número de ecuaciones de equilibrio. Por ejemplo, en vigas rectas con plano medio de simetría, cargada en dicho plano, disponemos de las tres ecuaciones Se pueden presentar los siguientes casos según sean los apoyos



a) Viga con un extremo articulado fijo (dos incógnitas) y el otro articulado móvil (una incógnita). Sistema, por tanto, isostático.

b) Viga con apoyos articulados fijos en ambos extremos (cuatro incógnitas). Sistema hiperestático de primer grado.

c) Viga empotrada en un extremo (tres incógnitas) y sustentada en el otro mediante apoyo articulado móvil (una incógnita). Sistema hiperestático de primer grado.

d) Viga empotrada en un extremo (tres incógnitas) y con apoyo articulado fijo en el otro (dos incógnitas). Sistema hiperestático de segundo grado.

e) Viga biempotrada (seis incógnitas). Sistema hiperestático de tercer grado.

f) Viga empotrada en un extremo (tres incógnitas) y libre en el otro. Se le suele denominar viga en voladizo. Sistema isostático.

8.7 ESTRUCTURAS TÍPICAS

A continuación se destacan algunos de las estructuras más usuales:

VIGAS

Son elementos del tipo definido como barra, cuya función es soportar cargas en un vano. Dada la sencillez de sus componentes (uno solo) las diferencias de las vigas proviene de sus apoyos. Así distinguiremos:

Vigas simples: son las apoyadas únicamente en sus extremos teniendo viga biapoyada, viga biempotrada, viga apoyada y empotrada y viga en voladizo

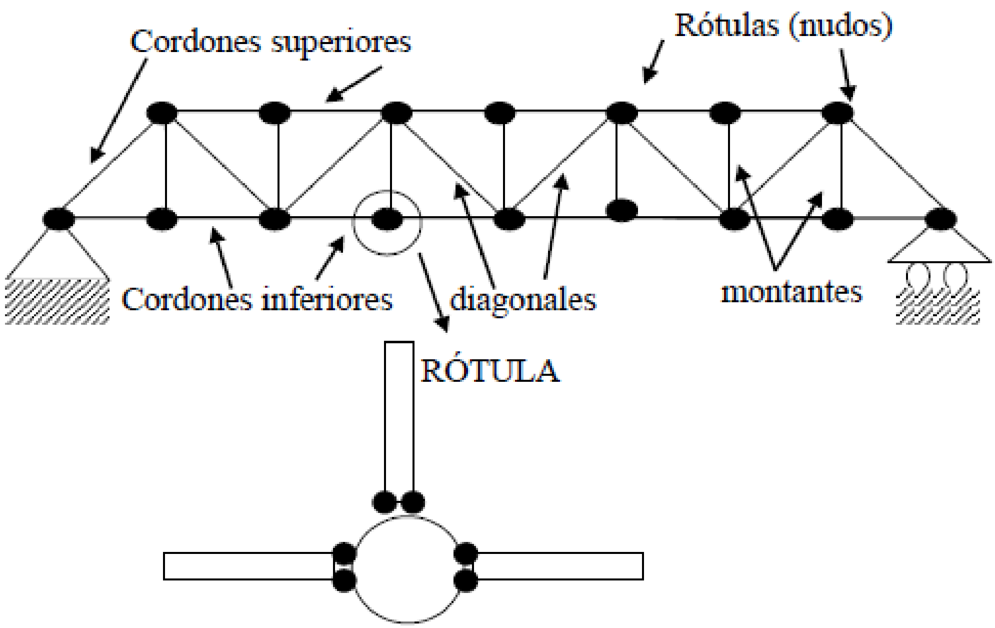
Vigas continuas: formada por "n" vanos iguales o desiguales

CELOSÍAS

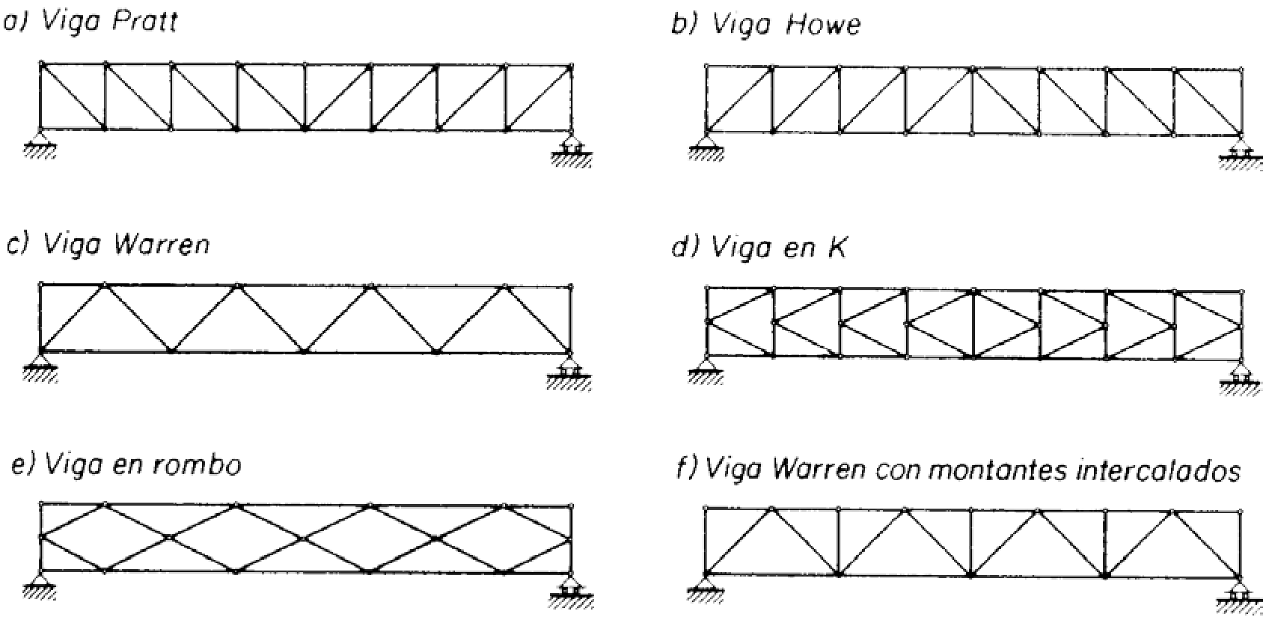
Es una de las formas estructurales más importantes, en general se puede definir como un conjunto de barras unidas por sus extremos formando nudos en los mismos, constituyendo normalmente estructuras trianguladas y articuladas. Se utilizan principalmente en construcciones con luces grandes, como almacenes y en general edificaciones con grandes espacios en su interior. Las celosías se pueden clasificar a su vez en vigas y cerchas

VIGAS EN CELOSÍA

Cuando necesitamos salvar luces importantes (a partir de 10 - 15 m por ejemplo), o necesitamos tener vigas de cantos importantes, puede resultar más económico utilizar estructuras articuladas en celosía que vigas de alma llena. Utilizadas en la construcción de puentes.Los elementos de una viga en celosía son los siguientes:

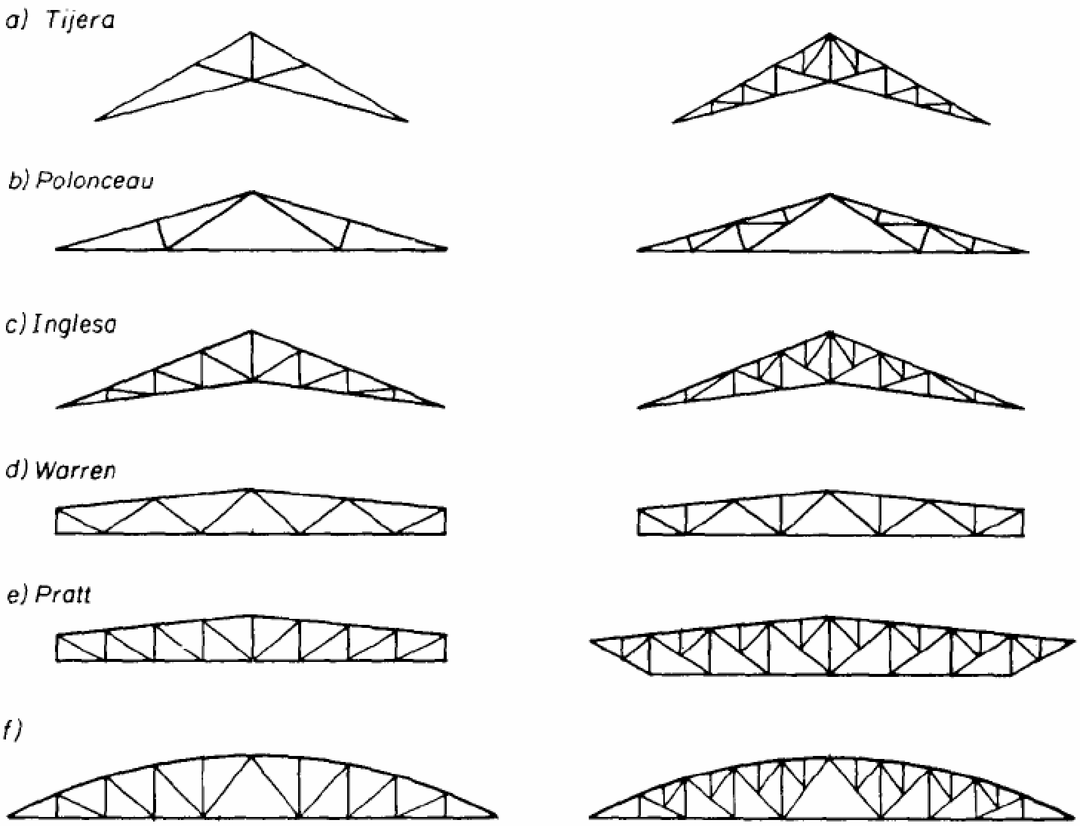


Existiendo diferentes tipos como:



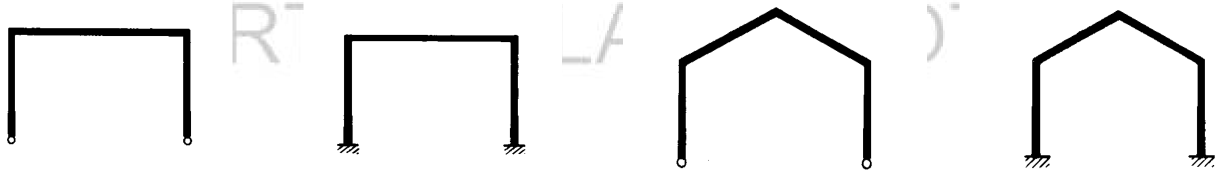
CERCHAS

Se utilizan para cubiertas con faldones inclinados los cordones superiores siguen la inclinación de los faldones. Existen diversos tipos como:



PÓRTICOS

Son estructuras formadas por un entramado plano de barras no colineales cuyos nudos son rígidos. Se utilizan en edificación y en estructuras industriales. A continuación se representan algunos ejemplos de pórticos sencillos:



8.8 MÉTODOS DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ARTICULADAS ISOTÁTICAS

Para llevar acabo el análisis de una estructura existen multitud de métodos usando unos u otros dependiendo del tipo de estructura a analizar. Existe el método de las fuerzas, el de los desplazamientos o deformaciones, Hardy-Cross, método matricial, nudos, Ritter,etc.A continuación debido a la complejidad y extensión de algno de los métodos explicaremos únicamente dos métodos para el análisis de estructuras articuladas isostáticas.

<u>METODO DE LOS NODOS O NUDOS</u>

Una estructura articulada puede considerarse como un conjunto de barras y pasadores o nudos. Cuando es isostática, su análisis puede realizarse por los métodos que se exponen a continuación. Para ello hay que establecer el diagrama de sólido libre tanto para la estructura completa, como para cada barra y para cada nudo. La figura muestra el diagrama de sólido libre para una estructura completa, donde aparecen las cargas exteriores y las fuerzas de reacción en los apoyos. Las fuerzas sobre las barras son dos, una en cada extremo, y dirigidas en la dirección de dicha barra con sentidos opuestos. Por la ley de acción y reacción, las fuerzas ejercidas sobre los nudos (barras sobre nudos) serán iguales, pero de sentido contrario, a las fuerzas ejercidas sobre las barras (nudos sobre barras). El esfuerzo que aparece en cada barra se denomina esfuerzo axil, pudiendo ser de tracción cuando tiende a alargarla o de compresión cuando tiende a acortarla.

Cuando una estructura está en equilibrio, también lo estarán sus barras y sus nudos, por lo que podremos expresar las condiciones de equilibrio para toda la estructura completa, para cada barra y para cada nudo. De esta manera se muestran los diagramas de sólido libre correspondientes a las barras y a los nudos respectivamente.

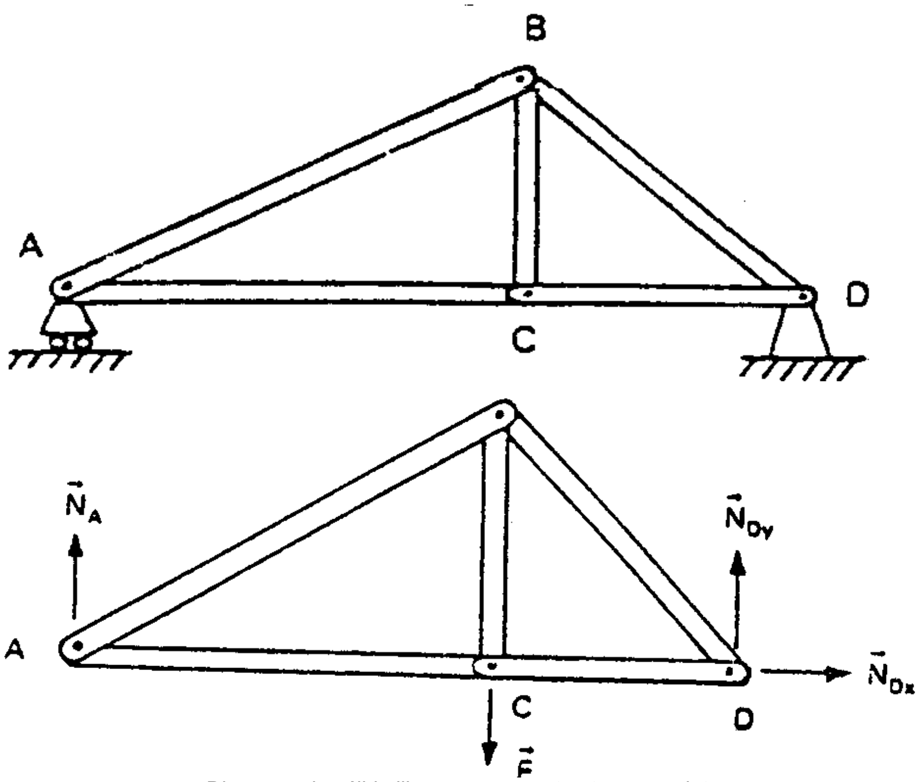
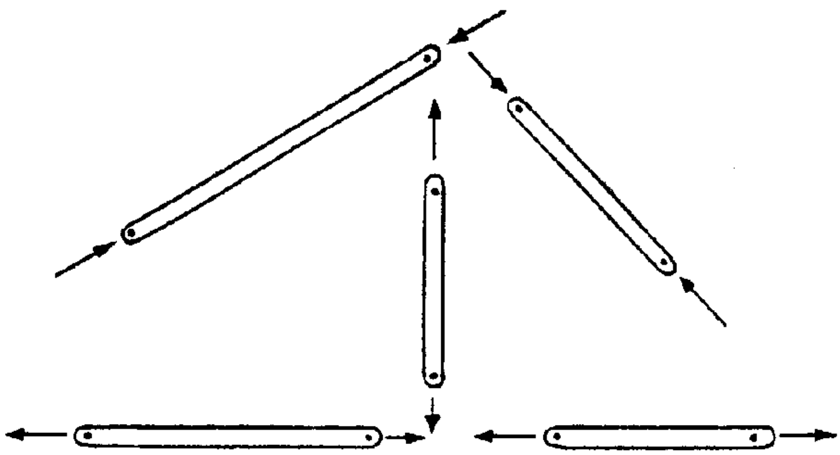
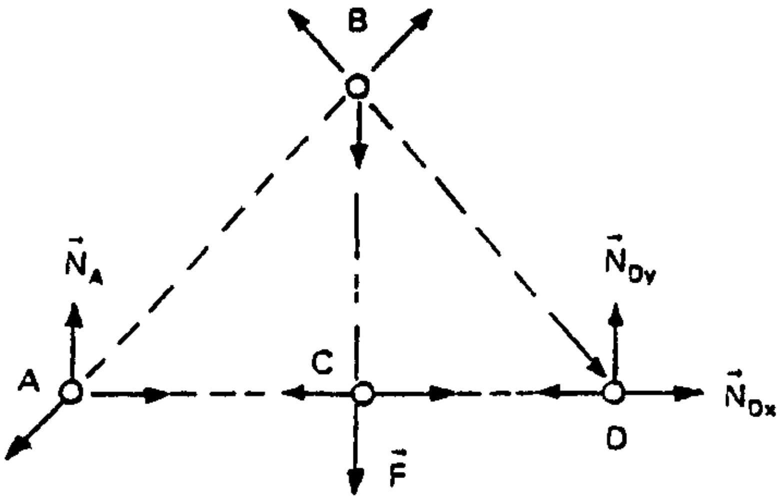


Diagrama de sólido libre para una estructura completa



Diagramas de sólido libre barras



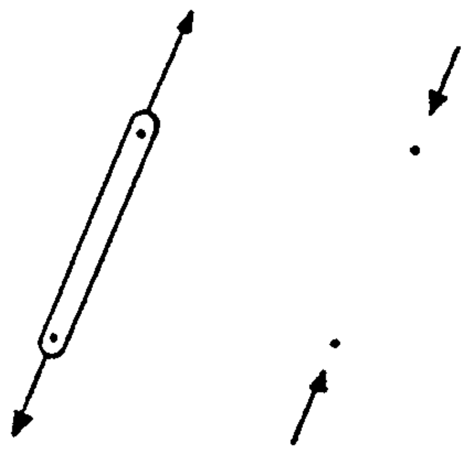
Diagramas de sólido libre nudos

El método de los nudos, es un método numérico que consiste básicamente en plantear las ecuaciones de equilibrio estático en cada nudo de la estructura. Para su desarrollo hay que realizar los siguientes pasos:

1. Calcular las fuerzas de reacción en los apoyos mediante las ecuaciones de equilibrio de toda la estructura considerada como sólido libre.

2. Plantear la ecuación de equilibrio para cada nudo y calcular la fuerza que ejerce cada barra sobre el nudo. La fuerza del nudo sobre la barra será igual y de sentido contrario, determinando así el valor de las dos fuerzas que actúan sobre la barra en sus extremos y si son de tracción o de compresión .Primeramente se supone que todas las barras trabajan a tracción (o compresión) y si el resultado obtenido es negativo significa que en realidad trabajan al revés, compresión (o tracción).

Barra en tracción



Fuerzas nudos sobre barras **Fuerzas barras sobre nudos**

Dado que en cada nudo solo hay dos ecuaciones de equilibrio, es necesario empezar por un nudo que solo tenga dos barras y continuar el proceso siempre con nudos que, aunque tenga más de dos barras, solo en dos de ellas sean desconocidas las fuerzas.

Para explicar prácticamente tanto este método de análisis, se va a utilizar la estructura siguiente con la carga y dimensiones representadas, que presenta la ventaja de su sencillez y la particularidad de que tal y como está aplicada la carga, la barra "BC" no trabaja, es decir no está sometida a ninguna fuerza. Las barras no sufren ningún esfuerzo:

–Cuando sólo dos barras de diferentes direcciones coincidan en un nudo, y éste no está exteriormente cargado, ninguna de las dos barras sufre esfuerzo axil.

– Si tres barras coinciden en un nudo, y éste no está cargado, y dos de las barras tienen la misma dirección, la barra no colineal con las dos anteriores no sufre esfuerzo axil.

1.Cálculo de las reacciones

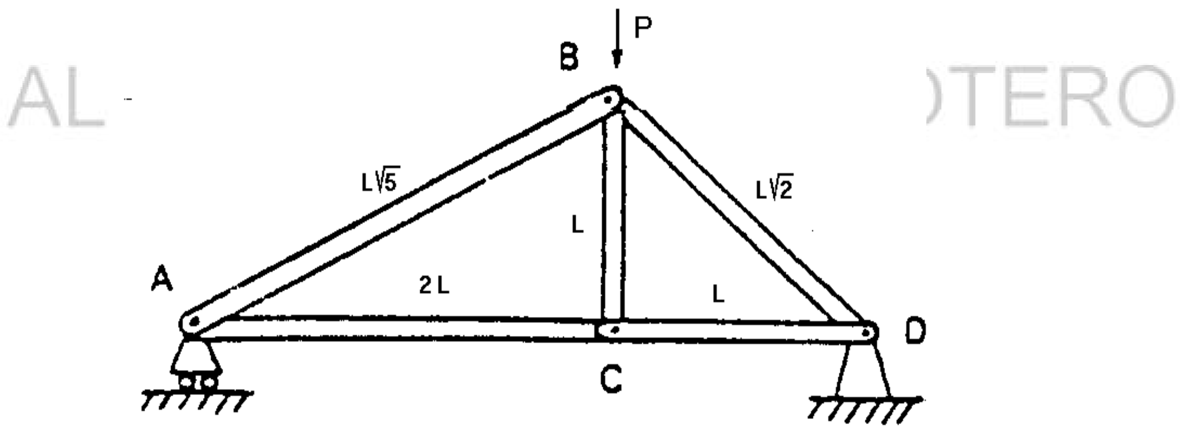
Planteamos las tres ecuaciones de equilibrio para toda la estructura considerada como sólido libre.

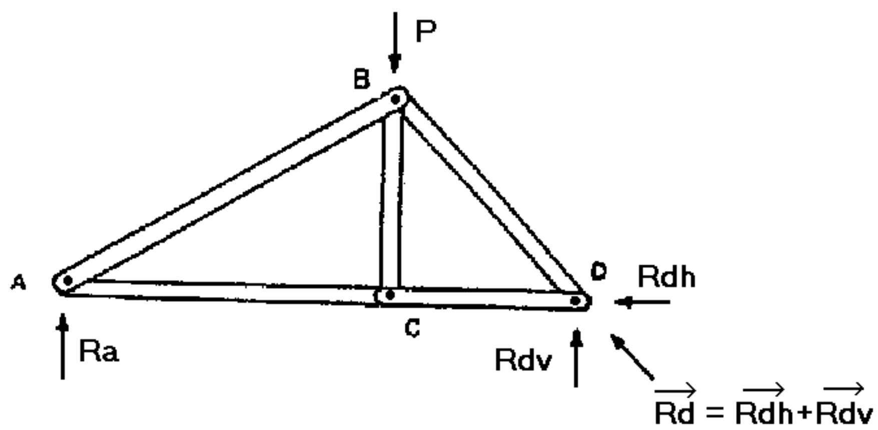
$\Sigma Fh=0$ $Rdh = 0 \rightarrow Rd = Rdv$

$\Sigma Fv=0$ $Ra + Rd - P = 0 \rightarrow Ra + Rd = P$

$\Sigma Md=0$ $Ra.3L – P.L = 0 \rightarrow Ra = P/3$

$Rd = P – P/3 \rightarrow Rd = 2P/3$

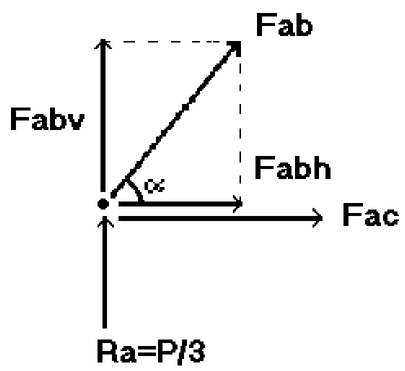




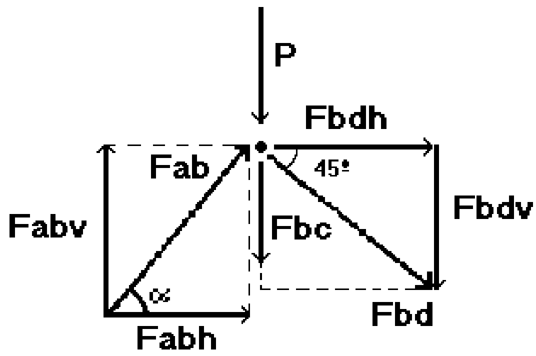
2.Cálculo del nudo A

Dado que en cada nudo solo hay dos ecuaciones de equilibrio, es necesario empezar por un nudo que solo tenga dos barras y continuar el proceso siempre con nudos que, aunque tengan más de dos barras, solo en dos de ellas sean desconocidas las fuerzas. Hemos supuesto que todas las barras trabajan a tracción, es decir que las fuerzas de las barras sobre los nudos salen de ellos.

Nudo A



Nudo B



3. Cálculo de los restantes nudos

A continuación se puede proceder al cálculo del nudo B, ya que conocida Fab, solo tiene dos fuerzas desconocidas Fbc (Barra BC) y Fbd (Barra BD). Al plantear las dos ecuaciones de equilibrio podemos considerar ya Fab, calculada anteriormente, con su sentido verdadero que es de compresión, al contrario de cómo se supuso inicialmente.

$Fabh = Fab.\cos\alpha = P\sqrt{5}/3.2/\sqrt{5} = 2P/3$

$Fabv = Fab.\text{sen}\alpha = P\sqrt{5}/3 \,.\, 1/\sqrt{5} = P/3$

$\Sigma Fh=0 \quad Fabh + Fbdh = 0 \rightarrow 2P/3 + Fbdh = 0 \rightarrow Fbdh = -2P/3$

$Fbdh = Fbd.\text{sen}45º = Fbd/2 \rightarrow$ **Fbd** $= 2Fbdh =$ **- 4P/3** (- Compresión)

$\Sigma Fv=0 \quad -P - Fbc - Fbdv + Fabv = 0 \rightarrow Fbc = -P - Fbdv + Fabv$

$Fbdv = Fbd.\text{sen}45º = -4P/3 \,.\, 1/2 = -2P/3$

Fbc $= -P - (-2P/3) + P/3 = -P + 2P/3 + P/3 =$ **0** (No trabaja)

Solo queda por determinar Fcd ya sea usando el nudo C o el D. Directamente observando el nudo C y dado que Fbc = 0 la única forma de que esté en equilibrio es que Fac = Fcd, luego:

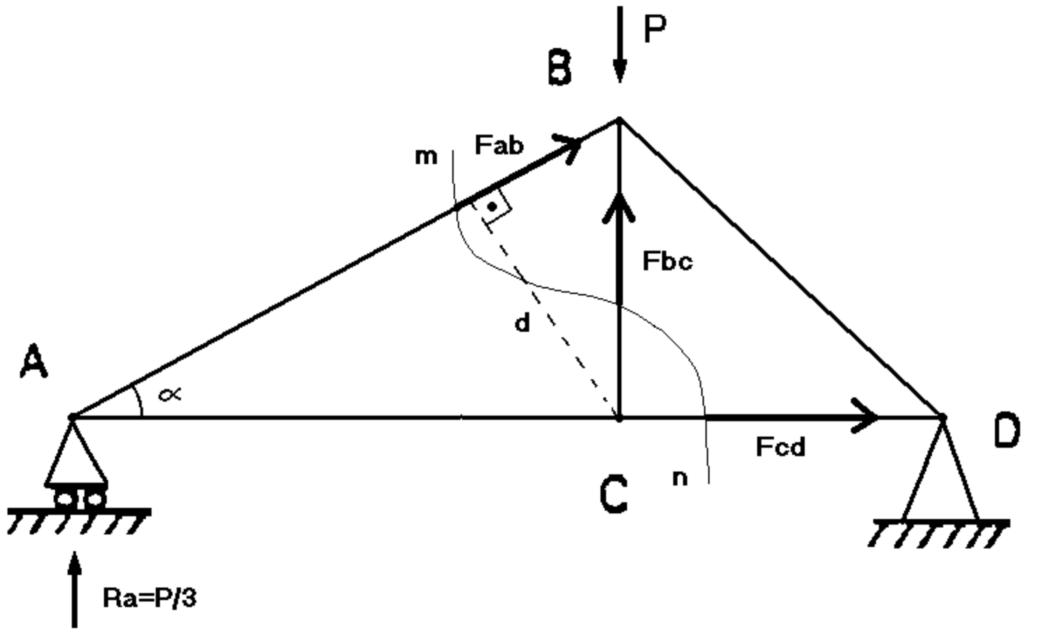
Fcd = Fac = **2P/3** (+ Tracción)

METODO DE LAS SECCIONES O RITTER

El método de Ritter consiste en cortar la estructura por una sección que intersecte solo tres barras, segregar una de las dos partes en la que ha quedado dividida la estructura y aplicar a la otra las tres ecuaciones de equilibrio en la forma de tres ecuaciones de momentos. Es el método más efectivo cuando se desean conocer los esfuerzos en una o en pocas barras, sin analizar la totalidad de la estructura.

La estructura de la figura siguiente queda dividida en dos partes por la línea “mn” que corta tres barras, las AB, BC y CD. El trozo izquierdo estará en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores (fuerzas externas y reacciones) que actúan sobre él y de las acciones que la parte derecha segregada ejerce sobre la izquierda que es la que se analiza. De las acciones que la parte derecha ejerce a través de las barras, se conoce su dirección, faltando por determinar su intensidad y sentido, para lo que se dispone de tres ecuaciones de equilibrio en forma de tres ecuaciones de momentos respecto a tres puntos. Estos puntos se eligen de forma que resulten ser las tres intersecciones (A, B, C) de las barras cortadas (AB, BC y CD) tomadas dos a dos.

Se toma el criterio de que las fuerzas en las barras cortadas son positivas, es decir trabajan a tracción, cuando se alejan de secciones cortadas por la línea “mn”, y así se suponen. La ecuación de momentos correspondiente determinará tanto la intensidad como el sentido de la fuerza de la barra, que será realmente de tracción cuando resulte + y de compresión cuando resulte .A continuación, y según el siguiente dibujo, se resuelve la estructura planteada utilizando este método:



Tomando momentos respecto a los puntos A, B y C tenemos:

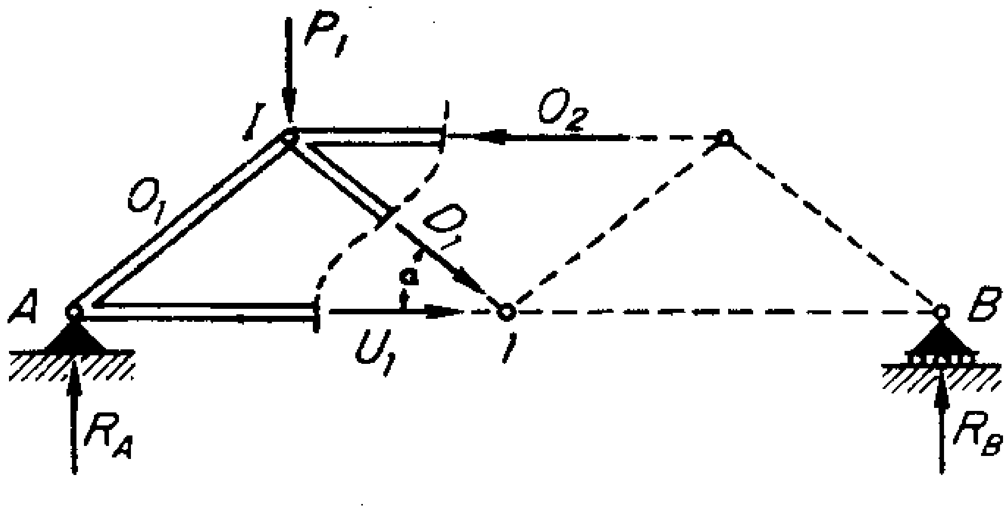
$\Sigma Ma=0$ $-Fbc.2L = 0$ $Fbc = 0$

$\Sigma Mb=0$ $Ra.2L-Fcd.L = 0$ $Fcd = 2Ra = 2P/3$ (+) → Tracción

$\Sigma Mc=0$ $Ra.2L+Fab.d = 0$ siendo $d = 2L.\text{sen}\alpha = 2L.1/\sqrt{5}$ $(P/3).2L+Fab.2L.1/\sqrt{5} = 0$

$Fab = P\sqrt{5}/3$ (-) → Compresión

No siempre como en el caso anterior los puntos de intersección de las barras en los cuales se aplican las tres ecuaciones de momentos son nudos de la estructura; pudiendo resultar puntos alejados o incluso en el infinito como en el caso de dos barras paralelas. Entonces puede reemplazarse la tercera ecuación de momentos por una de proyección de fuerzas sobre la vertical. Así en la estructura representada a continuación, una vez determinadas las fuerzas en las barras “O2” y “U1” por ecuación de momentos alrededor de los puntos "1" e "I", como el punto de intersección de las barras “O2” y “U1” se halla alejado (en el infinito en este caso), se sustituye la tercera ecuación de momentos por otra de proyecciones de fuerzas sobre la vertical, obteniéndose:

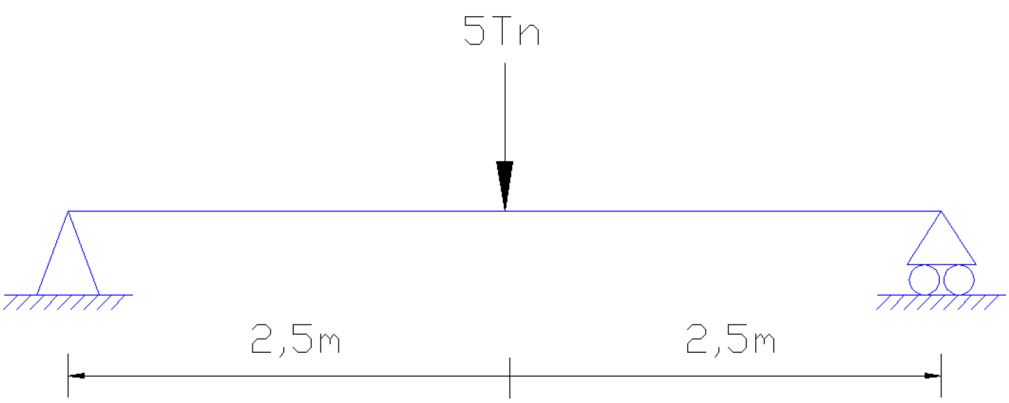


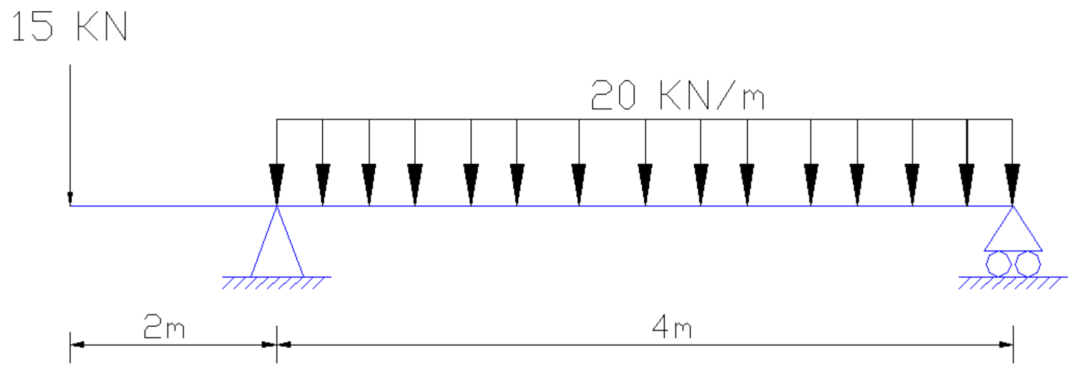
Ra-P1-D1.senα=0; D1=(Ra-P1)/senα

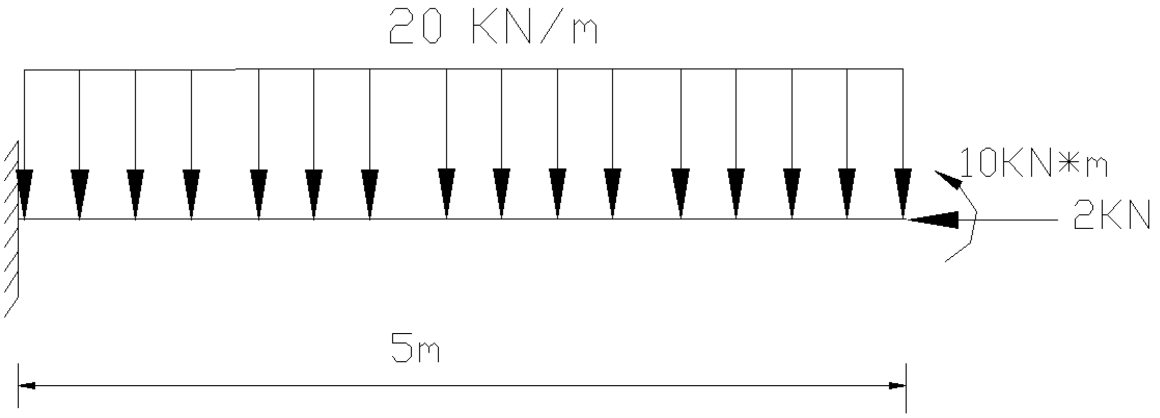
De todo lo expuesto se desprende que el método de Ritter no se puede utilizar si la sección corta a más de tres barras, ya que sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio.

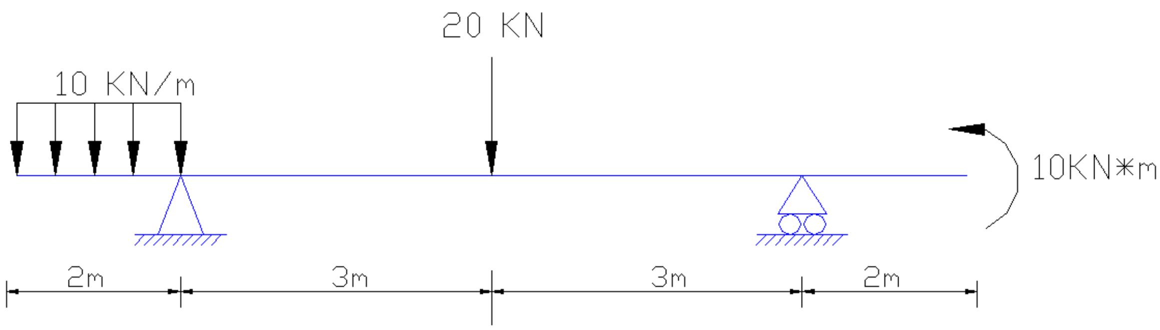
8.9 PROBLEMAS

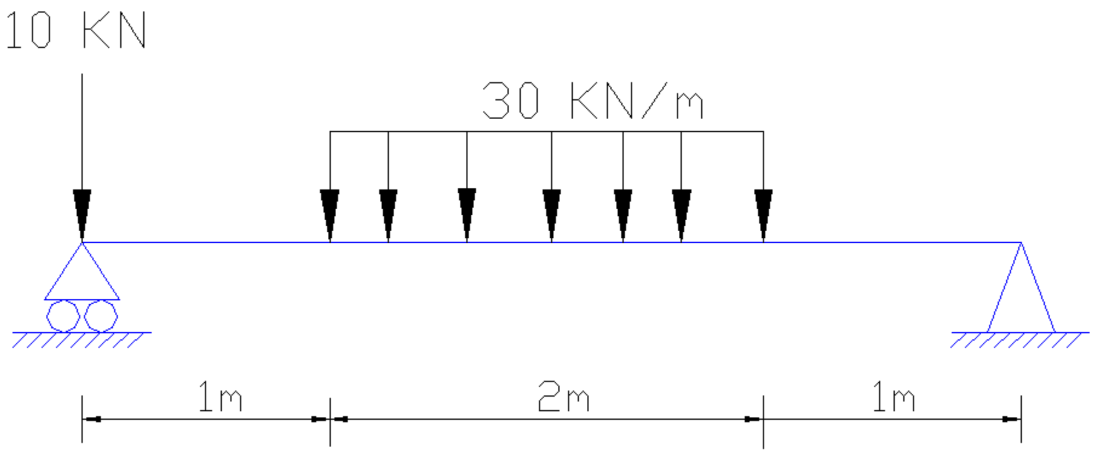
1. Calcular las leyes y diagramas de esfuerzos axiles, cortantes y momentos flectores de las vigas siguientes:



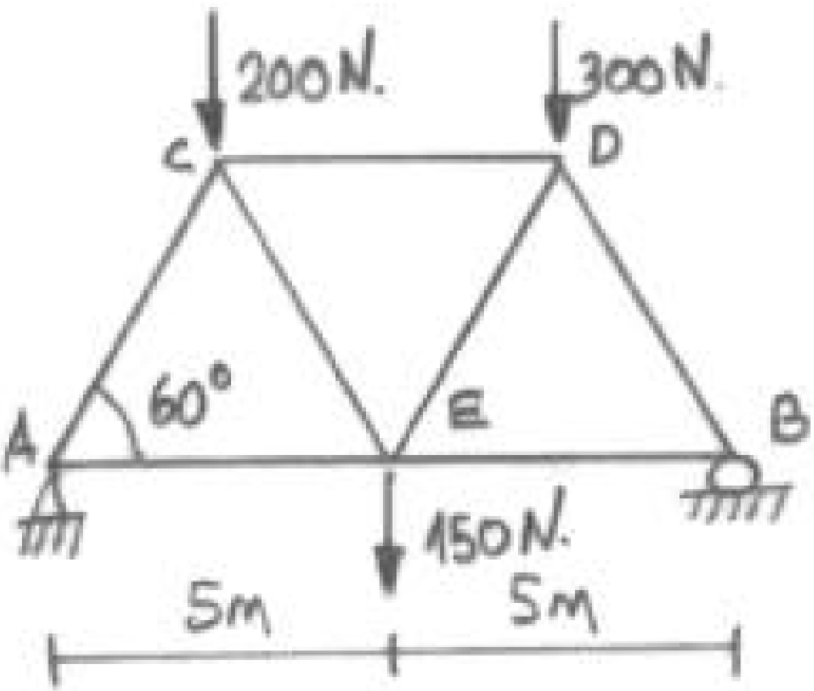

15 KN
20 KN/m
2m
4m


20 KN/m
10KN*m
2KN
5m


20 KN
10 KN/m
10KN*m
2m
3m
3m
2m

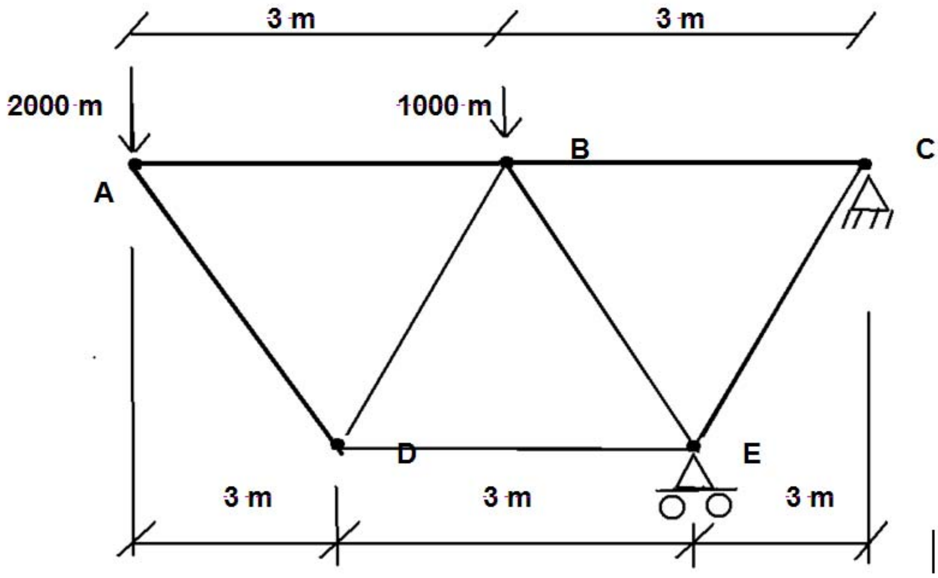


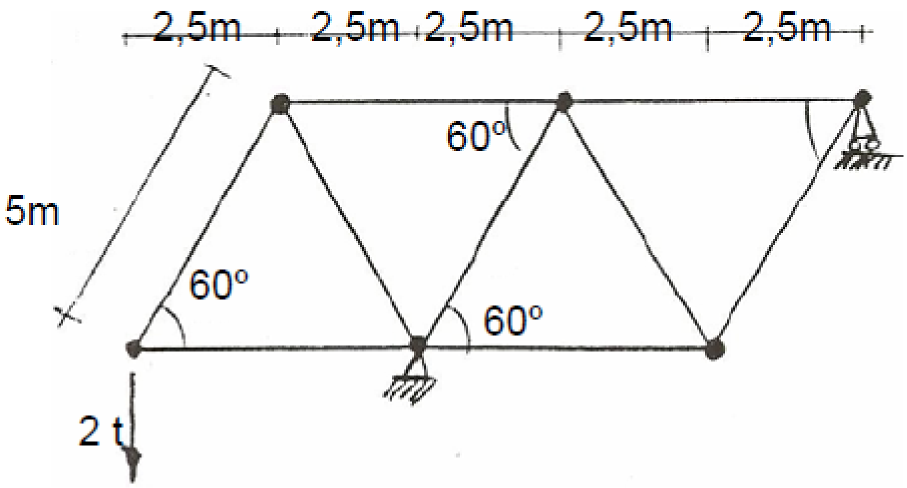
2. Usando el método de los nudos determínese el esfuerzo en cada elemento de las estructuras articuladas que se muestran a continuación.



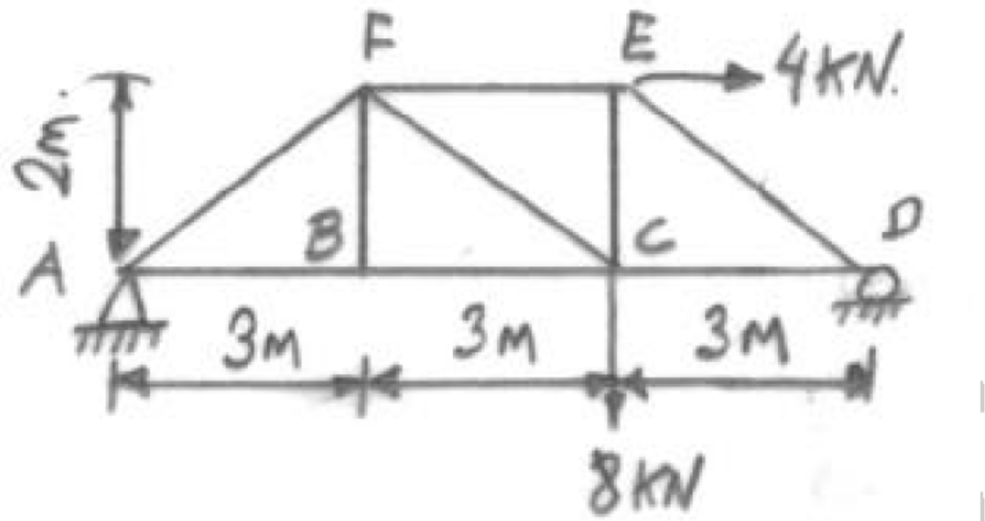
Solución:

Barra	Tensión	Tipo
AC	346 N	Compresión
AE	173 N	Tracción
BD	404,14 N	Compresión
BE	202,07 N	Tracción
CE	115,47 N	Tracción
CD	230,7 N	Compresión
DE	57,26 N	Tracción





3.Calcular mediante Ritter el esfuerzo en la barra EF CF BC de la estructura articulada plana siguiente:



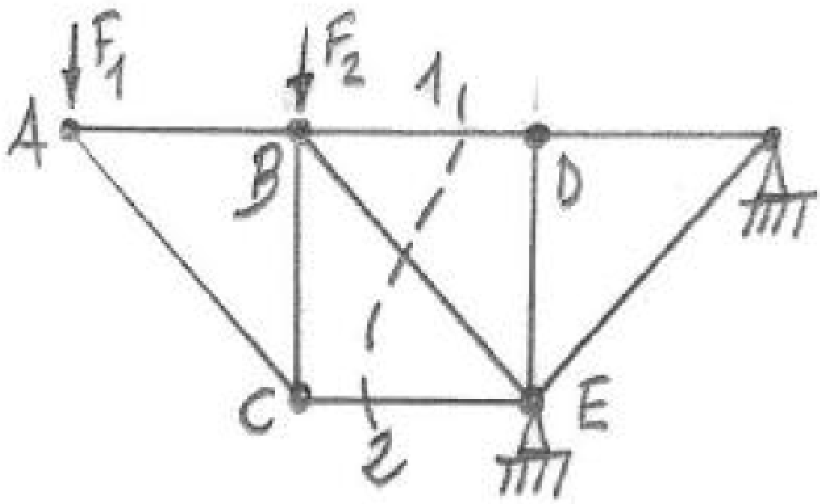
Solución:

T_{BC}=8KN Tracción

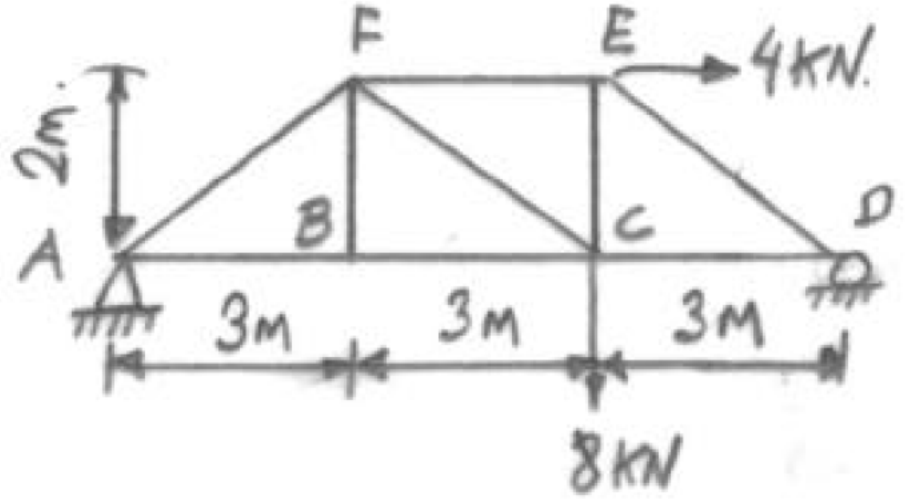
T_{EF}=8KN Compresión

T_{CF}=5KN Tracción

3.Calcular mediante Ritter el esfuerzo en la barra BD de la estructura articulada plana siguiente:



4.Calcular mediante Ritter el esfuerzo en la barra EF CF BC de la estructura articulada plana siguiente:



Solución

T_{BC}=8KN Tracción

T_{EF}=8KN Compresión

T_{CF}=5KN Tracción